Théories d'or

10e édition

Par Thierry DELORT
(Mai 2020)

2020 Auteur Thierry Delort. 10e édition.
Editions Books on Demand, 12/14 rond-point des Champs Elysées, 75008 Paris,France.
ISBN :978322221790
Dépôt légal :.Mai 2020
Imprimé par Books on Demand, GmbH, Allemagne.

Note au lecteur :

Ce livre, Théories d'or 10e édition, est présenté sur le site www.theoriesdor.com.

Il est publié aux éditions Books on Demand, Paris (2020).

Il peut être commandé dans la plupart des librairies, par internet à Books on Demand ou amazon.fr, ou sur le site www.theoriesdor.com.

A M. de N.

Remerciements :

Je remercie tous ceux qui m’ont aidé, par leur aide logistique ou morale, ou par leurs conseils, en particulier :

Ma chère mère Marie-Claude Delort, pour son soutien indéfectible et constant, Pr E. Panarella, Editeur Physics Essays, mon frère Jean-Yves Delort, Docteur Paris VI (Jussieu), pour toute l’aide logistique qu’il m’a apportée, mes chers grands-parents Simone et Alfred Bonnamy, Pr M. Duffy, qui m’a invité à la conférence PIRT 2004 (Londres), mon père Francis Delort †2008(ECP61).

Je remercie également mes professeurs , notamment J.D Bloch (Math-sup Louis le Grand,math), Mr Réverchon(Math-Spé Louis le Grand,physique), Mr Vaquez (Terminale, Lycée Robespierre, Arras, physique), MMrs Bonifet, Le Sann, Jouve ($1^{\text{ière}}$, 2nde, Lycée Stanislas, Montréal, Math, Math, Physique), Mr Paul Deheuvels (Proviseur Lycée Louis le Grand (1981)), Mme Duval ($5^{\text{ième}}$ $3^{\text{ième}}$, Collège Emile Verarhren, Saint-Cloud (Math)),Mr Grimm (Ancien directeur ECP (1987)), Mr Martin, (directeur des études ECP $2^{\text{ième}}$ année(1987)).

Je remercie aussi mon frère Jacques Delort (X83),Mr Charles-Michel Marle (X53), mon ami Arnaud Sergent (HEC86), Benjamin Enriquez (X83), ma sœur Sophie Delort et mon oncle Jean-Marc Bonnamy (X54) pour les coups de main qu’ils m’ont donnés.

Théories d’or

10e édition

A.THEORIE MODERNE DE L’ETHER.

B.THEORIE QUANTIQUE DES VARIABLES ABSOLUES.

C.THEORIE MATHEMATIQUE PLATONISTE.

D.THEORIE ALEATOIRE DES NOMBRES.
(Conjecture de Goldbach)

TABLE DES MATIERES

I. PRESENTATION DE L'OUVRAGE.

Vers la fin de mes études supérieures scientifiques, en 1987, après des classes préparatoires au Lycée Louis-le-Grand et dans ma dernière année à l'Ecole Centrale, à la suite de la lecture d'un livre sur le centenaire d'Einstein et la Relativité, j'ai eu la conviction que la Relativité Restreinte présentait une faille dans ses bases en dépit d'une évidente excellente validité mathématique de prédiction, en même temps que m'apparaissait une conception nouvelle et extrêmement attrayante de la nature du temps.

Mes études terminées j'ai pu, à la suite de certaines circonstances, consacrer une grande partie de mon temps à des recherches, et en particulier à développer la théorie liée à la Théorie de la Relativité que j'avais entrevue lors de la fin de mes études. En même temps, j'ai commencé de nouvelles recherches : J'ai essayé de résoudre la célèbre Conjecture de Goldbach, « Tout nombre pair est la somme de 2 nombres premiers », et j'ai travaillé aussi sur une nouvelle approche des fondations des mathématiques et de la logique, dont la conception actuelle reposant sur le formalisme mes semblait restreinte et insatisfaisante, et j'ai aussi commencé des recherches en physique quantique. Concernant cette dernière théorie, tout comme pour la Relativité, après la lecture d'un livre qui exposait le fameux Paradoxe du chat de Schrodinger, j'ai eu la même impression que celle concernant la Théorie de la Relativité, c'est-à-dire que, dans sa conception actuelle, la Physique Quantique était insatisfaisante, et j'ai essayé d'élaborer une nouvelle approche en évitant les points très discutables et insatisfaisants de la Physique Quantique actuelle.

J'ai eu de la difficulté à publier mes travaux pour différentes raisons, mais j'ai cependant pu publier divers articles notamment dans la revue Physics Essays entre 2000 et 2007, à la conférence Physical Interpretation of Relativity Theory en 2004 et dans la revue International Journal of Physics en 2015. Cependant, ces articles n'étaient pas bien rédigés et de plus contenaient ce qui s'est révélé être des erreurs théoriques importantes, notamment en astrophysique. J'ai donc publié à partir de 2011 des éditions du livre Théories d'or, chaque édition comportant d'importantes améliorations et modifications nécessaires par rapport à l'édition précédente. Par exemple la Théorie moderne de l'Ether exposée dans la 8e édition du livre Théories d'or est beaucoup plus complète et de bien meilleure qualité que dans les articles publiés dans la revue Physics Essays, et aussi que dans la 1^{ière} édition.

Dans ce livre, Théories d'or, je présente donc 4 théories qui sont le fruit de 27 années de recherches, plus ou moins continues. En effet, mes recherches m'ont conduit à l'obtention de 4 théories, chacune répondant à l'objectif des recherches que j'ai évoqué plus haut. Ces théories finales sont cependant beaucoup plus

complexes et perfectionnées que mes idées initiales, celles-ci étant cependant confirmées. J'ai appelé ces théories, présentées dans ce livre, « théories d'or », pour leur importance pour la Physique théorique et les mathématiques, et aussi pour le caractère esthétique et novateur des concepts qu'elles introduisent. J'ai nommé ces théories Théorie (moderne) de l'Ether, Théorie Quantique des variables absolues, Théorie mathématique Platoniste et Théorie aléatoire des nombres.

Même si les 4 théories que je présente sont révolutionnaires sous bien des aspects, je n'ai pu les élaborer qu'en utilisant les travaux de chercheurs, connus ou inconnus qui m'ont précédé. Ceci est le cas pour chacune des 4 théories, et donc je puis dire comme Newton que j'étais « sur les épaules d'un géant » lorsque je les ai conçues. J'ai aussi utilisé des livres scientifiques très intéressants, indiqués dans les Références de mes articles. J'ai aussi bénéficié de l'enseignement excellent de certains professeurs lors de mes études primaires et secondaires, et du soutien moral et logistique de nombreux membres de ma famille proche, et des aides de diverses natures d'autres personnes, dans la rédaction de ce livre.

Dans la partie II. suivante, je rappellerai le contexte historique scientifique dans lequel chaque théorie d'or a été obtenue.

II. PRESENTATION DE CHACUNE DES THEORIES D'OR.

A.Théorie moderne de l'Ether.

Depuis l'aube des temps, des hommes et des femmes se sont posés la question : Quelle est notre place, la place de notre terre, dans l'Univers.
La terre nous semblant immobile, la réponse la plus simple et la plus naturelle était que celle-ci soit le centre de l'Univers et que les étoiles, les planètes et le soleil tournent autour d'elles. Cette réponse a été admise par la philosophie et la science (à l'époque elles n'étaient pas différenciées) pendant de très nombreux siècles, et alors la conception de l'Univers était un système géocentrique c'est-à-dire dans lequel la terre était le centre de l'Univers. Cependant certains physiciens-philosophes isolés, comme par exemple Aristarque de Samos (-310,-230) ont proposé des systèmes héliocentriques dans lesquels le soleil était le centre de l'Univers.

Puis ce modèle géocentrique a été remis en cause par Copernic (1473-1543) qui proposa à nouveau un système héliocentrique, dans lequel la terre et les planètes tournaient sur elles-mêmes et autour du soleil. A partir de cette époque, on abandonna très rapidement le modèle géocentrique. Galilée (1564-1642) proposa un concept révolutionnaire de Référentiels, les Référentiels en translation rectiligne

uniforme les uns par rapport aux autres. On appela par la suite ces Référentiels *Référentiels Galiléens*. Puis le célèbre physicien Anglais Newton (1642-1727) proposa les lois de l'attraction universelle, qui lui permirent de justifier théoriquement les observations du physicien Allemand Kepler (1574-1630) sur la trajectoire des planètes, elliptique avec le soleil pour foyer. D'après les lois de Newton, la gravitation s'exprimait de la même façon dans tout Référentiel Galiléen. Ceci était dû à la loi fondamentale de la dynamique qu'il avait trouvée, c'est-à-dire que la somme des forces s'exerçant sur un système était égale à sa masse multipliée par l'accélération de son centre d'inertie. Elle s'exprimait donc sous la forme :

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) \quad (1)$$

Puis on fit de nouvelles découvertes, notamment en électromagnétisme qui étudiait l'ensemble des phénomènes liés aux charges électriques, immobiles ou en mouvement, et en particulier l'électricité. Un physicien Ecossais, Maxwell (1831-1879) rassembla les lois de l'électromagnétisme sous la forme d'équations connues sous le nom d'*équations de Maxwell.*

Dans la nouvelle conception de notre Univers, qui n'était ni géocentrique ni héliocentrique puisque le soleil n'était pas considéré comme le centre de l'Univers, la plupart des physiciens croyaient cependant à l'existence d'un Référentiel absolu, appelé Ether, rempli de matière immobile, dans lequel se propageaient la lumière et les ondes électromagnétiques.
Cependant des physiciens Américains, Michelson (1852-1931) et Morley (1838-1923) réalisèrent en 1887 une expérience supposée permettre de déceler la vitesse de la terre par rapport à l'Ether, dont le résultat donna une vitesse nulle. Cette expérience, appelée expérience de Michelson et qui eut une importance décisive, utilisait un interféromètre permettant de comparer la vitesse de 2 rayons lumineux ayant emprunté des chemins différents.

Pendant ce temps, Lorentz (1853-1928), physicien Hollandais, proposa un nouveau type de Référentiel, appelé Référentiel de Lorentz, nécessaire pour que les équations de Maxwell puissent s'écrire de la même façon dans tout Référentiel Galiléen. De plus et pour la même raison, Lorentz proposa que la masse d'une particule en mouvement augmente avec la vitesse et devienne $m/(1-v^2/c^2)^{1/2}$ la masse étant animée de la vitesse v. Enfin Lorentz émit l'hypothèse pour expliquer le résultat de l'expérience de Michelson et Morley qu'une règle en mouvement dans l'Ether se contracte dans le sens de son mouvement d'un facteur C(v)= (1-

$v^2/c^2)^{1/2.}$ Il proposa une théorie de l'électron avec cette nouvelle masse et cette contraction en accord avec l'observation.

Puis Einstein proposa en 1905 une interprétation plus simple de ces phénomènes, en introduisant un nouveau Principe, appelé Principe de la Relativité, qui exprimait que les lois physiques s'exprimaient de la même façon dans tout Référentiel inertiel (ceux-ci correspondant aux Référentiels Galiléens dans la Relativité). On appela Relativité Restreinte la théorie bâtie sur ce Principe de Relativité. La constance de la vitesse de la lumière pouvant être considérée comme une loi physique, une conséquence de ce Principe de Relativité était que dans tout Référentiel inertiel, la vitesse de la lumière était constante et avait la même valeur c. Ceci expliquait donc le résultat négatif de l'expérience de Michelson et Morley qu'on a évoqué plus haut. Une conséquence de cette vitesse constante de la lumière était que les transformations entre les Référentiels inertiels devaient être les transformations de Lorentz. De plus, une autre conséquence du Principe de Relativité était que la Loi fondamentale de la dynamique exprimée dans les Référentiels inertiels, devait être obtenue en remplaçant dans la Loi de la dynamique de Newton (C'est-à-dire l'équation (1)), la masse m par la masse m/C(v), c'est-à-dire exactement la masse proposée par Lorentz. On peut montrer qu'une conséquence de cette loi modifiée est que l'énergie d'une particule animée d'une vitesse v dans un Référentiel inertiel est $E=mc^2/C(v)$, qui donne la célèbre équation $E=mc^2$ dans le cas où v=0.

Puisque tous les Référentiels inertiels étaient complètement équivalents, le concept de Référentiel Absolu, c'est-à-dire le concept d'Ether devenait alors inutile et il fut totalement abandonné par l'ensemble des physiciens. Toute la physique se développa dans le cadre du Principe de Relativité, et Einstein généralisa sa théorie lorsqu'il y avait de la gravitation en découvrant la Relativité Générale. C'est sur cette Théorie de la Relativité Générale que fut développée la Cosmologie actuelle. En accord avec le Principe de Relativité cependant, dans cette Cosmologie la situation de notre planète, du soleil est de notre galaxie, sont totalement analogues à la situation des autres étoiles de l'Univers, celui-ci n'ayant ni centre ni frontières.

Toute la physique des particules se développa aussi en accord avec le Principe de Relativité, et à ce jour, aucune expérience en laboratoire n'a contredit la Relativité Restreinte, excepté certaines expériences particulières en physique quantique (interaction instantanée à distance), en physique des particules (masse des neutrinos), ou en électromagnétisme (détection du Référentiel de repos du Cosmic Microwave Background), comme on le verra plus loin plus précisément. On verra cependant que ces expériences contredisant la Relativité Restreinte sont en accord avec la Théorie moderne de l'Ether. De même, les observations sont en accord avec la Relativité Générale.

Pourquoi alors proposer une nouvelle théorie, expliquant l'ensemble des phénomènes liés à la Relativité, Restreinte ou Générale dans ces conditions ?
En réalité, la Relativité présente certains aspects très insatisfaisants. On rappelle aussi qu'au temps de Galilée, la physique basée sur le système géocentrique expliquait l'ensemble des observations astronomiques de l'époque, exceptés certains points considérés comme des points de détail et ignorés délibérément par les physiciens de l'époque.

Un physicien Français, Langevin (1872-1946) a proposé une expérience par la pensée qui lui semblait paradoxale d'après sa prédiction par la Relativité Restreinte, cette expérience étant classiquement appelée paradoxe des jumeaux de Langevin. En réalité, la prédiction théorique par la Relativité de cette expérience n'est pas paradoxale si on l'analyse en profondeur. De très nombreux autres soi-disant paradoxes ont été proposés, mais eux semblent témoigner en général dans leur quasi-totalité ou bien d'une méconnaissance de la Relativité ou bien d'une mauvaise utilisation de celle-ci.

Cependant il existe des expériences par la pensée plus élaborées qui, sans contredire la Relativité Restreinte, montrent que leur interprétation par la Relativité Restreinte n'a aucun sens. Exposons ces 2 expériences par la pensée :

On considère 2 règles graduées infinies r_1 et r_2, immobiles dans un Référentiel Galiléen R. Des horloges sont disposées tous les mètres sous chacune des règles et indiquent le temps du Référentiel Galiléen R, elles sont situées sur l'axe OX de R, leur graduation indiquant l'abscisse X de R . Des fusées sont disposées sous chacune des horloges de la $2^{\text{ième}}$ règle r_2. A T=0, indiqué par toutes les horloges, les fusées sous la règle r_2 donnent aux horloges de r_2 et à r_2 la vitesse constante v = 3km/s, mesurée dans le Référentiel R et le long de l'axe OX de R (On peut aussi supposer que les horloges animées de v ne sont pas fixées sur r_2 pour éviter le problème de contraction des longueurs). Il serait donc logique de s'attendre à ce que les horloges de r_2 indiquent alors le temps du Référentiel Galiléen R' animé de la vitesse v=3km/s par rapport à R, dont l'axe O'X' coïncide avec l'axe OX de R.

Or ceci est impossible car d'après la Relativité Restreinte, on peut choisir une origine spatiale et temporelle de R' telle que le temps T' de R' soit lié au temps T de R par la relation :

$$T' = \frac{T - vX/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad (2)$$

T' étant le temps de R' au temps T en un point d'abscisse X de R.

Et donc d'après l'équation précédente (2), pour que les horloges de r_2 indiquent le temps de R', il faudrait que certaines remontent le temps jusqu'à moins l'infini. De plus, on sait d'après la Relativité que le temps T_2 indiqué par les horloges de r_2, lorsqu'elles coïncident avec une horloge de r_1 indiquant le temps T de R est donné par l'équation :

$$T_2 = T\sqrt{1 - v^2 / c^2} \quad (3)$$

Le phénomène donnant l'équation précédente est appelée *dilatation des temps* dans la Relativité Restreinte. Il est donc impossible dans la Relativité que les horloges de la règle r_2 indiquent le temps de R', et de ce fait R',dont le temps est donné par l'équation (2) semble n'avoir aucun sens physique.

On peut proposer la 2[ième] expérience par la pensée suivante:
On suppose qu'on a toujours 2 règles r_1 et r_2, sur le même axe, pas de longueurs infinies mais d'une longueur pouvant être supérieure à une distance donnée D. On suppose que r_1 coïncide avec l'axe OX d'un Référentiel Galiléen R, et que sa graduation indique l'abscisse X d'un point dans le Référentiel R. Par aileurs r_2 coïncide avec l'axe O'X' d'un Référentiel Galiléen R' animé de la vitesse d'un tapis roulant v=3m/s par rapport à R, la graduation de r_2 indique l'abscisse X' d'un point dans R'. On suppose que R et R' sont des Référentiels inertiels (terme introduit par Einstein mais qui signifie exactement « Galiléens »), et que les transformations entre R et R' sont les transformations de Lorentz classiques.

On considère alors 2 points fixes A et B de R, avec 2 observateurs O_A et O_B situés en A et en B, chaque observateur ayant 2 montres, l'une indiquant le temps de R et l'autre le temps de R'. On suppose de plus que l'origine de R est en A, et que l'abscisse de B dans R est positive. Si T' est le temps de R', on a vu que l'équation précédente (2) donnait T' pour un point d'abscisse X et au temps T dans R.

On suppose qu'au temps T=0 de R, les observateurs O_A et O_B regardent leur montre.
D'après hypothèse, les montres de O_A et O_B indiquant le temps de R indiquent $T_A=T_B=0$.
D'après l'équation (2), l'origine de R coïncidant avec A, la montre de O_A indiquant le temps de R' est $T_A'=0$.
D'après l'équation (2), si A est à une distance D mesurée dans R de B, le temps indiqué par la montre de O_B indiquant le temps de R' est obtenu pour T=0 et X=D, et donc, ce temps est :

$$T_B' = \frac{-vD/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad (4)$$

Si on choisit une distance D assez grande, par exemple telle que vD/c^2 est supérieure à 1 milliard d'années, cela signifie dans l'interprétation de la Relativité Restreinte que dans le Référentiel R lié à la règle r_1, O_A et O_B regardent leur montre en même temps, mais dans le Référentiel de r_2, animé de la vitesse d'un tapis roulant par rapport à r_1, O_A a regardé sa montre 1 milliard d'années après O_B. Et donc l'interprétation de cette expérience par la Relativité Restreinte, même si elle ne contredit pas celle-ci, semble n'avoir aucun sens.

Les 2 expériences par la pensée précédentes sont fondamentales, car elles mettent en évidence de façon intuitive les problèmes inhérents à la Relativité Restreinte. Cependant, puisqu'elles ne contredisent pas celle-ci, on ne les utilisera pas explicitement dans la Théorie moderne de l'Ether qu'on exposera plus loin.

Il existe en effet d'autres points concernant la Relativité Restreinte qui sont insatisfaisants.

L'un de ces points concerne la Physique Quantique :

Einstein s'est toujours opposé à la Physique Quantique. Il considérait que celle-ci contredisait la Relativité Restreinte, et il a proposé une expérience, avec 2 autres physiciens, portant le nom de *Paradoxe E.P.R* (Einstein-Podolsky-Rosen Paradox), qui, si on supposait que la Relativité Restreinte était vraie, devait contredire la Physique Quantique.

Cette expérience consistait à produire en utilisant la Physique quantique 2 photons jumelés (appelés aussi *photons corrélés*), et à effectuer une mesure sur chacun des photons en 2 points éloignés. D'après la Physique Quantique, le comportement lors de cette mesure des 2 photons était lié quelle que soit leur distance, et ceci contredisait la Relativité Restreinte pour laquelle aucune information ne peut se transmettre à une vitesse supérieure à celle de la lumière. Or de telles expériences ont pu être réalisées en utilisant les techniques nouvelles qui n'existaient pas lorsque le Paradoxe E.P.R a été proposé, la première expérience de ce type ayant été réalisée par le Français Alain Aspect, le résultat de cette expérience ayant été confirmé et grandement amélioré par de nombreuses autres expériences réalisées par d'autres physiciens. Et il est extrêmement surprenant et notable qu'elles ont toutes donné le résultat prévu par la Physique Quantique ce qui, d'après Einstein lui-même et les 2 autres physiciens Podolsky et Rosen, contredisait la Relativité Restreinte. On désigne ces expériences sous le nom d'expériences sur le phénomène d'*intrication quantique*. On ne peut transmettre une information quelconque en utilisant ce phénomène d'intrication quantique, mais ce phénomène

indique cependant qu'une information s'est transmise plus vite que la lumière ou qu'une cause s'est transmise plus vite que la lumière ce qui signifie qu'une information ou qu'une cause vient du futur et qui contredit donc la Relativité Restreinte.

Cependant, le monde de la Physique n'a pas voulu considérer, ni même envisager, que le résultat de ces expériences liées à l'intrication était en contradiction avec la Relativité Restreinte, alors que c'était la position d'Einstein, considéré comme l'auteur même de cette théorie, et que cette position n'a jamais été abandonnée par ce dernier. Ce refus s'interprète par le fait que de nombreux physiciens acceptent la Relativité Restreinte de façon dogmatique, et refusent ne serait-ce que l'idée de sa remise en cause. Cette attitude est aussi expliquée par le fait déjà évoqué que, toutes les expériences en laboratoires autres que celles liées à l'intrication quantique sont en accord avec les prédictions de la Relativité Restreinte.

Il est évident cependant que si une nouvelle théorie, dont les bases sont radicalement différentes de celles de la Relativité Restreinte, interprète elle aussi l'ensemble des expériences en laboratoire liées à la Relativité Retreinte, aussi simplement et rigoureusement que cette dernière, et si de plus cette nouvelle théorie est en accord avec les expériences liées à l'intrication quantique, l'attitude scientifique doit être d'étudier les 2 théories afin de pouvoir les comparer et de déterminer laquelle est erronée. Surtout si cette nouvelle théorie évite les paradoxes qu'on obtient avec la Relativité Restreinte dans les 2 expériences par la pensée exposées précédemment.

Or c'est exactement le cas de la Théorie moderne de l'Ether qu'on exposera plus loin. En effet, dans cette Théorie, dans le cas des expériences par la pensée qu'on a exposé plus haut, R étant le Référentiel absolu, la relation entre le temps T de R et le temps T' de R'est, choisissant une origine des temps commune :

$$T' = T\sqrt{1 - v^2 / c^2} \qquad (5)$$

Et donc dans la 1[ière] expérience par la pensée, le temps indiqué par les horloges de r_2 est bien le temps de R', et dans la 2[ième] expérience par la pensée, la simultanéité étant équivalente dans R et R' d'après l'équation (5), les montres de O_A et O_B indiquant le temps de R' en A et en B indiquent le même temps $T_A'=T_B'=0$, lorsque O_A et O_B regardent leur montre au temps de R $T=T_A=T_B=0$. De plus, la Théorie moderne de l'Ether n'est pas contraire à l'interaction instantanée à distance, et donc n'est pas en contradiction avec la prédiction des expériences liées à l'intrication quantique par la Physique Quantique. Nous verrons aussi que la découverte que les neutrinos ont une masse, qui a valu le prix Nobel en 2015 à Takaaki KAJITA et à Arthur McDONALD contredit non seulement le Modèle

Standard mais aussi la Relativité Restreinte alors qu'elle est en accord avec la Théorie moderne de l'Ether.

Dans les articles publiés dans la revue Physics Essays ainsi que dans les premières éditions du livre Théories d'or, nous présentions une première Cosmologie basée sur l'Ether (CBE1), que nous avons abandonné partiellement car elle n'était pas satisfaisante. Dans cette première Cosmologie (CBE1) la vitesse absolue d'un photon était égale à c, et l'Univers était comme une sphère en expansion dont les frontières se déplaçaient à la vitesse de la lumière. Cette première Cosmologie justifiait cependant la courbe de rotation des Galaxies à courbe de rotation plate et la nature de la masse sombre (Dans de nombreuses galaxies, la vitesse des étoiles est indépendante de leur distance au centre, et de plus on on ne peut expliquer cette vitesse par la masse visible de la galaxie, il doit donc y avoir une masse d'origine inconnue, appelée masse sombre), énigmes très importantes de la Cosmologie actuelle. A partir de la 5ième édition de Théories d'or, nous avons présenté une 2ième Cosmologie basée sur l'Ether (CBE2), gardant certains aspects de CBE1, par exemple la forme de l'Univers (sphérique,) ou l'interprétation de la masse sombre, mais dont les frontières ne se déplacent plus à la vitesse de la lumière.

La 2ième Cosmologie de la Théorie de l'Ether (CBE2) admet cependant les 2 hypothèses concernant l'existence de l'Ether :
A.Une substance appelée *substance sombre* ou *ether-substance* emplit tout ce qu'on appelle le vide dans l'Univers.
B.En tout point de l'espace on peut définir un Référentiel absolu appelé *Référentiel local Cosmologique* ou *ether local*.

Cette 2ième Cosmologie (CBE2) permet d'interpréter la nature de la masse sombre, l'origine de son invisibilité, la courbe de rotation plate des galaxies, la loi de Tully-Fisher ($M=Kv^4$, M masse baryonique de la galaxie (avec une courbe de rotation constante des vitesses v), K constante). Elle permet aussi d'obtenir la distribution de matière sombre dans les galaxies et dans les amas de galaxies. Un aspect fondamental de la 2ième Cosmologie est qu'elle permet de déterminer l'Ether local (Référentiel absolu) qui est naturellement identifié avec le Référentiel de repos du Cosmic Microwave Background (CMB). Dans la CBE2, la forme de l'Univers est très simple et unique (sphérique) alors qu'on rappelle que dans la SCM, il y a de nombreuses formes possibles de l'Univers, très complexes, sauf si l'Univers est infini ce qui semble totalement impossible.
La CBE2 propose 2 modèles mathématiques d'expansion: Le premier modèle mathématique est basé comme la SCM sur les équations de la Relativité Générale.

Le 2ième modèle ne l'utilise pas, mais utilise des équations très simples, (les frontières de l'Univers sphérique se déplacent à vitesse constante), et permet d'obtenir très simplement la valeur de la constante de Hubble, (en 1/t, t age de l'Univers), ainsi que toutes les distances Cosmologiques.De plus il ne nécessite, contrairement à la SCM, ni énergie noire ni constante Cosmologique.

On verra aussi que la Théorie de l'Ether permet d'interpréter l'ensemble des phénomènes liés à la Relativité Générale d'une façon nouvelle, en ayant une signification physique beaucoup plus claire que cette dernière. La Théorie de l'Ether avec Gravitation interprète notamment l'électromagnétisme et la physique quantique en présence de gravitation de façon beaucoup plus élégante et simple que la Relativité Générale. De plus elle permet de traiter simplement les cas où il y a plusieurs masses, ce qui n'est pas le cas de la Relativité Générale. Nous verrons cependant que la Théorie de l'Ether est compatible avec l'existence d'ondes gravitationelles.

On voit donc que la Théorie de l'Ether, notamment en ce qui concerne la Cosmologie, amène à une révolution dans la conception de notre Cosmos analogue à la révolution Copernicienne. On rappelle qu'un grand physicien Anglais contemporain d'Einstein, Eddington (1882-1944) disait « La Théorie de la Relativité est la Théorie mathématique de l'Univers, ce n'est pas la Théorie de la substance ». C'est ce même Eddington qui vérifia la prédiction de la Relativité Générale de la déviation d'un rayon lumineux par une masse, et donc c'était l'un des plus grands spécialistes de la Relativité. On voit que la Théorie moderne de l'Ether lui donne raison, même si mathématiquement et physiquement la Théorie de l'Ether est sans doute beaucoup plus différente de la Théorie de la Relativité qu'il ne l'avait imaginée.

B.La théorie quantique des variables absolues.

A l'heure actuelle, la situation de la Physique Quantique est proche de celle de la Relativité :
Tout comme celle-ci, elle est considérée comme l'une des théories les plus complexes et les plus importantes de la physique. Elle permet de donner une interprétation à un nombre incalculable d'expériences diverses réalisées en laboratoire, notamment en physique des particules.
Pourtant, tout comme la Relativité, elle présente des aspects très insatisfaisants. Rappelons les Principes fondamentaux de la Théorie Quantique Classique :
D'après ces Principes, un système est complètement défini par sa fonction d'onde. De plus un système est dans un état indéterminé tant qu'on n'effectue pas une

mesure sur lui. La probabilité que la mesure donne une certaine valeur est déterminée par la fonction d'onde.

Or celui qui le premier donna une équation permettant d'obtenir la fonction d'onde, Schrodinger (1887-1961), Prix Nobel 1933, était en désaccord avec la Théorie Quantique Classique basée sur les Principes précédents. Il proposa une expérience par la pensée, connue sous le nom du *Paradoxe du chat de Shrodinger* dans laquelle on enfermait dans une boite un chat avec une particule, qui si elle se désintégrait actionnait une particule de poison. D'après les Principes de la Théorie Quantique Classique donnés plus haut, puisque l'état de la particule, désintégrée ou non désintégrée, était indéterminé avant qu'on observe la particule, l'état du chat, mort ou vivant était aussi indéterminé. Cette interprétation de cette expérience peut être considérée comme en accord avec la Théorie Quantique Classique. Certes elle n'est pas admise telle quelle par la communauté scientifique, qui en donne diverses interprétations d'une grande complexité , mais Schrodinger n'a été convaincu par aucune de ces interprétations, et on ne peut mettre en doute les compétences scientifiques de ce savant.

En outre, celui qui était sans doute le plus grand théoricien en physique des particules, le physicien Américain Feynman (1918-1988), Prix Nobel 1965, déclarait « Personne ne comprend rien à la Physique Quantique ». Etant donné les qualités de ce physicien, si ceci s'appliquait à lui, cela s'appliquait alors à tout le monde. Là encore, une des raisons au fait que Théorie Quantique Classique était incompréhensible, était que l'état d'une particule était indéterminé avant qu'on ne l'observe, ceci semblant complètement contraire au bon sens dans la plupart des expériences de physique des particules.

La Théorie Quantique des Variables Absolues qui sera exposée dans ce livre, est une nouvelle théorie générale interprétant tous les phénomènes liés à la Physique Quantique. Cependant, dans cette théorie, l'état d'une particule est indépendant de son observation, et donc tout comme le paradoxe du chat de Schrodinger disparaît, les phénomènes liés à la Physique deviennent compréhensibles.

De plus, une conséquence de la Théorie Quantique Classique est qu'avant d'être mesurées, la position x et l'impulsion p_x d'une particule sont indéterminées, et qu'on ne peut mesurer l'une et l'autre simultanément. (La relation d'incertitude entre elles ést $\Delta x \Delta p_x \geq h/2\pi$, connue sous le nom d'inégalité d'Heisenberg). Il en résultait que les relations de la mécanique classique, faisant intervenir simultanément la position et l'impulsion ne pouvaient plus être valides dans la Théorie Quantique Classique. On admettait cependant qu'elles étaient valides approximativement, mais même justifier cette validité approximative était complexe, utilisant le concept complexe de paquets d'ondes et une telle

justification n'est pas en général donnée dans les livres de physique quantique. Mais ces équations de la mécanique classique faisant intervenir simultanément p_x et x sont extrêmement utilisées en physique des particules, et on n'a jamais mis en évidence qu'elles n'étaient valides qu'approximativement : Tout porte à croire qu'elles sont valides exactement. C'est aussi peut être en pensant à ces équations, incompatibles avec la Théorie Quantique Classique, que Feynman avouait ne rien comprendre à la Physique Quantique. Or dans la Théorie Quantique des Variables Absolues (TQVA) exposée dans ce livre, ces lois sont exactement valides dans le cas où elles sont utilisées pour interpréter les expériences concernant la Physique des Particules, car dans cette nouvelle théorie (TQVA), la position et l'impulsion sont définies simultanément dans de nombreux cas. Nous verrons qu'afin de pouvoir donner une interprétation de certaines équations très différente de celle de la Théorie Quantique Classique, les Principes de la Théorie Quantique des Variables Absolues sont clairement différents de ceux de cette dernière. En particulier, la Théorie Quantique des Variables Absolues n'utilise pas le concept fondamental de la Théorie Quantique Classique d'Observable, ni le concept complexe de paquet d'ondes. Cependant, la Théorie Quantique des Variables Absolues interprète l'ensemble des phénomènes liés à la Physique Quantique, et c'est la seule théorie générale clairement différente de la Théorie Quantique Classique qui peut interpréter l'ensemble des phénomènes liés à la Physique Quantique. Il est donc nécessaire d'un point de vue scientifique d'étudier cette nouvelle théorie afin de pouvoir la comparer à la Théorie Quantique Classique et de découvrir laquelle est erronée. Je rappelle encore qu'au temps de Galilée, le système géocentrique de l'époque interprétait parfaitement les observations qu'il était possible de réaliser alors, avec seulement des aspects insatisfaisants considérés comme des problèmes de détail, comme le sont considérés actuellement les aspects insatisfaisants de la Relativité et de la Théorie Quantique Classique. Et donc ce n'est pas parce qu'une théorie semble générale et semble interpréter la quasi-totalité des observations qu'elle est nécessairement bonne.

La Théorie Quantique des Variables Absolues (T.Q.V.A) ne présente cependant pas seulement des concepts faciles à comprendre. Elle présente en effet certains concepts surprenants et étranges pour interpréter certaines expériences d'un certain type appelées *expériences à choix retardé*. Cependant, si on veut interpréter ces expériences par la Théorie Quantique Classique, on doit introduire des concepts qui semblent non seulement étranges mais aussi complètement absurdes.

Les expériences à choix retardé sont une variante des expériences concernant l'intrication quantique qu'on a introduit dans la section précédente présentant la Théorie de l'Ether. Décrivons brièvement le principe de ces expériences à choix retardé:

On produit 2 particules corrélées, et on se rend compte que le comportement d'une des particules en un temps T_1 dépend de l'observation de la 2ième particule, cette observation dépendant d'un comportement aléatoire de la 2ième particule qu'elle aura en un temps T_2 postérieur à T_1 (Chacune des 2 particules pouvant avoir 2 comportements possibles).
Si on veut interpréter ces expériences par la Théorie Quantique Classique (T.Q.C), dans laquelle l'état d'une particule est indéterminé avant son observation, on doit admettre une action du futur sur le passé.
Au contraire dans la T.Q.V.A, cela n'est pas nécessaire : On introduit le concept de *prédiction quantique*, tel que lors de certains phénomènes appelés *chocs quantiques*, tout se passe comme si la particule prévoyait son comportement futur ainsi que celui de sa particule corrélée (si elle en a une). Ce phénomène de prédiction quantique est certes étrange, mais il évite de recourir à une action du futur sur le passé comme c'est nécessaire dans la T.Q.C. On remarque cependant qu'il n'est possible qu'à cause de la possibilité d'interaction instantanée à distance, possible dans la Théorie moderne de l'Ether et impossible dans la Relativité.
Il est à croire que ces expériences à choix retardé joueront un grand rôle dans le développement futur de la Physique Quantique.

C.La Théorie mathématique Platoniste.

Le plus important mathématicien de l'antiquité fut, à mon avis, le mathématicien Grec Euclide (vers-300). Le premier, il eut l'idée d'exprimer une théorie sous la forme d'Axiomes et de Théorèmes, les seconds étant déduits logiquement des premiers. Cette théorie était géométrique et étudiait différentes figures dans un Plan Euclidien, elle est pour cela connue sous le nom de géométrie Euclidienne. Plus tard, notamment avec l'invention des chiffres classiques par des mathématiciens Indiens, la Théorie des nombres se développa elle aussi, et à partir de la Renaissance, les mathématiques se développèrent dans leur ensemble, et connurent un essor extraordinaire. Le mathématicien français Descartes (1596-1650) introduisit les *coordonnées cartésiennes*, et on découvrit qu'on pouvait interpréter toute la géométrie Euclidienne en utilisant les coordonnées cartésiennes. Puis de nouveaux concepts mathématiques fondamentaux apparurent, notamment le concept d'*ensemble*.

La plupart des mathématiciens avaient l'idée d'une certaine signification réelle des mathématiques, et il était facile de se représenter un Plan Euclidien, ou un système de 2 axes gradués dans un plan définissant des cordonnées cartésiennes. Cependant, avec l'apparition du concept d'ensemble, apparurent certains problèmes qui rendaient de plus en plus difficile de donner une signification réelle

aux mathématiques. Ainsi, dans la 1ière Théorie des ensembles, si on considérait des ensembles existant, on obtenait un ensemble ayant ces ensembles pour éléments, mais un mathématicien Allemand, Cantor (1845-1918) montra qu'il était impossible qu'un ensemble contienne tous les ensembles. Un mathématicien Anglais, Russel (1872-1970) montra aussi, et c'est assez facile de le vérifier, qu'il est impossible qu'un ensemble contienne tous les ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes. Ces impossibilités sont connues sous le nom de Paradoxe de Cantor et Paradoxe de Russel, et elles conduisirent à abandonner la 1ière théorie des ensembles avec laquelle on obtenait ces paradoxes appelée *Théorie naïve des ensembles*.

De plus les mathématiques devenaient de plus en plus compliqués, et il devenait de plus en plus difficile de se représenter comme ayant une signification réelle les concepts introduits par les mathématiciens. En particulier, grâce aux travaux du mathématicien Français Cauchy (1789-1857), on identifia les droites à des ensembles, et en particulier on identifia chaque droite d'un repère Cartésien, c'est-à-dire d'un système de 2 axes définissant des coordonnées cartésiennes à un ensemble **R**, contenant des nombres appelés réels. Un repère Cartésien était alors identifié à un ensemble produit de **R** par lui-même. Cependant, cet ensemble **R** est plus difficile à se représenter qu'une droite dans un plan Euclidien ou un plan muni d'un repère cartésien. Mais de nouveaux concepts mathématiques beaucoup plus complexes que **R** apparaissaient aussi.

Cependant, la question du Platonisme d'un point de vue philosophique, c'est-à-dire la question de savoir si les mathématiques avaient ou non une existence réelle, n'était pas abandonnée. Mais ceci relevait strictement du domaine philosophique car aucune théorie mathématique des fondations des mathématiques ne pouvait être considérée comme une théorie Platoniste. Ainsi, les Axiomes des théories mathématiques n'étaient pas interprétés, et les théories mathématiques modélisant la logique mathématique étaient des théories dites de *logique formelle*. D'après ces théories, les propositions mathématiques étaient considérées comme des suites de symboles, qu'on pouvait déduire les unes des autres par des règles automatiques. La déduction en mathématique était modélisée dans les théories de logique formelle par ce qui est appelé des *systèmes formels*, définis par des Axiomes et des règles automatiques de déduction, permettant d'obtenir des propositions à partir des Axiomes.

On admettait dans les théories de logique formelle 2 Principes fondamentaux concernant les propositions en mathématique, qui étaient les suivants avec quelques variantes possibles :
-Toute proposition est vraie ou n'est pas vraie (Principe du Tiers Exclu)
-Aucune proposition est vraie et fausse (Principe de Non contradiction).

C’est dans le cadre des théories de logique formelle qu’on étudiait la *consistance* des théories mathématiques, c'est-à-dire de savoir si on pouvait déduire une proposition et sa négation à partir des Axiomes d’une théorie donnée, et qu’on étudiait la *complétude* d’une théorie, c'est-à-dire s’il existait une proposition vraie qu’on ne pouvait pas déduire d’une théorie donnée. En particulier, on s’est aperçu que certaines théories, malgré des Axiomes contradictoires étaient consistantes. C’était par exemple le cas pour la théorie de la géométrie proposée par le mathématicien Riemann et la Théorie de la géométrie Euclidienne. Un problème se posait donc : Les 2 théories étant apparemment consistantes, comment savoir laquelle est vraie ?
Le mathématicien Américain Godel (1906-1978) résolut le problème de la complétude en montrant qu’aucune théorie représentée par un système formel (c'est-à-dire donc le modèle représentant les théorie mathématiques dans les théories de logique formelle) n’était complète. Il existait toujours une proposition vraie qu’on ne pouvait obtenir par le système formel. Pour montrer ceci, Godel considéra la proposition :
P :P n’est pas démontrable (dans le système formel considéré).
Et on comprend intuitivement que tout en étant vraie, cette proposition ne peut pas être démontrée par le système formel considéré.
A l’heure actuelle, la question philosophique du Platonisme n’est pas résolue: Certains philosophes croient en l’idée du *Platonisme* définie plus haut d’autres pensent que, comme on les représente dans les théories mathématiques de logique formelle, les mathématiques ne sont que des déductions automatiques dépourvues de sens. On appelle *formalisme* cette 2ième position philosophique concernant les mathématiques. L’une et l’autre position sont défendues par divers arguments philosophiques.

Or la Théorie mathématique Platoniste exposée dans ce livre permet de prouver mathématiquement l’existence réelle de tous les concepts mathématiques classiques, d’expliciter la signification réelle de toutes les propositions utilisées par les mathématiques classiques, et en conséquence la signification réelle de toute démonstration utilisée dans les théories de mathématique classique. Cette Théorie mathématique Platoniste n’est pas de nature philosophique, mais est de nature mathématique. En effet, elle est totalement analogue à la première grande théorie mathématique, ayant servi de modèle à toutes les théories mathématiques qui suivirent, c'est-à-dire la théorie d’Euclide :
On sait qu’Euclide admettait l’existence d’un espace contenant les figures géométriques qu’il étudiait (droites, triangles, cercles..).De plus, comme on l’a rappelé plus haut, il déduisait logiquement des théorèmes de certains Axiomes, méthode reprise par l’ensemble des mathématiciens qui suivirent.

De façon analogue, la Théorie mathématique Platoniste est basée sur des Axiomes dont on déduit des théorèmes. Le premier Axiome admet l'existence d'un Espace (appelé *Espace Mathématique Platonique*) contenant tous les objets mathématiques de la même façon qu'Euclide admettait l'existence d'un plan contenant toutes les figures qui existaient d'après ses Axiomes. Les autres Axiomes de la TMP (Théorie Mathématique Platoniste) sont eux aussi de formulation simple et se comprennent intuitivement comme c'était le cas pour les Axiomes de la Théorie Euclidienne. Ils permettent l'obtention de théorèmes exprimant l'existence des objets mathématiques correspondant aux concepts des fondations des mathématiques, ceci de la même façon que d'après les Axiomes d'Euclide on obtenait l'existence de certaines figures géométriques à partir d'autres figures. Tous les Lemmes et Théorèmes de la TMP sont obtenus par déduction logique des Axiomes de la TMP. En particulier, on obtient dans le 1ier article (Introduction à la logique Platonicienne-Théorie des ensembles) des Lemmes ou des Théorèmes exprimant l'existence d'objets pouvant être identifiés à l'ensemble des réels **R** qu'on a évoqué plus haut, et aussi l'existence d'objets mathématiques ayant les propriétés de concepts mathématiques classiques comme les espaces vectoriels ou les corps. Les méthodes introduites dans ce premier article peuvent être généralisées pour prouver l'existence d'objets mathématiques ayant les propriétés de très nombreux concepts utilisés en mathématique classique. La TMP, fondée sur des Axiomes de la même façon que toute théorie mathématique, apparaît comme étant consistante, et on expose dans le 1ier article comment elle évite les Paradoxes de Cantor et de Russel évoqués plus haut. La particularité de la TMP est que ses Axiomes ont une signification réelle. Mais on déduit de ces Axiomes des théorèmes de la même façon qu'on déduit des théorèmes des Axiomes de n'importe quelle théorie mathématique.

Il est à noter que dans le 1ier article exposant la TMP, on introduit un concept qui est fondamental dans la TMP qui est celui d'un *concept non-flou*. Tel qu'on l'a défini dans la TMP, un concept non-flou est un symbole S tel que tout objet mathématique existant ou bien peut être représenté par S ou bien ne peut pas être représenté par S et que de plus on n'a aucun objet mathématique qui à la fois peut être représenté par S et ne peut pas être représenté par S. Dans le 1ier article on donne un Axiome simple (Axiome 2.5) permettant de justifier qu'un symbole est un concept non-flou. Cet Axiome se comprend intuitivement, mais l'origine complète de sa validité sera exposée dans le 2nd article (Logique Platonicienne des Propositions), où l'on verra que cet Axiome est la conséquence d'autres Axiomes beaucoup plus simples de la TMP. On verra aussi dans ce 2nd article qu'il est donc toujours possible d'utiliser ces nouveaux Axiomes à la place de cet Axiome très utilisé dans le 1ier article.

Dans le 2[ième] article on introduit donc de nouveaux axiomes très simples, et on déduit de ces axiomes :
-Un théorème analogue au Principe du Tiers Exclu (énoncé plus haut).
-Un théorème analogue au Principe de Non contradiction (énoncé plus haut).

Ainsi, ce qui n'était dans la logique formelle que des Principes sans justification devient des théorèmes déduits des Axiomes de la TMP, dont la démonstration dans la TMP permet de comprendre complètement l'origine de la validité. On résout aussi dans le TMP le problème de la consistance : On montre que toute *théorie mathématique Platoniste* est consistante. (On définira dans la TMP une *théorie mathématique Platoniste*, la TMP en étant un exemple). La TMP définit complètement comment on peut, pour toute proposition d'une Théorie mathématique Platoniste, expliciter sa signification réelle, c'est-à-dire sa signification dans l'espace mathématique Platoniste introduit dans le 1[ier] Axiome de la TMP, et aussi les critères permettant de déterminer si cette proposition est vraie ,fausse, ou ni vraie ni fausse. Toutes ce définitions et ces théorèmes sont donc déduits des Axiomes de la TMP.

La TMP apparaît donc comme la théorie mathématique la plus générale, car c'est la théorie s'appliquant à toutes les théories mathématiques : Non seulement elle permet d'obtenir et de justifier l'existence de tous les concepts des fondations des mathématiques, mais aussi la signification réelle de toutes les théories mathématiques classiques et l'existence de tous les concepts mathématiques classiques. Elle permet aussi de justifier la consistance de toutes les théories mathématiques classiques, en interprétant la logique inhérente à toute théorie mathématique classique. On a vu en particulier que les théorèmes fondamentaux qu'elle permet d'obtenir, correspondant au Principe de Non contradiction et au Principe du Tiers Exclu ne peuvent être obtenus dans aucune autre théorie mathématique. De plus, interprétant les fondations des mathématiques, elle peut être utilisée comme base de toute théorie mathématique classique.

Comme on l'a remarqué, la seule différence entre les Axiomes de la TMP et les Axiomes d'une autre théorie mathématique classique consiste en ce que les Axiomes de la TMP ont une signification réelle. La TMP utilise des concepts primitifs, c'est-à-dire sans définition explicite dont on utilise les propriétés intuitives, qui sont principalement les mêmes ou analogues à ceux utilisés dans les théories mathématiques classiques. Ainsi, on a vu que le concept primitif Espace mathématique Platonique dans la TMP était analogue au concept primitif de Plan Euclidien dans la Théorie d'Euclide. La TMP utilise les concepts primitifs « est élément de », « existe » qui sont utilisés dans toutes les théories mathématiques

classiques. Le concept primitif « représente » est utilisé dans la TMP de la même façon qu'il est utilisé implicitement dans les théories mathématiques classiques, avec cependant la remarque que dans les théories classiques, on ne l'utilise que pour définir des concepts non-flous (définis plus haut), alors que dans la TMP, il peut exister des concepts flous. Cependant, la TMP met en évidence que c'est parce qu'elles n'utilisent que des concepts non-flous que les théories mathématiques classiques peuvent être considérées comme des théories mathématiques Platoniste, ce qui est à l'origine de leur consistance. Dans les déductions d'Axiomes de la TMP, on utilise les mêmes propriétés intuitives des concepts primitifs que celles utilisées dans n'importe quelle théorie mathématique classique. Par exemple, concernant le concept primitif « est élément de » on utilise dans la TMP comme dans toute théorie mathématique classique qu'il est impossible que le naturel 2 soit élément et ne soit pas élément d'un ensemble. Concernant le concept primitif « existe », la TMP peut utiliser comme toute théorie mathématique qu'il est impossible qu'un élément d'un ensemble donné existe et n'existe pas. La TMP introduit aussi le concept primitif d' « objet mathématique », mais n'utilise que les propriétés évidentes de ce concept primitif.

La TMP résout le problème évoqué plus haut concernant la géométrie Riemannienne et la géométrie Euclidienne: On peut établir utilisant la TMP que les Axiomes des 2 théories expriment les propriétés d'objets existants et que les 2 théories sont des théories mathématiques Platonistes. Il en résulte qu'elles sont consistantes, et les Axiomes de l'une et de l'autre théorie sont vrais, mais ils n'expriment pas les propriétés des mêmes objets mathématiques.

On voit donc que la TMP permet de prouver classiquement et rigoureusement à partir de ses Axiomes l'existence de tous les concepts mathématiques classiques. On pourrait cependant répondre qu'on n'est pas sûr de la validité des Axiomes de la TMP. Or quelle que soit la Théorie mathématique, on sait que par définition on ne démontre jamais ses Axiomes, quelque soit leur simplicité (Sinon, ce ne sont plus des Axiomes mais des théorèmes).

Cependant, ce qui illustre la validité de la TMP et de ses Axiomes, c'est le remarquable accord entre ses prédictions théoriques et ce qu'on vérifie en analysant les théories mathématiques classiques : Ainsi, par exemple la TMP définit complètement une proposition ayant une signification Platoniste ainsi que cette signification Platoniste, et on observe que cela s'applique à toutes les propositions des théories mathématiques classiques, dont on peut obtenir une signification Platoniste totalement en accord avec la définition de la TMP. De plus toutes les démonstrations utilisées dans les théories classiques, peuvent exactement se mettre sous la forme des démonstrations des théories mathématiques Platonistes définies dans la TMP. Les théorèmes de la TMP correspondant aux Principes du

Tiers Exclu et au Principe de Non-contradiction, démontrés pour des théories mathématiques Platonistes, se vérifient pour toutes les théories mathématiques classiques, dont on vérifie aussi la consistance, démontrée pour les théories mathématiques Platonistes. De plus, il est bon de rappeler que la TMP permet de démontrer théoriquement l'existence de tous les concepts mathématiques des fondations des mathématiques, tout en apparaissant comme consistante ; elle permet notamment d'éviter les Paradoxes de Cantor et de Russel. Et donc, c'est ce remarquable accord entre les prédictions de la TMP et ce qu'on observe en analysant les théories mathématiques classiques qui illustre la validité de la TMP et de ses Axiomes, dont on sait que par définition des axiomes d'une théorie mathématique, on ne pourra jamais démontrer la validité (sauf à partir d'autres Axiomes dont on admet aussi la validité). On verra que la TMP a des applications importantes dans la compréhension de la physique et de toute science utilisant un cadre mathématique.

En conclusion la TMP permet d'apporter une réponse claire à la question Philosophique du Platonisme, en permettant de justifier théoriquement l'existence de tout concept mathématique classique.

D. La Théorie Aléatoire des Nombres .

J'ai appris par un ami (Arnaud Sergent) l'énoncé de la Conjecture de Goldbach : « Tout nombre pair est la somme de 2 nombres premiers », et que celle-ci n'avait jamais été démontrée. Cette Conjecture a été proposée au 18[ième] siècle par un mathématicien Allemand, Goldbach (1690-1764), et depuis lors de nombreux mathématiciens ont tenté sans succès de la démontrer. On l'appelle aussi *Conjecture faible de Goldbach*, pour la différencier de la *Conjecture forte de Goldbach* suivante :

Deux mathématiciens Anglais, Hardy et Littlewood, sans démontrer la Conjecture faible de Goldbach précédente, ont proposé une autre Conjecture beaucoup plus complète et complexe, qui est la suivante : « Si r(k) est le nombre de paires de nombres premiers dont la somme donne k, alors :

$$r(k) \approx 2C_2 \prod_{p/k, p\geq 3} \frac{p-1}{p-2} \left(\frac{k}{(Log(k))^2}\right) \qquad (6)$$

Avec :

$$C_2 = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(p_i - 1)^2}\right) \cong 0{,}66 \qquad (7)$$

Dans les expressions précédentes, p et p_i sont des nombres premiers supérieurs ou égaux à 3.
Il est évident que cette 2ième Conjecture, appelée Conjecture forte de Goldbach ou Conjecture *étendue* de Goldbach entraîne la Conjecture faible de Goldbach (pour des nombres pairs assez grands) , mais il semble évident qu'elle est beaucoup plus difficile à démontrer en supposant qu'on puisse les démontrer toutes les 2.

Cherchant à démontrer la Conjecture faible de Goldbach, j'eus un jour l'idée, prenant k=10000, de considérer l'ensemble A(10000) des paires de nombres premiers inférieurs à 10000, et l'ensemble B(10000) des paires {i,10000-i}, i étant un nombre impair inférieur à 5000. J'ai calculé alors la probabilité que A(10000) et B(10000) n'ait aucun élément en commun, ce qui est facile en utilisant la théorie des probabilités, et j'ai trouvé que cette probabilité était supérieure à $1\text{-}10^{-50}$, c'est-à-dire un zéro suivi de 50 chiffres 9 après la virgule (L'obtention de cette probabilité est exposé dans le 1^{ier} article « Théorie Aléatoire des Nombres. Partie I : Conjecture de Goldbach » exposé dans ce livre). Ceci fut comme un flash pour moi : La Conjecture faible de Goldbach ne serait-elle pas dû aux probabilités ?.

J'ai travaillé ensuite de nombreuses années, en essayant de développer cette idée : Comment obtenir certaines propositions faisant partie de la Théorie des Nombres par la Théorie des probabilités ?, et j'ai pu ainsi élaborer la Théorie Aléatoire des Nombres :

Le Principe de cette théorie est que le hasard, ou plus exactement les lois du hasard, sont à l'origine de la validité de certaines propositions en Théorie des Nombres. Cependant, les lois du hasard dans les nombres ne peuvent s'exprimer de la même façon que les Axiomes classiques de la Théorie des Nombres, et de plus elles ne peuvent pas être démontrées en utilisant la Théorie des Nombres classique. Or il semble certain, tout comme on l'a vu précédemment avec la Conjecture faible de Goldbach, que certaines propositions vraies en Théorie des Nombres sont uniquement dues aux lois du hasard dans les nombres, et dans ce cas, on ne trouvera jamais une démonstration de ces propositions utilisant seulement la Théorie des nombres classiques pour la simple raison qu'une telle démonstration n'existe pas. L'existence de telles propositions est impossible à prouver en utilisant la Théorie des nombres classiques, car pour cela, il faudrait d'abord démontrer que ces propositions sont vraies en utilisant la Théorie des nombres classiques, ce qui est impossible par hypothèse. Mais d'un point de vue de pure logique, il n'y a aucune raison pour que de telles propositions vraies, qui soient dues uniquement aux lois du hasard dans les nombres, n'existent pas.

J'ai donc découvert qu'il était nécessaire, pour exprimer les lois du hasard en Théorie des nombres, d'introduire une nouvelle logique appelée *logique*

aléatoire. Cette logique est basée sur des propositions appelées *pseudo-Axiomes aléatoires*, qui sont analogues aux Axiomes classiques, c'est-à-dire qu'ils ont un caractère d'évidence. Ce sont ces pseudo-Axiomes aléatoires qui permettent d'obtenir des modèles statistiques concernant des nombres, ainsi que des propositions classiques apparaissant comme des conséquences des lois du hasard en Théorie des nombres. Cependant, la différence fondamentale avec les Axiomes classiques est que, malgré leur caractère d'évidence, les modèles statistiques qu'ils permettent d'obtenir ne sont pas toujours valides.

Si une proposition classique est obtenue par cette logique aléatoire, elle est définie dans la Théorie Aléatoire des Nombres (T.A.N) que j'ai exposée plus loin comme ayant une *explication aléatoire*, c'est-à-dire donc une justification théorique basée sur les lois du hasard dans les nombres. Une telle explication aléatoire d'une proposition classique n'est intéressante que si on ne connaît pas de démonstration classique à cette proposition (ni à sa négation), une démonstration classique étant définie comme une démonstration utilisant seulement la Théorie des nombres classique, et pour que cette explication aléatoire soit intéressante, il est aussi préférable que certains tests illustrent sa validité. En effet la Théorie Aléatoire des Nombres n'est intéressante que pour donner des justifications théoriques à des propositions qui ont les lois du hasard pour unique origine, ce qui n'est pas le cas si elles ont une démonstration classique. C'est donc seulement pour des propositions qui n'ont jamais été démontrées classiquement (ni leur négation) et qui de plus sont illustrées par des tests qu'il est intéressant de trouver une explication aléatoire en utilisant la T.A.N.

Or c'est exactement le cas de la Conjecture faible de Goldbach, qui n'a jamais été démontrée classiquement malgré 2 siècles de tentatives infructueuses par de nombreux mathématiciens, et qui est pourtant illustrée par de nombreux tests : On a vérifié sa validité pour des nombres très élevés à l'aide d'ordinateurs. Ainsi, dans le 1^{ier} article, je montre que la Conjecture faible de Goldbach a une explication aléatoire (C'est-à-dire on l'a vu une justification théorique basée sur les lois du hasard dans les nombres), extrêmement simple, utilisant les pseudo-Axiomes aléatoires introduits dans ce 1^{ier} article. Dans le 2nd article, je développe la T.A.N , et je montre qu'elle peut s'appliquer, c'est-à-dire qu'elle permet de trouver une explication aléatoire, à de nombreuses propositions très simples concernant les décimales de certains irrationnels, ces propositions n'ayant jamais été démontrées classiquement (ni leur négation) et étant illustrées par de nombreux tests. Là encore, ces explications aléatoires sont très simples.

Je montre aussi dans le 2nd article que la T.A.N permet d'obtenir une justification aléatoire pour la Conjecture étendue de Goldbach, semblable à celle proposée par Hardy et Littlewood qu'on a rappelée au début de cette section. Cette explication aléatoire est, comme il fallait s'y attendre, nettement plus compliquée

que celle de la Conjecture faible de Goldbach exposée dans le 1ier article. Elle utilise notamment l'algèbre modulaire, mais je démontre dans ce 2ième article l'intégralité des théorèmes d'algèbre modulaire utilisés pour obtenir l'explication aléatoire de la Conjecture étendue de Goldbach. En réalité, la proposition finale dont j'obtiens une explication aléatoire diffère de celle proposée par Hardy et Littlewood d'un facteur 2, et donc je l'appellerai dans ce qui suit *variante de la Conjecture étendue de Goldbach*. L'explication aléatoire présentée de la variante de la Conjecture étendue de Goldbach apparaît donc comme un très grand succès de la T.A.N, d'une part parce que cette variante est d'une expression complexe et n'a jamais été démontrée classiquement, mais aussi parce qu'elle est obtenue en utilisant seulement des pseudo-Axiomes aléatoires très simples exposés dans la T.A.N. On remarque qu'il existe des tests illustrant la validité de la variante de la Conjecture étendue de Goldbach : En effet, on a réalisé par ordinateur des graphes représentant les couples (k,r(k)), avec k naturel pair et r(k) le nombre de paires de nombres premiers dont la somme donne k. On obtient que ce graphe a l'aspect d'une comète et est appelé pour cela Comète de Goldbach. Dans le 2nd article, je montre que ce graphe illustre de façon remarquable la variante de la Conjecture étendue de Goldbach dont j'ai donné une explication aléatoire : En effet la variante de la Conjecture étendue de Goldbach donne l'équation des bandes observées sur la Comète de Goldbach, ainsi que les proportions et les répartitions de points (k,r(k)) sur ces bandes.

Enfin, je montre aussi que la T.A.N permet aussi d'obtenir une explication aléatoire pour une Conjecture très célèbre appelée Conjecture des nombres premiers jumeaux. Comme la Conjecture de Goldbach, elle n'a jamais été démontrée classiquement et existe sous une forme faible ou forte : On appelle couple de nombres premiers jumeaux un couple de naturels (i,i+2), telle que i et i+2 sont premiers. La Conjecture faible des nombres premiers jumeaux est : « Il existe une infinité de couples de nombres premiers jumeaux ». Elle n'a donc jamais été démontrée classiquement. Si on utilise la T.A.N, on peut montrer facilement qu'elle a une explication aléatoire mais celle-ci est moins intéressante que celle de la Conjecture faible de Goldbach car contrairement à celle-ci, il n'y a pas de tests qui permettraient de l'illustrer. Cependant, Hardy et Littlewood ont proposé la Conjecture forte des nombres premiers jumeaux qui est la suivante :

« Si g(k) est le nombre de couples de nombres premiers jumeaux (i, i+2), avec i inférieur à k, alors :

$$g(k) \approx 2C_2 \frac{k}{(Log(k))^2} \qquad (8)$$

avec toujours :

$$C_2 = \prod_{i=1}^{\infty}(1-\frac{1}{(p_i-1)^2}) \cong 0{,}66 \qquad (9)$$

On a montré dans le 2ième article de la T.A.N que cette Conjecture forte des nombres premiers jumeaux avait elle aussi une explication aléatoire, celle-ci est donc également très intéressante puisqu'on n'a jamais montré classiquement ne serait-ce que la Conjecture faible des nombres premiers jumeaux. De plus utilisant un ordinateur, il est possible de voir si elle est illustrée par des tests ou non. Les 2 conditions sont donc réunies pour que cette explication aléatoire soit intéressante.

D'après la T.A.N, on s'apperçoit que les lois du hasard semblent avoir une importance fondamentale en Théorie des nombres. Ces lois du hasard sont introduites par ce qu'on a appelé les pseudo-Axiomes aléatoires de la T.A.N. Ceux-ci permettent d'obtenir entièrement les modèles statistiques qui peuvent être à l'origine d'une proposition ayant une explication aléatoire. Et donc de ce fait cette explication aléatoire, justification théorique basée sur les lois du hasard, permet de comprendre que le hasard peut être à l'origine de la validité de la proposition, de la même façon que pour une justification théorique qui est une démonstration classique. De plus, elle permet de comprendre pourquoi cette proposition ayant une explication aléatoire n'a pas de démonstration classique : C'est le cas si son origine est uniquement basée sur les lois du hasard, puisqu'on a vu qu'on ne pouvait pas démonter les lois du hasard en utilisant la Théorie des nombres classiques. Il apparaît que la T.A.N permet de donner des justifications théoriques basées sur le hasard à de très nombreuses propositions, parmi lesquelles certaines sont considérées comme les plus intéressantes, et qui n'ont pas de justification théorique classique. Toutes ces explications aléatoires restent fondamentales tant qu'on n'a pas trouvé de démonstrations classiques à ces propositions, et on a vu qu'il est très possible qu'on n'en trouvera jamais pour la bonne raison qu'elles n'existent pas.

La T.A.N apparaît donc comme étant une branche nouvelle et fondamentale en Théorie des nombres.

Une idée largement admise est que Hardy et Littlewood ont trouvé la Conjecture forte de Goldbach (Equation (6)), en utilisant des probabilités. Ceci semble totalement erroné : Ils ont publié pour la 1^{ière} fois cette Conjecture dans un article de la revue Acta mathematicae de 1923, en utilisant la théorie des nombres classiques, sans utiliser nulle part des probabilités. En fait, je n'ai jamais trouvé d'article donnant une justification intuitive de la Conjecture forte de Goldbach basée sur des probabilités. Même si un tel article existe, en donnant une justification intuitive de cette Conjecture basée sur des probabilités, il est important de noter que la T.A.N permet avec son formalisme d'en donner une justification théorique, et non seulement une justification intuitive.

III.LES THEORIES D’OR

Dans ce qui suit, j’expose les 4 théories présentées dans la section précédente. La plupart des théorèmes ou des lois obtenus par d’autres théories et utilisés dans ces articles sont rappelés explicitement. Concernant la 1^{ière} théorie, c'est-à-dire la Théorie (moderne) de l’Ether, les 6 articles contiennent des versions réactualisées et en Français des 5 articles exposés dans la revue Physics Essays. Ils apparaissent comme étant réellement modifiés et profondément améliorés par rapport à leur version Anglaise. En effet d’une part je me suis rendu compte après coup de certaines inexactitudes théoriques notament en astrophysique, ou de la présence de points nécessitant d’être développés et clarifiés, et de plus j’avais des difficultés à exprimer en Anglais des idées qui étaient assez complexes. J’ai cependant gardé les mêmes sections, et j’ai laissé inchangé les numéros d’équations de ces articles que je conservais. J’ai aussi ajouté un « X » aux numéros des équations qui étaient nouvelles ou modifiées par rapport à celles des versions Anglaises. Cependant les idées principales de la Théorie de l’Ether sont exposées dans les versions Anglaises, mais donc parfois de façon incomplète, pas assez claire ou partiellement inexacte.

Les 4 théories exposées dans cet ouvrage sont indépendantes et donc chacune d’elle peut être lue isolément.

1^{ière} THEORIE D'OR :

THEORIE MODERNE DE L'ETHER.

Auteur :Thierry DELORT
Date : Mars 2020

TABLE DES MATIERES.

Article :THEORIE MODERNE DE L'ETHER
Auteur :Thierry Delort
Date : Juin 2015
1ier article (Théorie de l'Ether)
Extrait du livre : Théories d'or, 9e édition, Editions Books on Demand, Paris (2015)

Résumé :
Cet article présente la Théorie de l'Ether (T.E) . Tout en étant fondamentalement différente de la Relativité Restreinte, cette théorie interprète toutes les expériences classiques liées à la Relativité Restreinte, mais également certaines expériences de physique quantique contredisant la relativité (sur l'intrication quantique), celles prouvant l'existence d'une masse pour les neutrinos ainsi que certaines observations cosmologiques inexpliquées (par exemple donnant l'origine de la masse noire). Elle donne aussi une interprétation de la validité mathématique de la Relativité Restreinte.
On voit dans cet article que de la même façon que la Relativité Restreinte, la Théorie de l'Ether est fondée sur un très simple Principe fondamental, différent mais analogue au Principe fondamental de la Relativité Restreinte.
La fluidité de l'Espace et du temps, l'existence d'un Espace absolu particulier (l'Ether), la contraction des longueurs et du temps, apparaissent comme des conséquences du Principe fondamental et apportent une conception totalement nouvelle de l'Univers.

Mots clés : Ether, transformations de Lorentz, relativité, temps absolu, longueurs absolues.

1.INTRODUCTION

Le problème que nous allons essayer de résoudre est le suivant : Un Ether existe-t-il ? C'est-à-dire existe-t-il parmi tous les Référentiels Galiléens (Référentiels se déplaçant à vitesse constante et avec des axes demeurant parallèles, appelés aussi « Référentiels inertiels » en Relativité) un Référentiel absolu, qu'on peut considérer comme étant au repos avec une vitesse nulle ?
Si un tel Référentiel existe mais que la Relativité d'Einstein est vraie, alors ce Référentiel est complètement indiscernable et n'est pas intéressant. Ainsi, nous allons voir s'il est possible de donner une théorie dans laquelle un tel Référentiel discernable existe. Ceci impliquerait que la Relativité Restreinte (R.R) est fausse. Cependant, il serait nécessaire dans cette théorie de justifier les millions de cas

pour lesquels la Relativité Restreinte donne des prédictions expérimentales correctes.
Nous avons exposé dans cet article une telle Théorie de Ether. On peut se demander l'intérêt d'une telle théorie puisque la Relativité Restreinte donne une prévision correcte dans toutes les expériences en laboratoires réalisées à ce jour.
Elle présente différents points d'intérêt :
1.Elle permet d'obtenir l'existence d'un Référentiel absolu au repos, c'est-à-dire l'Ether.
2.Elle est compatible avec la transmission instantanée d'informations à distance dans les expériences sur l'intrication quantique et avec l'existence d'une masse pour les neutrinos.
3.Elle permet l'interprétation d'observations en Cosmologie comme par exemple la masse noire ou l'âge de l'Univers de façon nouvelle ou beaucoup plus intéressante que leur interprétation par la R.R lorsque celle-ci existe.
4. Elle modifie complètement notre conception de l'Univers en ce qui concerne l'espace et le temps et aussi l'astrophysique. Par exemple :
-Le temps et l'Espace peuvent être considérés comme des fluides.
-Les Référentiels Galiléens ne sont pas équivalents.
-Des temps et des longueurs absolues existent.
-L'Univers est comme un ballon qui gonfle. Il est limité et fini.
5. Elle montre qu'une théorie de formulation aussi simple mathématiquement que la Relativité Restreinte, fondamentalement différente de celle-ci puisque d'une part dans la Théorie de l'Ether on verra que les lois physiques ne sont pas les mêmes dans tous les Référentiels Galiléens et que de plus les transformations entre les Référentiels Galiléens ne sont pas celles de Lorentz, est en accord avec la totalité des expériences réalisées liées à la R.R.
6. La Théorie de l'Ether (T.E) donne une justification mécanique (contractions du temps et des longueurs) aux transformations entre les Référentiels Galiléens, qui ne sont pas les transformations de Lorentz mais permettent de justifier l'utilisation de celles-ci dans les prédictions expérimentales. On peut donc considérer que la T.E donne une justification mécanique à la validité mathématique de la Relativité Restreinte.

Ce point est très important car on pourrait considérer que les Postulats de la T.E compliquent inutilement les phénomènes expliqués par la R.R. Or ils permettent au contraire de comprendre la validité mathématique de la R.R dans les cas où on l'utilise comme conséquence de ces Postulats.
Ceci est à rapprocher d'une phrase d'un grand physicien contemporain d'Einstein, Eddington, qui disait « La Relativité est la théorie mathématique de l'Univers. Ce n'est pas la théorie de la substance ». On verra donc que cette phrase peut être

considérée comme prémonitoire, car elle peut s'appliquer à la Théorie moderne de l'Ether que nous allons exposer.

Il est aussi remarquable de constater que ces Postulats permettent d'obtenir une Cosmologie totalement nouvelle, totalement différente de la Cosmologie basée sur la Relativité, en particulier par les équations mathématiques utilisées. Ces Postulats de la T.E sont donc indispensables à l'interprétation de la Cosmologie par la T.E, qui se révèle être mathématiquement beaucoup plus simple que l'interprétation de la Cosmologie par la Relativité.

De plus, ces Postulats sont simples et naturels et sont fondamentaux dans l'élaboration d' une Théorie moderne de l'Ether.

2.PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA THEORIE DE L'ETHER

Ce Principe fondamental est le suivant. Il contient 2 points :

2.1 PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA THEORIE DE L'ETHER :

a).Il existe un Référentiel fixe absolu, appelé « Ether », non équivalent à tous les Référentiels Galiléens (C'est-à-dire discernable).

b)Les lois dans cet Ether sont telles qu'elles tendent à empêcher un observateur au repos dans un Référentiel Galiléen de détecter son mouvement par rapport à l'Ether.

On remarque que ce Principe correspond au Principe fondamental de la Relativité Restreinte. D'après la Théorie de l'Ether, l'expression des lois physiques dans les Référentiels Galiléens doit cependant être proche des lois admises dans la Relativité Restreinte sinon un observateur immobile dans un Référentiel Galiléen pourrait facilement détecter son mouvement par rapport à l'Ether ce qui contredirait le point b) du Principe 2.1.

Ainsi une conséquence du point b) du Principe 2.1 est que dans la T.E les équations de la Relativité Restreinte doivent demeurer valides dans de très nombreux cas de la même façon que la Théorie de Newton demeurait valide dans de très nombreux cas avec une très bonne approximation dans la R.R.

Ainsi à cause du Principe 2.1b), le Principe de Relativité Restreinte doit demeurer vrai avec une bonne approximation.

On remarque que d'après la Principe 2.1a), il existe une infinité de Référentiels fixes absolus, puisque tout Référentiel au repos par rapport à un Référentiel fixe absolu est un Référentiel fixe absolu. On remarque aussi qu'une conséquence du Principe 2.1a) est que des longueurs et des intervalles de temps absolus existent, s'ils sont mesurés dans l'Ether.

Nous allons proposer dans cet article 4 Postulats, apparaissant comme la conséquence du Principe fondamental.

3.POSTULATS-TRANSFORMATIONS ENTRE REFERENTIELS ABSOLUS ET GALILEENS.

Les Postulats de la T.E apparaissent comme des conséquences naturelles et nécessaires du Principe fondamental :
Le Postulat 1 exprime que les lois exprimées dans l'Ether (Référentiel fixe absolu) doivent être les lois qui dans la R.R sont valides dans tout Référentiel Galiléen.
Le Postulat 2 exprime la condition nécessaire de contractions des temps et des longueurs.
Les Postulats 3A et 3B concernent les photons et l'électromagnétisme dans les Référentiels Galiléens. Ils permettent d'obtenir que les phénomènes d'émission de photons, d'optique ou d'électromagnétisme ne peuvent pas permettre de détecter le mouvement de la terre par rapport à l'Ether.
Ces Postulats 1,2,3 sont valides dans la Théorie de l'Ether seulement en l'absence de gravitation ou si on néglige ses effets sur l'espace et le temps.
Dans un article ultérieur, « Théorie de l'Ether avec Gravitation », on donnera des Postulats 4,5,6 permettant l'interprétation par la T.E des phénomènes liés à la Relativité Générale. On verra qu'ils généralisent la notion d'espace absolu, et apparaissent aussi comme la conséquence du Principe fondamental. On verra aussi comment les Postulats 1,2,3 sont modifiés en présence de gravitation.

Nous donnerons aussi dans cette section les transformations fondamentales dans la Théorie de l'Ether entre l'Ether et un Référentiel Galiléen, et comment on peut obtenir un Référentiel de Lorentz à partir d'un Référentiel Galiléen.

Postulat 1 (Existence d'un Ether)

a)Un Référentiel fixe absolu, espace Euclidien, appelé Ether, existe.

b)Les lois physiques dans l'Ether ont la même expression que les lois physiques dans les Référentiels Galiléens dans la Relativité Restreinte (appelés aussi Référentiels inertiels).

En particulier on a comme conséquence du Postulat 1 la validité dans l'Ether des lois mécaniques classiques d'expression :

$$\sum \mathbf{F} = m\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)$$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \qquad (1)$$

On a aussi d'après comme conséquence du Postulat 1 la validité dans l'Ether des équations de Maxwell ainsi que la constance de la vitesse de la lumière et des photons. Le fait que cette vitesse soit constante peut aussi être considérée comme la conséquence des équations de Maxwell et du fait qu'on peut considérer les photons comme des particules de masse (inerte) nulle et d'énergie non nulle.

On a aussi comme conséquence du Postulat 1 que l'énergie absolue d'un photon (C'est-à-dire mesurée dans l'Ether) est $E=h\nu_A$, ν_A étant la fréquence absolue du photon (mesurée dans l'Ether). L'impulsion absolue d'un photon est alors $\mathbf{p}=h\nu_A/c\ \mathbf{u}$, $\mathbf{u}$ étant le vecteur unitaire de l'Espace absolu indiquant la direction du photon.

On a aussi comme conséquence du Postulat 1 la conservation de l'impulsion et de l'énergie dans l'Ether.

On rappelle que les équations de Maxwell ont été découvertes avant la Relativité lorsqu'on croyait en l'existence d'un Ether, de même que la masse de mouvement $m'=m(1-v^2/c^2)^{1/2}$ de laquelle on peut obtenir les équations précédentes (1). La conservation de l'énergie et de l'impulsion était aussi admise dans l'ancienne Théorie de l'Ether précédant la Relativité.

Postulat 2 (Contraction des temps et des longueurs) :

a)Dans l'Ether, considéré comme un Espace Euclidien, les distances sont mesurées par des règles identiques virtuelles, appelées règles standards. On utilise des règles standards virtuelles pour mesurer les distances dans des Référentiels Galiléens.
Un objet animé d'une vitesse v par rapport à l'Ether se contracte dans la direction du mouvement d'un facteur égal à $C(v)=(1-v^2/c^2)^{1/2}$.

Ainsi, si on a une règle standard de longueur l_0 mesurée dans l'Ether lorsqu'elle est au repos, si on la déplace parallèlement à elle-même à la vitesse v, sa longueur mesurée dans l'Ether par une règle standard immobile dans l'Ether devient l_m avec :

$$l_m = l_0 \sqrt{1 - v^2 / c^2} \qquad (2X)$$

b)Le temps est associé à un *fluide temporel* traversant les objets. On dira donc que le temps *s'écoule* sur les objets. Une horloge mesure le temps s'étant écoulé sur elle, et ce temps est proportionnel à la quantité de fluide temporel l'ayant traversée. Dans l'Ether, le temps est mesuré virtuellement par des horloges identiques synchrones immobiles situées en tout point de l'espace. On appelle *temps absolu* ce temps.

On appellera *horloge standard* une horloge identique aux horloges mesurant le temps dans l'Ether. On utilisera de telles horloges virtuelles pour mesurer le temps dans des espaces Galiléens. De plus le temps s'écoulant pour un objet, entre 2 évènements coïncidant avec l'objet, est l'intervalle de temps entre ces 2 évènements mesuré par une horloge standard (virtuelle) coïncidant avec lui. On l'appelle classiquement *temps propre* de l'objet (entre ces 2 évènements).

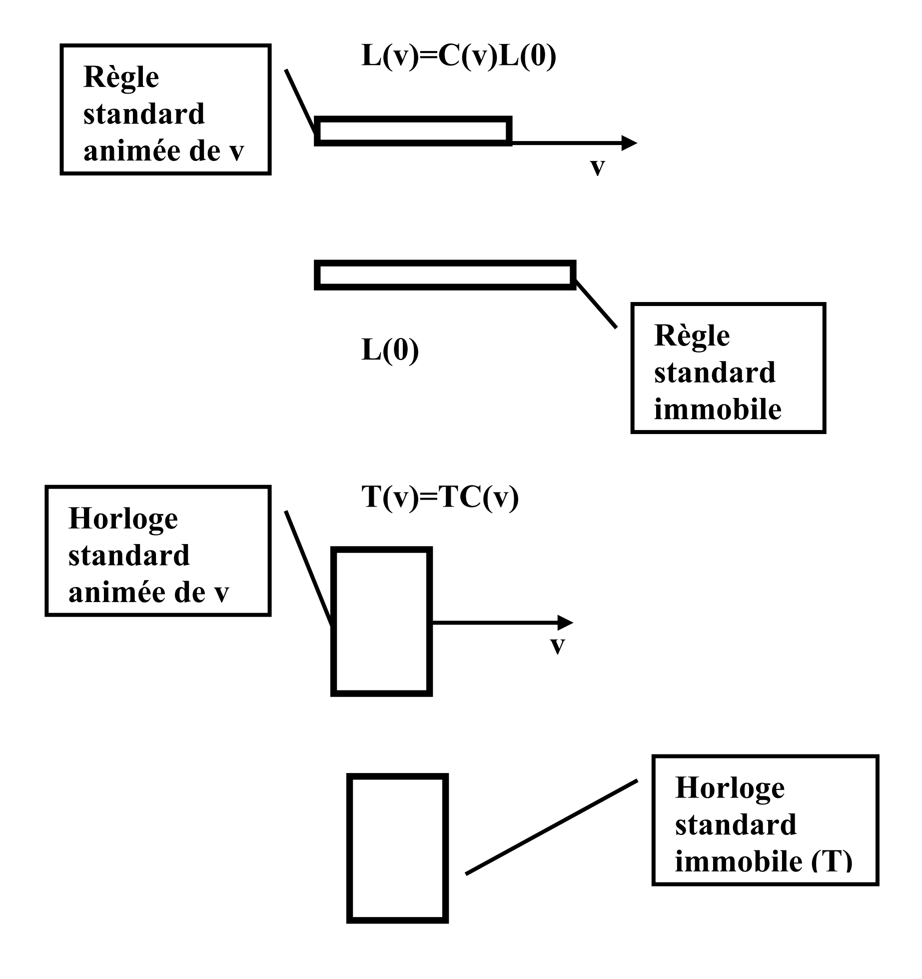


Figure 1 : Contraction des temps et longueurs dans l'Ether.

Le phénomène de contraction du temps est le suivant : Si un objet est animé d'une vitesse v dans l'Ether entre 2 points fixes de l'Ether A et B, le temps s'écoulant sur lui (c'est-à-dire mesuré par une horloge standard coïncidant avec lui) est réduit d'un facteur $C(v)=(1-v^2/c^2)^{1/2}$ par rapport au temps absolu, c'est-à-dire mesuré par les horloges fixes de l'Ether.

Ainsi si par exemple on déplace à la vitesse v par rapport à l'Ether une horloge standard H_m entre 2 points fixes de l'Ether A et B, si t_m est le temps s'étant écoulé sur H_m entre A et B (et donc t_m est la différence des temps indiqués par H_m en B et en A) et si t_0 est le temps mesuré par les horloges fixes de l'Ether entre le départ de H_m de A et son arrivée en B (Et donc t_0 est la différence des temps indiqués par l'horloge fixe en A et celle fixe en B), on a :

$$t_m = t_0 \sqrt{1 - v^2 / c^2} \qquad (3)$$

c)La simultanéité d'évènements est définie par la simultanéité dans l'Ether.

On peut donner une justification de l'égalité des contractions spatiales et temporelles par les élements suivants :
-On modélise l'Ether comme un Espace-temps Euclidien, le temps et les longueurs dans cet Espace-temps étant mesurés par des horloges standards virtuelles et des règles standards virtuelles immobiles dans l'Ether.
-On suppose qu'on a la contraction spatiale C(v) définie dans le Postulat 2a.
-On rappelle que le temps s'écoulant pour une horloge standard est proportionnel à la quantité de fluide temporel l'ayant traversée.
-On suppose de plus que le fluide temporel s'écoule de façon uniforme dans l'Ether, c'est-à-dire qu'entre 2 instants T1 et T2 (de l'Espace absolu), la quantité de fluide ayant traversé un objet est proportionnelle au volume absolu de cet objet, c'est-à-dire à son volume mesuré dans l'Ether.

Si on déplace une horloge standard H à une vitesse v dans l'Ether, les particules lourdes la composant (noyaux) sont soumis à une contraction C(v) dans le sens du mouvement, donc leur volume se contracte d'un facteur C(v) et la quantité de fluide les traversant est réduite du même facteur C(v) par rapport au fluide temporel traversant une horloge immobile. De ce fait si on suppose que le temps que H mesure est proportionnel à la quantité de fluide ayant traversé les

particules lourdes qui la composent, le temps mesuré par H est réduit du même facteur et on a l'égalité des contractions spatiales et temporelles.
Plus généralement, on peut remplacer H par une particule élémentaire P quelconque (électron, proton..), et supposer que le temps s'écoulant pour P est proportionnel à la quantité de fluide temporel l'ayant traversée. Procédant comme dans le cas de l'horloge H, on arrive aussi à l'égalité des contractions spatiales et temporelles pour la particule.
Nous généraliserons l'interprétation précédente dans le cas de la Théorie de l'Ether avec Gravitation.
Même si elle se révèlait inexacte, l'interprétation précédente demeurerait intéressante, donnant une illustration du concept de fluide temporel qui est fondamental dans la Théorie de l'Ether car il permet de justifier théoriquement et de comprendre la contraction temporelle.

Si H_A est une horloge standard fixe en un point A(X,Y,Z) d' un espace absolu R, on peut utiliser le Postulat 1 pour faire en sorte que H_A indique le temps de R. Ainsi, si H_0 est une horloge standard placée à l'origine O de R et indiquant le temps de R en O, on émet un photon au temps T_0 indiqué par H_0 vers le point A, et H_A doit être réglée pour que le photon l'atteigne au temps T_0+OA/c^2.
Si on a une horloge standard H_A coïncidant avec H_0, et si à partir du temps T_0 indiqué par H_0 on déplace H_A jusqu'au point A avec une vitesse v constante mesurée dans l'Ether, on sait d'après le Postulat 2b qu'elle indiquera le temps $T_P=T(1-v^2/c^2)^{1/2}$ lorsqu'elle arrivera en A, T étant le temps absolu. Connaissant v ou si v négligeable, on peut donc aussi par cette méthode faire en sorte que H_A indique en A le temps absolu.

On remarque que la contraction des longueurs avait été proposée par Lorentz et Fitzgerald avant la R.R, elle permettait notamment d'interpréter l'expérience de Michelson. Le concept de fluidité du temps et la contraction du temps sont des phénomènes propres à la théorie moderne de l'Ether. On rappelle que le fait que le facteur C(v) est le même dans la contraction des longueurs et celle du temps peut être interprété de la façon suivante : Lorsqu'un objet est en mouvement il se contracte dans le sens de sa longueur de C(v). Donc son volume se contracte aussi d'un facteur C(v) et donc, si on modélise le temps comme un fluide, on peut considérer que à cause de la contraction de son volume, la quantité de fluide s'écoulant sur l'objet est réduite du même facteur, et donc on obtient alors la même valeur C(v) du facteur de la contraction temporelle. Un tel raisonnement sera généralisé dans la Théorie de l'Ether avec Gravitation.

De même l'énergie d'une particule animée d'une vitesse v dans l'Ether $E=\gamma mc^2$ peut aussi être interprétée comme une énergie de contraction.

D'après le Postulat 2c), la simultanéité dans l'Ether définit la simultanéité absolue, et l'Ether définit aussi le temps absolu. C'est-à-dire que si un objet de masse m ou un photon nepeuvent se déplacer à une vitesse absolue supérieure à c, une information elle peut se transmettre à une vitesse supérieure à c. De plus si 2 évènements Ev1 et Ev2 se produisent aux temps absolus t_1 et t_2, alors Ev1 peut être la cause de Ev2 si $t_1<t_2$. Et donc la Théorie de l'Ether, contrairement à la Théorie de la Relativité est en accord avec les expériences sur l'intrication quantique [(6)] et avec toute expérience ou une information se transmet plus vite que la lumière. C'est peut être de telles expériences qui feront apparaître la validité de la Théorie de l'Ether.

TRANSFORMATIONS ETHER-GALILEEN.

On définit un Référentiel Galiléen R' comme un Espace-temps Euclidien se déplaçant à une vitesse absolue constante par rapport à un Espace fixe absolu R, dont les axes demeurent respectivement parallèles à ceux de R, et tel que la simultanéité dans R' soit équivalente à la simultanéité dans R, c'est-à-dire à la simultanéité absolue. Le temps et les longueurs mesurés dans R' doivent l'être par des règles standards et des horloges standards virtuelles (c'est-à-dire identiques à celles utilisées pour mesurer les temps et longueurs dans R) au repos dans R' (Et donc animés de la vitesse absolue v).
Si R' est un Référentiel Galiléen d'origine O' tel que (O'X') coïncide avec (OX) et que à T=T'=0, on a O et O' coïncident, on obtient alors les transformations entre R et R' :

$$X' = \frac{X - vT}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

$$Y' = Y$$

$$Z' = Z$$

$$T' = T\sqrt{1 - v^2 / c^2} \qquad (5)$$

On voit dans les transformations précédentes que la simultanéité dans R' est équivalente à la simultanéité dans R.
La première transformation entre X et X' est la conséquence de la contraction des longueurs exprimée dans le Postulat 2a.
Puisque la simultanéité dans R' est équivalente à la simultanéité dans R, on doit avoir à T=0 (temps indiqué par toutes les horloges standards indiquant le temps de R), toutes les horloges standards qui indiquent le temps de R' doivent indiquer

T’=0. Mais par hypothèse, ces horloges sont animées de la vitesse absolue v, et donc d’après le Postulat 2b de la contraction temporelle, leur temps est ensuite celui indiqué par la transformation entre T et T’ dans les transformations précédentes. On a appelé les Référentiels R’ définis plus haut *Référentiels Galiléens* car la simultanéité de 2 évènements est indépendante du Référentiel Galiléen dans lesquels on les mesure, ce qui était le cas dans les Référentiels conçus par Galilée. Cependant on devrait les appeler *Référentiels néoGaliléens* car contrairement aux Référentiels conçus par Galilée les intervalles de temps entre 2 évènements dépendent des Référentiels R’ dans lesquels on les mesure.

J’ai obtenu les transformations précédentes comme conséquences naturelles du Postulat 2. J’ai appris par la suite que des transformations identiques avaient déjà été proposées par Tangherlini.

On peut montrer facilement, utilisant ce qui suit, les obtenir par un changement de variable temporelle très simple à partir des transformations de Lorentz. Ainsi, si on suppose vraie la Relativité Restreinte, R_{I1} et R_{I2} étant 2 Référentiels inertiels quelconques, c'est-à-dire qu’on passe de R_{I1} à R_{I2} par les transformations de Lorentz, par un décalage très simple des horloges de R_{I2} on peut obtenir un Référentiel $R_{I2'}$ tel qu’on passe de R_{I1} à R_{I2}’ par les transformations de Tangherlini précédentes.

De même on verra qu’on peut obtenir les transformations de Lorentz à partir de ces transformations, et que celles-ci jouent un role primordial dans la Théorie moderne de l’Ether. Cependant, puisqu’on peut obtenir ces transformations dans les 2 théories, elles ne caractérisent pas ni ne permettent de différencier ces 2 théories. Ce sont les bases théoriques de ces 2 théories, et leur interprétation de ces différentes transformations qui permettent de les différencier.

Si $H_{A'}$ est une horloge standard placée en un point fixe A’(X’,Y’,Z’) de R’, on peut faire en sorte qu’elle indique le temps de R’ : Si T_A est le temps indiqué par l’horloge fixe de R, H_A coïncidant avec $H_{A'}$, on règle H_A’ pour qu’elle indique $T_A' = T_A(1-v^2/c^2)^{1/2}$. On peut régler ainsi $H_{A'}$ à n’importe quel instant où elle coïncide avec une horloge fixe H_A indiquant le temps de R.
On sait alors d’après le Postulat 2b) que $H_{A'}$ indiquera alors toujours le temps de R’.

On peut aussi utiliser le Référentiel de Lorentz R’’associé à R’ que l’on va définir dans lequel la vitesse de la lumière est égale à c. On peut faire en sorte qu’une horloge standard indique le temps de R’’ de la même façon que pour faire en sorte qu’elle indique le temps de R.

Postulat 3A (photons) :

a) On modélise un photon par 2 points matériels se déplaçant à la vitesse absolue c. Si un photon atteint un point fixe A' d'un Référentiel Galiléen R', la période T' du photon mesurée dans R' est le temps séparant l'arrivée en A' des 2 points matériels constituant le photon (Ce temps peut donc être mesuré par toute horloge standard coïncidant avec A'). La fréquence du photon mesurée dans R' est alors ν'=1/T'. La longueur d'onde du photon dans R' est la distance entre les 2 points matériels constituant le photon mesurée dans R'.
On aurait pu donner une modélisation équivalente considérant qu'un photon est constitué de N_0 points matériels successifs se déplaçant à la vitesse c avec $N_0>1$).
La longueur d'onde absolue du photon est alors la distance absolue entre 2 points matériels successifs.

b) Si une particule au repos dans l'Ether émet un photon par un processus (une désintégration ou une désexcitation) de période T_0, alors une particule en mouvement émettra par un processus identique un photon de période T_0 mesurée par une horloge coïncidant avec la particule en mouvement.

D'après b), lorsque la particule est en mouvement, si T_P est le temps propre pour la particule entre l'émission des 2 points matériels constituant le photon, $T_P=T_0$.

REFERENTIEL DE LORENTZ ASSOCIE A UN REFERENTIEL GALILEEN :

Supposons qu'on ait un Référentiel Galiléen R', telle que les transformations entre R' et un Référentiel absolu R soient celles données dans l'équation (5).
Si on retarde toute horloge virtuelle de R' située en un point de coordonnée X' de vX'/c^2, alors conservant les mêmes coordonnées spatiales de R', on obtient un Référentiel R'' telle que si (X',Y',Z',T') est un évènement de R', alors cet évènement est (X'',Y'',Z'',T'') dans R'' avec :

$$X'' = X' = \frac{X - vT}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Y''=Y'=Y

Z''=Z'=Z

$$T'' = T' - vX'/c^2 = \frac{T - vX/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad (6)$$

On voit que les transformations entre l'Espace fixe absolu R et R'' sont exactement les transformations de Lorentz. R'' apparaît donc comme étant un Référentiel de Lorentz naturellement associé à R'.

Utilisant le Référentiel de Lorentz précédent, on peut définir les champs électromagnétiques dans un Référentiel Galiléen R' dans le Postulat suivant :

Postulat 3B :

a) Si R' est un Référentiel Galiléen et R'' est le Référentiel de Lorentz associé à R' défini précédemment, on définit dans R'' un champ électrostatique E''(X'',Y'',Z'',T'') et un champ magnétique B''(X'',Y'',Z'',T'') utilisant dans R'' les équations de Maxwell.
(Ceci est la conséquence du fait qu'on a admis dans le Postulat 1 que les équations de Maxwell étaient vraies dans R, et qu'on passe de R à R'' par les transformations de Lorentz).

b) On obtient alors en tout point fixe (X',Y',Z',T') du Référentiel R' un champ magnétique B'(X',Y',Z',T') et un champ électrostatique E'(X',Y',Z',T') définis par :

$$E'(X',Y',Z',T')=E''(X',Y',Z',T'-vX'/c^2)$$

$$B'(X',Y',Z',T')=E''(X',Y',Z',T'-vX'/c^2). \qquad (7)$$

4. RESULTATS

Nous allons exposer comment la Théorie de l'Ether justifie la validité de l'utilisation des équations de la Relativité Restreinte dans tous les cas où elle est vérifiée expérimentalement.
Ceci est fondamental car on peut ainsi établir qu'une Théorie de l'Ether fondamentalement différente dans ses bases de la Relativité Restreinte (dans son Principe fondamental et dans ses Postulats) permet d'interpréter toutes les expériences qu'on croyait jusqu'à présent en contradiction avec l'existence d'un Ether, et qu'elle donne une justification physique à la validité mathématique de la Relativité Restreinte dans les cas où on utilise ses équations.
Les équations de la Relativité Restreinte (et son Principe) sont cependant contredites par les expériences de physique quantique montrant des interactions instantanées à distance (intrication quantique) (6) , alors que celles-ci sont en accord

avec la Théorie de l'Ether pour laquelle les interactions instantanées à distance sont possibles.

4.1Théorèmes fondamentaux sur l'utilisation des équations de la R.R.

Nous allons établir des théorèmes montrant que la Théorie de l'Ether justifie l'utilisation de la Relativité Restreinte dans des millions de cas, par exemple:

-Pour prévoir les trajectoires des particules.
-Pour obtenir (expérimentalement) la vitesse de la lumière dans des Référentiels Galiléens.
-Pour obtenir le temps propre d'un objet (mesuré par une horloge standard coïncidant avec lui).
-Pour montrer que les expériences classiques d'optique et d'électromagnétisme ne peuvent révéler la vitesse de la terre par rapport à l'Ether.

Dans ce qui suit, R,R' et R'' sont les Référentiels définis précédemment, R est un Référentiel absolu, R' un Référentiel Galiléen et R'' est le Référentiel de Lorentz associé à R'. Les transformations entre ces Référentiels sont celles données plus haut.

4.1.1.Trajectoires.

Montrons que la T.E entraîne que la R.R peut être utilisée pour calculer la trajectoire d'une particule dans un Référentiel Galiléen.
Si P est une particule, on sait qu'on peut obtenir la trajectoire et la vitesse de P en tout point en appliquant les équations de Maxwell et les équations de la mécanique relativiste à P dans le Référentiel absolu R. Ceci est une conséquence du Postulat 1. Or on sait qu'on passe de R à R'' par les transformations de Lorentz, et donc de par les propriétés mathématiques des Référentiels de Lorentz utilisées en R.R, on sait que ceci est équivalent à appliquer les équations de Maxwell et les équations de la mécanique relativiste à P dans R''.
On a donc le Théorème 4.1.1A :

THEOREME 4.1.1A :

Si P est une particule, on peut calculer sa vitesse et sa trajectoire en tout point dans R'' en appliquant les équations de Maxwell et les équations de la mécanique Relativiste à P dans R''.

De plus on sait que les coordonnées spatiales de R' et de R'' sont identiques (X'=X'',Y'=Y'',Z'=Z''). Il en résulte qu'une conséquence immédiate du Théorème précédent est le Théorème 4.1.1B:

THEOREME 4.1.1B :

Si P est une particule, la trajectoire de P dans le Référentiel R' est identique à celle calculée dans R''.

On voit donc que les théorèmes précédents sont fondamentaux malgré leur simplicité.

Par exemple si on a 2 particules A et B dans le Référentiel Galiléen R' qui lors d'une collision produisent une particule C et une particule D, on peut obtenir les trajectoires de C et D en utilisant la conservation de l'impulsion et de l'énergie dans R'', c'est-à-dire en écrivant :
$\mathbf{P}_A''+\mathbf{P}_B''=\mathbf{P}_C''+\mathbf{P}_D''$ et $E_A''+E_B''=E_C''+E_D''$.
Il en est de même si une particule A se désintègre au repos dans R' en produisant un photon et une particule B.

4.1.2 Vitesse de la lumière.

A cause de la transformation entre R' et R'', on obtient immédiatement le Lemme fondamental 4.1.2.A :

LEMME 4.1.2.A :

Si P est un point fixe de R' (et donc P est aussi fixe dans R'') et que 2 évènements E_A et E_B se produisent en P à T_A' et T_B' mesuré dans R' correspondant à T_A'' et T_B'' mesurés dans R'', alors on a :
$T_B''-T_A''=T_B'-T_A'$

Montrons en utilisant le Lemme précédent que la vitesse de la lumière est égale à c si on la mesure sur un aller retour en un point fixe d'un Référentiel Galiléen. Ceci entraîne le résultat de l'expérience de Michelson, mais est un résultat plus général.
P_1 et P_2 étant 2 points fixes de R', connaissant la distance P_1P_2, à T_1' un photon part de P_1, il arrive à T_2'à P_2, et un miroir en P_2 renvoie le photon vers P_1 qu'il atteint à T_3'.

Puisqu'on sait que la vitesse du photon est égale à c dans R, et qu'on passe de R à R'' par les transformations de Lorentz, une propriété mathématique des Référentiels de Lorentz entraîne que la vitesse du photon est égale à c dans R''.
P_1 et P_2 étant fixes dans R', ils sont fixes dans R'', et si T_1'',T_2'',T_3'' sont les temps de R'' correspondant à T_1',T_2',T_3', on a donc, la vitesse du photon étant égale à c dans R'' :

$T_3''-T_1''=2||P_1P_2||_{R''}/c$

Avec $||P_1P_2||_{R''}$ distance entre P_1 et P_2 mesurée dans R''.
Mais d'après les transformations entre R' et R'', cette distance est aussi celle mesurée dans R' et de plus d'après le Lemme 4.1.2.A T3''-T1''=T3'-T1' et donc :

$T_3'-T_1'=2||P_1P_2||_{R'}/c$

La vitesse moyenne de la lumière mesurée dans R' pour cette expérience est donc égale à c.

4.1.3 Calcul du temps propre.

Supposons qu'un objet O se déplace d'un point A à un point B.
A cause du Postulat 2b), on peut calculer le temps propre T_P de O pour le déplacement de A en B (c'est-à-dire mesuré par une horloge standard coïncidant avec lui) dans R de la même façon qu'en R.R on calcule le temps propre d'un objet dans un Référentiel inertiel.
En effet dans la R.R si on déplace dans un Référentiel inertiel R_R une horloge d'un point A à un point B à une vitesse v, le temps propre T_P de l'horloge pour le déplacement est¨ :
$T_P=T_{AB}(1-v^2/c^2)^{1/2}$, T_{AB} étant le temps de déplacement mesuré dans R_R. On est donc exactement dans le cas du Postulat 2b) pour une horloge se déplaçant dans R.

De plus puisqu'on passe de R à R'' par les transformations de Lorentz on peut calculer le temps propre du déplacement de A en B dans R'' de la même façon qu'en R.R dans un Référentiel inertiel. Ceci est une propriété mathématique des Référentiels de Lorentz utilisée en Relativité.
En particulier si O se déplace de A en B avec une vitesse v'' mesurée dans R'', le temps propre de O pour le déplacement est $T_P=T_{AB}''(1-v''^2/c^2)^{1/2}$, T_{AB} étant le temps du déplacement mesuré dans R''.

On a donc le Théorème fondamental 4.1.3A suivant :

THEOREME 4.1.3A :

O étant un objet se déplaçant d'un point A à un point B on peut calculer son temps propre T_P pour le déplacement dans R'' ou dans R avec la même équation que celle utilisée en Relativité dans les Référentiels de Lorentz.

4.1.4 Electromagnétisme et optique.

En utilisant le Postulat 3B, on voit que les expériences classiques d'électromagnétisme et d'optique ne peuvent révéler le mouvement de la terre par rapport à l'Ether.
En effet dans certaines expériences, on mesure des différences de phases en des points fixes. De la même façon que le Lemme 4.1.2A, on obtient qu'on peut calculer ces différences de phase aussi bien dans R' que dans R''. Dans des expériences d'optique, on détermine la trajectoire de rayons lumineux. De la même façon que le Théorème 4.1.1B, on obtient que dans R' ces trajectoires sont identiques à celles calculées dans R'' en appliquant les équations de Maxwell.
De plus, en utilisant que les coordonnées spatiales de R' et de R'' sont identiques, on obtient que pour un élément chargé au repos dans R' (et donc dans R''), ρ'=ρ'', car le volume d'un objet au repos dans R' est égal à son volume dans R''.
On obtient aussi que pour un élément chargé mobile dans R', **j**' et **j**'' étant définis avec les notations usuelles par **j**'=ρ'**v**' et **j**''=ρ''**v**'', on obtient **j**'=**j**''.
(Pour obtenir ceci, on montre qu'on peut exprimer **j**' et **j**'' sous la forme usuelle:

$$\mathbf{j}' = \rho_0 \frac{d\mathbf{M}'}{dt_p} \quad \text{et} \quad \mathbf{j}'' = \rho_0 \frac{d\mathbf{M}''}{dt_p}$$

On utilise alors d**M**'=d**M**''.
Ceci ne représente pas de difficultés particulières et sera fait explicitement dans l'article « Suite de la Théorie de l'Ether »).
Une conséquence de ceci est que si on a un circuit électrique, I'=I'', I' et I'' étant les intensités mesurées dans R' et dans R''.

4.2 Exemples d'applications de la Théorie de l'Ether.

4.2.1 Effet Doppler.

Montrons qu'on obtient dans la Théorie de l'Ether un Effet Doppler identique à celui trouvé dans la Relativité.

Pour étudier l'Effet Doppler, R et R' étant définis comme précédemment, (R absolu, R' Galiléen), on accélère des ions dans R' en utilisant un accélérateur de particules et, ces ions émettant des photons, on mesure la période (ou, de façon équivalente, la fréquence) de ces photons en un point fixe A de R'.

Considérons d'abord le cas où R et R' coïncident, c'est-à-dire R' est animé d'une vitesse nulle par rapport à R. A est donc un point fixe de R.
On avait obtenu dans l'ancienne théorie de l'Ether, c'est-à-dire celle précédant la R.R et donc sans contraction spatiale ni temporelle, que la relation entre la période T_{AX} du photon mesuré en un point fixe de l'Ether et T_0 période du photon émis par une particule au repos dans l'Ether (mesurée dans l'Ether) était :

$$T_{AX}=(1-(V/c)\cos(\theta))T_0 \qquad (8X)$$

Avec V vitesse des ions dans l'Ether, θ angle de la vitesse des ions avec la droite SA, S étant le point d'où est émis le photon.
Dans la Théorie moderne de l'Ether, d'après le Postulat 3A, si T_P est le temps propre de l'ion entre l'émission des 2 points constituant le photon, on a $T_P=T_0$.
De plus d'après le Postulat 2b, si T est le temps mesuré dans l'Ether correspondant à T_P, on a : $T_P=T(1-V^2/c^2)^{1/2}$.
Et donc :

$$T=\frac{T_0}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \qquad (9X)$$

On voit donc que pour cette expérience, la seule différence entre la Théorie moderne de l'Ether et l'ancienne Théorie de l'Ether est que le temps mesuré dans l'Ether entre l'émission des 2 points matériels diffère d'un facteur $C(V)=(1-V^2/c^2)^{1/2}$.
Il en résulte qu'on obtient, dans la Théorie moderne de l'Ether, la période mesurée au point A en remplaçant T_0 par $T_0/C(V)$ dans l'équation donnant T_{AX} .
On obtient donc :

$$T_A=T_0\frac{(1-(V/c)\cos(\theta))}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \qquad (10X)$$

Cette relation est donc identique à celle obtenue dans tous les Référentiels inertiels dans la R.R.

Considérons maintenant le cas où R' ne coïncide pas avec R, c'est-à-dire que R' est animé d'une vitesse non nulle v par rapport à R.

On sait d'après le Théorème 4.1.1A qu'on obtient la vitesse V'' dans R'' d'une particule ionique P en appliquant les équations de Maxwell et les équations de la mécanique relativiste à P dans R''.
De plus d'après le Postulat 3A, si T_P est le temps propre pour l'ion entre l'émission des 2 points matériels constituant le photon $T_P=T_0$.
Mais d'après le Théorème 4.1.3A sur le temps propre, $T_P=(1-V''^2/c^2)^{1/2}$ T'', où T'' est le temps mesuré dans R'' correspondant à T_P.
De plus, on a vu que la vitesse du photon dans R'' était égale à c.
En résumé, on a dans R'' :
-La vitesse V''des ions est obtenue en appliquant les équations de Maxwell et les équations de la mécanique classique.
-T'' étant le temps mesuré dans R'' entre l'émission des 2 points matériels, on a : $T''=T_0/(1-V''^2/c^2)^{1/2}$.
-Le photon se déplace à la vitesse c.
Les équations concernant le photon dans R'' sont donc exactement les mêmes qu'elles étaient dans R, dans le cas où R' coïncidait avec R, et on a donc de la même façon, T_A'' étant la période du photon mesurée en A:

$$T_A'' = T_0 \frac{(1-(V''/c)\cos(\theta))}{\sqrt{1-V''^2/c^2}} \qquad (11X)$$

θ étant l'angle mesuré dans R'' entre la direction de **V**'' avec la droite (SA), S étant le point d'émission du photon.
D'après le Lemme 4.1.2A, si T_A' est la mesure au point fixe A de la période du photon dans R', on a $T_A'=T_A''$.
On voit donc que la prédiction de l'Effet Doppler, Transversal ou longitudinal est la même dans la Théorie moderne de l'Ether que dans la R.R.

On rappelle que l'effet Doppler Transversal, qui seul diffère de la prédiction de l'Ancienne Théorie de l'Ether pour laquelle on a vu qu'on avait l'Effet Doppler longitudinal, a été vérifié pour la première fois par Ives et Stilwell. (Voir les Références).

4.2.2 Expériences sur le Paradoxe EPR.

Einstein avait proposé une expérience supposée montrer l'invalidité de la théorie quantique connue sous le nom de « Paradoxe EPR ». Cette expérience consistait à produire 2 photons corrélés, selon la théorie quantique ils devaient interagir à distance, c'est-à-dire que la mesure de l'un influait sur le résultat de la

mesure du second, ceci impliquant selon la théorie quantique la transmission d'une information instantanée à distance, et donc contredisait la théorie de la Relativité selon laquelle une information ne peut être tansmise à une vitesse supérieure à celle de la lumière. Or un physicien Français, Alain ASPECT, a pu réaliser cette expérience. Mais contrairement à la prédiction d'Einstein, c'est la théorie quantique qu'elle a confirmée et la théorie de la Relativité qu'elle a contredite. Or la Théorie de l'Ether est compatible comme on l'a vu, avec des interactions instantanées à distance et donc avec la transmission d'informations à une vitesse supérieure à celle de la lumière.

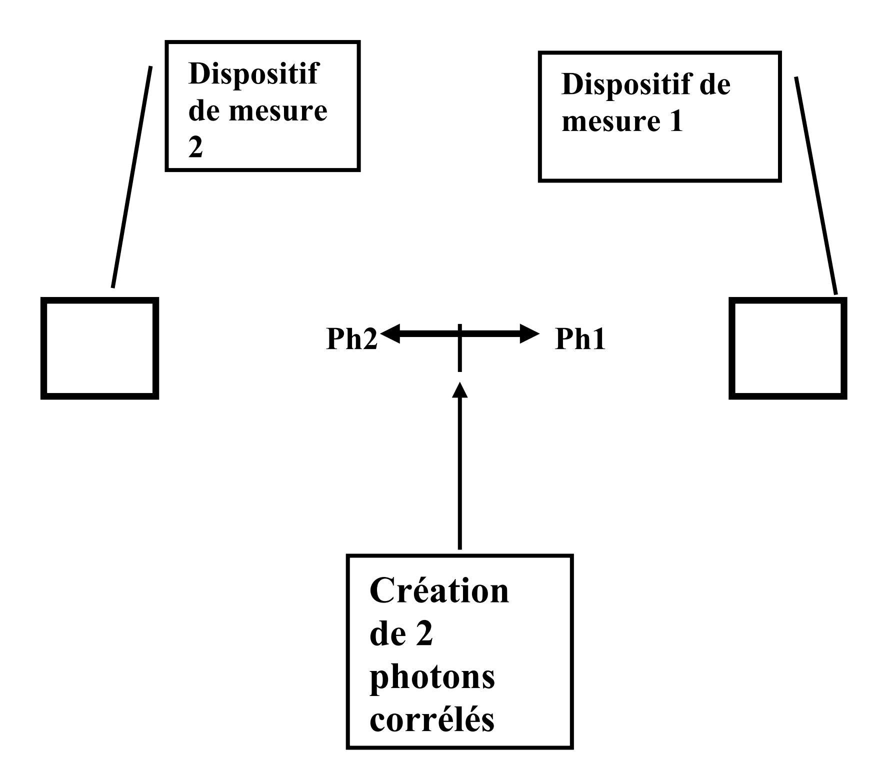


Figure 2 : Paradoxe EPR.

Et donc, contrairement à la Relativité, la Théorie de l'Ether est compatible avec la Théorie quantique. De nombreuses expériences ont confirmé le résultat obtenu par Alain ASPECT.

4.2.3 La masse des neutrinos.

En 2015, Takaaki KAJITA et Arthur McDONALD ont reçu le prix NOBEL pour avoir montré que le neutrino avait une masse. Et ceci invalide le Modèle Standard. En effet d'après le Modèle Standard les neutrinos on tous une hélicité négative (on dit qu'ils sont left-handed en Anglais), et ce dans tous les Référentiels inertiels. Or si les neutrinos ont une masse, il existe obligatoirement des Référentiels inertiels dans lesquels ils ont une hélicité positive (On dit qu'alors ils sont right-handed en Anglais). Or dans la Théorie moderne de l'Ether, puisque contrairement à la Relativité Restreinte cette théorie n'admet pas que tous le Référentiels inertiels sont équivalents, on peut admettre que les neutrinos ont obligatoirement une hélicité gauche dans le Référentiel Absolu appelé « Ether ». Puisqu'on verra que le Référentiel inertiel lié à la terre R_T est animé d'une vitesse $v_T \ll c$ et que de plus les neutrinos sont animés d'une vitesse proche de c, les neutrinos ont alors forcément une hélicité négative mesurée dans le Référentiel R_T. Alors avec cette modification, on garde les prédictions théoriques du Modèle Standard. Et donc la Théorie moderne de l'Ether permet de modifier le Modèle Standard pour que le modèle modifié soit compatible avec l'existence d'une masse pour les neutrinos tout en conservant les prédictions théoriques du Modèle Standard dans notre Référentiel R_T.

Les lois du Modèle Standard sont valides dans les Référentiels inertiels dans lesquels les neutrinos ont une hélicité négative mais pas dans les Référentiels inertiels dans lesquels ils ont une hélicité positive. Et ceci contredit la Relativité Restreinte selon laquelle les lois physiques ont la même expression dans tous les Référentiels inertiels. On rappelle que les Référentiels inertiels de la Relativité Restreinte correspondent aux Référentiels de Lorentz R'' associés aux Référentiels Galiléens R' de la Théorie moderne de l'Ether.

5.CONCLUSION

Nous avons donc exposé les bases théoriques de la Théorie (moderne) de l'Ether correspondant à la Relativité Restreinte. On a vu qu'en ayant des bases fondamentalement différentes de la R.R, notamment à cause d'un Espace absolu mais aussi parce que la vitesse de la lumière n'est pas la même dans tous les Référentiels Galiléens, de même que les lois de la physique, la Théorie moderne de

l'Ether permet d'interpréter avec succès toutes les expériences classiques jusqu'ici interprétées seulement par la R.R. Dans les articles suivants on exposera d'autres expériences classiques interprétées par la Théorie moderne de l'Ether, notamment les expériences de physique des particules, l'expérience de Fizeau et aussi les expériences réalisées avec des horloges atomiques dans des avions supersoniques. Pour cela on utilisera des méthodes analogues à celles utilisées dans cet article, utilisant les théorèmes fondamentaux ainsi que le Référentiel de Lorentz R'' associé au Référentiel Galiléen R'.

Il est clair que toute Théorie de l'Ether valide doit être capable de justifier la validité de l'utilisation de la R.R des expériences classiques liées à cette théorie, et utilisant les méthodes de cet article, il semble que la prédiction mathématique des 2 théories soient identiques pour l'ensemble des expériences en laboratoire liées à la R.R. Et donc la Théorie de l'Ether apparaît présentement comme la seule alternative à la R.R qui admette l'existence d'un Espace absolu non équivalent à tous les Référentiels Galiléens. On remarque que les Postulats de la Théorie de l'Ether présentés dans cet article sont simples et apparaissent comme la conséquence naturelle du Principe Fondamental de la Théorie de l'Ether. Les Théorèmes fondamentaux obtenus sont des conséquences de ces Postulats, et la Théorie moderne de l'Ether apparaît comme on l'a annoncé en Introduction comme une théorie donnant une justification physique à la validité de l'utilisation des équations mathématiques de la R.R pour prédire le résultat des expériences classiques de Relativité. Eddington disait « La théorie de la Relativité est la théorie mathématique de l'Univers, ce n'est pas la théorie de la substance ». La théorie moderne de l'Ether apparaît donc comme la théorie de la substance pressentie par Eddington.

On a vu aussi que la Théorie moderne de l'Ether était compatible avec les interactions instantanées à distance ce qui n'était pas le cas de la R.R. Or des expériences en laboratoire en Physique Quantique (intrication quantique), notamment celles réalisées par A.Aspect [(6)], semblent en accord avec ces interactions instantanées à distance. On a vu aussi que la Théorie moderne de l'Ether était compatible avec l'existence d'une masse pour les neutrinos, qui contredisait la Relativité Restreinte. On verra aussi que la Théorie de l'Ether est en accord avec l'existence d'un Référentiel inertiel local très particulier en Cosmologie, qui est le Référentiel de Repos du CMB (Cosmic Microwave Background), seul Référentiel local dans lequel le CMB est quasi isotrope, alors que d'après la Relativité Retreinte il n'existe aucun Référentiel inertiel particulier. D'après la Théorie moderne de l'Ether, ce Référentiel particulier local est identique à l'Ether (Référentiel absolu) local. L'existence de ce Référentiel particulier, est donc aussi un élément en faveur de la Théorie de l'Ether. Il sera d'ailleurs identifié

à l'Ether, Référentiel fixe absolu. Une étude du role de ce Référentiel en Cosmologie est proposée dans l'article [7].

Nous verrons aussi dans les articles « Théorie de l'Ether avec Gravitation » et « Suite de la Théorie de l'Ether », comment la Théorie de l'Ether présentée dans cet article peut être généralisée pour interpréter d'une façon nouvelle la Physique liée à la Relativité Générale.

Références :

1.M.Born, *Einstein's Theory of Relativity* ,(Dover Publications, New-York, 1965).
2. J.Foster and J.P Nightingale, *A short Course in General Relativity* (Springer, New-York,1994)
3.A.P French, *Einstein :le livre du centenaire* (Editions Hier et Demain, Paris, France 1979)
4.J ;Ph. Perez and N.Saint-Cricq Chery, *Relativité et quantification* (Masson, Paris, 1986).
5.T.Delort,Theory of Ether, Physics Essays 13,4 (2000).
6.A.Aspect,P.Grangier,G.Roger,Experimental realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm-Gedanken experiment: A new violation of Bell's inequalities, Phys.Rev.letter (1982)

Article:APPLICATIONS DE LA THEORIE DE L'ETHER
Auteur:Thierry Delort
Date:Juin 2015
Publication :Théories d'or, 9ième édition, Editions Books on Demand, Paris (2015).
2ième article (Théorie moderne de l'Ether)

Remarque importante:

Cet article correspond à un article publié dans la revue Physics Essays en 2004 dans lequel nous présentions une nouvelle Cosmologie basée sur l'Ether. Nous avons supprimé cette nouvelle Cosmologie car elle était contredite par certaines observations. Cependant, dans le 4ième article de la Théorie de l'Ether de ce livre, « Ether, matière sombre et énergie sombre de l'Univers », nous présentons une deuxième Cosmologie basée sur l'Ether. Cette 2ième Cosmologie contient des points communs non seulement avec la 1ière Cosmologie basée sur l'Ether, mais aussi avec le modèle standard de la Cosmologie (admis actuellement par la communauté scientifique).

1.INTRODUCTION:

Dans la dernière partie de cet article « 3.Cinématique », nous complèterons l'article précédent en obtenant d'après la T.E la vitesse de la lumière dans les Référentiels Galiléens, une expérience célèbre liée à la contraction temporelle, et l'interprétation de la physique des particules par la T.E.

3.CINEMATIQUE

3.1. Horloges tournant autour de la terre.

On suppose que la terre est au repos dans un Référentiel Galiléen R', animé d'une vitesse v par rapport à un Référentiel absolu R.
Une horloge (standard) H_1 décrit un cercle C dans R' (de P_A point fixe de R' à P_B point fixe de R') animée d'une vitesse V_1' constante par rapport à R'. On cherche à calculer le rapport entre le temps propre T_{P1} mesuré par H_1 et celui T_{P2} mesuré par une horloge identique H_2 faisant aussi un trajet de P_A à P_B mais à la vitesse V_2'.

On suppose qu'on passe de R à R' par les transformations classiques (Equation (5), Théorie de l'Ether [7]), et que R'' est le Référentiel de Lorentz associé à R (défini dans le même article [7]).
R'' a des coordonnées spatiales identiques à celles de R', et donc H_1 décrit dans R'' un cercle identique à celui décrit dans R'.
De plus, supposant seulement que V_1'<<c (ce qui est évident puisqu'on utilise un avion pour transporter l'horloge H_1), on obtient utilisant les transformations entre R' et R'' que la vitesse de H_1 dans R'' est V_1'', avec V_1''≈V_1'.

Or d'après un Théorème (Théorème 4.13A établi dans le 1ier article, Théorie de l'Ether [7]) on sait qu'on peut calculer le temps propre de H_1 selon l'équation classique utilisée dans la R.R ans R''. Si T_1'' est le temps mesuré dans R'' du déplacement de H_1, on obtient donc :

$$T_{P1} = T_1"\sqrt{1 - V_1^2"/c^2} \qquad (45AX)$$

Et de même :

$$T_{P2} = T_1"\sqrt{1 - V_2^2"/c^2} \qquad (45BX).$$

Et utilisant que V_1''≈V_1', on obtient donc l'équation (45CX).

$$\frac{T_{p1}}{T_{p2}} \approx \frac{\sqrt{1 - V_1^2'/c^2}}{\sqrt{1 - V_2^2'/c^2}} \qquad (45CX)$$

Une telle expérience a été réalisée avec des horloges atomiques à bord de supersoniques, et a donné le résultat escompté. Cependant la prédiction de ce résultat nécessite aussi d'utiliser la Relativité générale, mais on verra dans un article suivant « Théorie de l'Ether avec Gravitation » que la Théorie de l'Ether prédit aussi approximativement le même effet que la Relativité générale concernant l'influence de la gravitation sur le temps propre indiqué par l'horloge.

3.2 **Vitesse de la lumière.**

Nous allons maintenant obtenir l'expression de la vitesse de la lumière dans un Référentiel Galiléen R'. On a vu que cette vitesse était à priori différente de la vitesse de la lumière, ce qui sera confirmé.

On suppose donc que R est un Référentiel absolu, et que les transformations entre R et R' sont les transformations classiques :

$$X'=\frac{X-vT}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad Y'=Y, Z'=Z$$

$$T'=T\sqrt{1-v^2/c^2} \qquad (46)$$

On suppose qu'on émet un photon de O' dans la direction θ par rapport à la droite (O'X') dans le plan (O'X'Y'). On veut obtenir la vitesse **V**', de coordonnées (V_X',V_Y') dans le plan (O'X'Y').

On sait que la vitesse de la lumière est V=c dans le Référentiel absolu R. Soit V_X et V_Y les coordonnées de la vitesse **V** du photon dans (OXY). (Puisqu'on émet le photon dans la Plan (OXY), celui-ci se propageant en ligne droite demeure dans ce plan).

On propose 2 méthodes pour obtenir cette vitesse. La 2ième méthode est la plus simple.

1^{ière} méthode :

On obtient :

$$\frac{V'_Y}{V'_X}=tg\theta \qquad (47)$$

$$V_X^2+V_Y^2=c^2 \qquad (48)$$

Des transformations (46), on obtient:

$$V_X'=\frac{V_X-v}{1-v^2/c^2}$$

$$V_Y'=\frac{V_Y}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad (49)$$

Donc d'après l'équation (48) :

$$[(1-v^2/c^2)V'_X+v]^2+V'^2_X\, tg^2\theta(1-v^2/c^2)=c^2 \qquad (50)$$

$$[(1-v^2/c^2)^2 + tg^2\theta(1-v^2/c^2)]V'^2_X + 2v(1-v^2/c^2)V'_X + v^2 - c^2 = 0$$
(51)

Ceci est une équation du second degrés avec:

$$\Delta' = \frac{c^2}{Cos^2\theta}(1-v^2/c^2)^2 \qquad (52)$$

Donc:

$$V'_X = \frac{[-v(1-v^2/c^2) + (c/\cos\theta)(1-v^2/c^2)]}{[(1-v^2/c^2) + tg^2\theta(1-v^2/c^2)]} \qquad (53)$$

$$V'_X = \frac{-v + c/\cos\theta}{1 - v^2/c^2 + tg^2\theta} \qquad (54)$$

$$V'_X = \frac{\cos\theta(c - v\cos\theta)}{1 - v^2\cos^2\theta/c^2} = \frac{c\cos\theta}{1+(v\cos\theta)/c} \qquad (55)$$

Et:

$$V'_Y = V'_X\, tg\theta = \frac{c\sin\theta}{1+(v\cos\theta)/c} \qquad (56)$$

Donc:

$$V' = \frac{c}{1+(v\cos\theta)/c} \qquad (57)$$

De cette expression, on retrouve un Théorème établi dans l'article précédent que mesurée sur un aller-retour dans R', la vitesse d'un photon était égale à c.

2ième méthode :
On aurait pu obtenir beaucoup plus simplement les équations (55) et (56) donnant V_X' et V_Y' en introduisant le Référentiel de Lorentz R'' associé à R'. Puisque les

coordonnées spatiales de R’ et de R’’ sont identiques, l’angle θ du photon mesuré dans R’’ est identique à celui mesuré dans R’. De plus, on sait d’après les propriétés des Référentiels de Lorentz que sa vitesse mesurée dans R’’ est égale à c. Utilisant ensuite les transformations des vitesses entre R’ et R’’, on retrouve les équations (55) et (56).

3.3 **Référentiels accélérés.**

On voit que la Théorie moderne de l’Ether justifie l’existence de Référentiels Galiléens, qui sont des Référentiels très particuliers par rapport à l’Espace fixe absolu. Une telle justification de l’existence des Référentiels Galiléens n’existe pas dans la R.R. Les Référentiels non-Galiléens sont de nature très différente que les Référentiels Galiléens d’après la Théorie de l’Ether, puisqu’ ils ne sont pas animés d’une vitesse constante par rapport à l’Ether. Et il est clair qu’on n’a pas la même sensation dans un Référentiel non Galiléen (accéléré), par exemple dans une voiture qui accélère, freine ou tourne, que dans un Référentiel Galiléen. Au contraire d’après la Relativité Générale, les Référentiels inertiels acélérés étaient équivalents aux autres Référentiels inertiels. Cette distinction fondamentale entre les Référentiels accélérés et les Référentiels Galiléens par la Théorie de l’Ether est donc en accord avec l’observation.

Cependant considérons par exemple un ascenceur en chute libre. Soit R_{as} le Référentiel lié à l’ascenceur. Un objet de masse m dans cet ascenceur est soumis à la force gravitationnelle $\mathbf{F}_G=m\mathbf{G}$ et à la force d’inertie $\mathbf{F}_I=-m\mathbf{G}$. Et donc la somme des forces gravitationnelle et d’inertie s’exerçant sur cet objet est nulle et l’objet se comporte dans R_{as} de la même façon que dans un Référentiel Galiléen en abscence de gravitation. Et on n’a pas besoin de faire intervenir la Relativité Générale pour obtenir ce résultat.

3.4 **Physique des particules.**

D’après le Postulat 1 de la Théorie de l’Ether, les équations définissant la désintégration ou la diffusion de particules ont la même expression dans l’Ether que dans les Référentiels de Lorentz en Relativité.
Supposons qu’on ait un Référentiel Galiléen R’, et un Référentiel absolu R, les transformations entre R et R’ étant les transformations classiques (0b). Soit R’’ le Référentiel de Lorentz associé à R.
On rappelle qu’on on a obtenu le Théorème 4.1.1A de l’article précédent (T.Delort, Théorie de l’Ether, Mai 2010), exprimant qu’on pouvait calculer la vitesse et les trajectoires d’une particule dans R’’ en appliquant les équations de Maxwell et les équations de la mécanique relativiste classique dans R’’. De la même façon il est

équivalent d'appliquer les équations de la physique des particules dans R (concernant la diffusion ou la désintégration de particules) que de les appliquer dans R'', ceci étant une propriété mathématique des Référentiels de Lorentz.
De plus on a vu que les trajectoires des particules sont identiques dans R'' et dans R', et que, le temps mesuré en un point fixe de R' entre 2 évènements (par une horloge standard) était identique à celui mesuré dans R''. Donc si on mesure N particules arrivant par seconde dans R'' en 1 point fixe P de R'' (ou sur un élément de surface fixe de R'' mesuré par dS'' dans R''), on mesurera le même nombre N par seconde dans R' au même point fixe P de R' (ou sur l'élément de surface qui est mesuré par dS''=dS' dans R'). Enfin, il est évident qu'on peut considérer que la nature d'une particule est indépendante du Référentiel où on la détecte.
Il en résulte que d'après la Théorie de l'Ether, on peut utiliser les mêmes équations que dans la R.R pour prévoir les résultats d'expériences de diffusion et de désintégration de particules.

References

1. Max Born,Einstein's Theory of Relativity (Dover Publication New-York 1965)
2. J.Foster, J.P Nightingale, A short course in General Relativity (Springer-Verlag,New-York 1994)
3. A.French,Einstein, Le livre du centenaire (Hier et Demain, France,1979)
4. J.Ph Perez, N.Saint-Cricq Chery, Relativité et Quantification (Masson Paris 1986)
5. J.Levy, Relativité et substratum Cosmique (Lavoisier, France1996)
6. T.Delort , Theory of Ether, Phys.Essays 13,573 (Dec 2000)
7. T.Delort, Théories d'or 8ième édition, Books on Demand, Paris (2015)).
8.T.Delort, Applications of Theory of Ether,Phys Essays 17,4 (2004)

Article :COMPLEMENTS DE LA THEORIE DE L'ETHER
Auteur :Thierry DELORT
Date :Juin 2015
Extrait du livre : Théories d'or 9ième édition, Editions Books on Demand, Paris (2015).
3ième article (Théorie de l'Ether)

Résumé :. Nous présentons dans la dernière partie certains éléments cinématiques de la T.E, en particulier l'interprétation de l'expérience de Fizeau.

1. Interprétation de l'expérience de Fizeau. Optique géométrique.

Nous allons maintenant donner une interprétation de l'expérience de Fizeau par la T.E. On suppose qu'on est dans un Référentiel Galiléen R_T' (lié à la terre), associé à un Référentiel de Lorentz R_T''. On considère 2 tubes parallèles dans lesquels l'eau circule dans 2 directions opposées. Dans le premier tube, la vitesse de l'eau (par rapport à R') est **V'**, et elle est –**V'** dans le second tube. **V'** correspond à la vitesse **V''** mesurée dans R_T'' On considère alors 2 rayons lumineux traversant les 2 tubes, constitués d'onde lumineuse sans différence de phase initiale, et on mesure le décalage de leur phase après leur passage dans les tubes.

Pour interpréter ce décalage, on doit interpréter l'indice de réfraction dans la T.E. D'après le Postulat 1 exposé dans l'article [(6)] Théorie de l'Ether, si un milieu d'indice de réfraction n est au repos dans l'espace absolu E_A, alors la vitesse absolue de la lumière V_L dans ce milieu est telle que $n=c/V_L$.

Considérant que ceci est aussi une conséquence des équations de Maxwell, et puisqu'on a vu que celles-ci étaient valides dans tout Référentiel de Lorentz R'' associé à un Référentiel Galiléen R', on admet dans la T.E que si un milieu d'indice de réfraction n est au repos dans un Référentiel Galiléen R', alors si V_L'' est la vitesse de la lumière mesurée dans le Référentiel de Lorentz R'' associé à R', on a la relation:

$$n=c/V_L'' \qquad (74)$$

On remarque que l'expression précédente est en accord avec le cas où le milieu est le vide, car alors n=1 et on a vu que la vitesse de la lumière dans R'' était égale à c.

Pour obtenir alors le décalage des phases dans l'expérience de Fizeau, on considère les Référentiels de Lorentz R_T''(**V**'') e R_T''(-**V**'') animés respectivement des vitesses **V**'' et –**V**'' par rapport au Référentiel de Lorentz R_T'', dans lesquels l'eau est immobile et donc par rapport auxquels dans la T.E comme dans la R.R la vitesse de la lumière dans l'eau est $V_{L0}=c/n_0$ (n_0 indice de réfraction de l'eau), et on obtient donc la vitesse des rayons lumineux dans R_T''.

Et donc on obtient que dans R_T'', le décalage final des phases est exactement le même que celui calculé dans la R.R. Or ce décalage étant calculé dans un point fixe de R_T'', on a vu dans l'article [(6)] Théorie de l'Ether qu'on obtenait le même décalage en le mesurant dans R_T'au même point fixe. Il en résulte donc que la prédiction théorique de la T.E concernant l'expérience de Fizeau est identique à celle de la R.R.

On obtient facilement que la vitesse V' (en norme) de l'eau mesurée dans R_T' est approximativement égale à la vitesse V'' de l'eau mesurée dans R_T'', car on a V'<<c. Pour cela, on utilise les transformations entre R_T' et R_T'' données dans le premier article [(6)], et on obtient les relations entre les coordonnées de V' et celles de V''.

Concernant les lois de l'optique géométrique, de même d'après le Postulat 1 on admet qu'elles sont vraies pour des corps immobiles dans l'Ether. Considérant la loi classique sin(i)=nsin(r), on sait qu'on l'obtient par les équations de Maxwell, et donc celles-ci étant vraies dans un Référentiel de Lorentz R'' associé à un Référentiel Galiléen R', la relation précédente est donc vraie pour des milieux immobiles dans R''. Puisque de plus R' et R'' on les mêmes coordonnées spatiales, elles sont donc vraies dans tout Référentiel Galiléen R'. De la même façon, on obtient que les lois de l'optique géométrique sont vraies dans tout Référentiel Galiléen R'.

References

1. Max Born, *Einstein's Theory of Relativity* (Dover publication New'York 1965)
2. J.Foster, J.P Nightingale, *A short course in General Relativity* (Springer-Verlag, New-York 1994)
3. A.French, Einstein, *Le livre du centenaire* (Hier et Demain, France ,1979)
4. J.Ph Perez, N. Saint-Cricq Chery, *Relativité et Quantification*(Masson Paris 1986)

5. T.Delort, Theory of Ether, Phys.Essays, 13,573 (Dec 2000)
6. T.Delort, Théorie de l'Ether, (Janvier 2011) (version en Français réactualisée de (5) Extrait du livre *Théories d'or 8[ième] édition*, Books on Demand , Paris (2015)).
7. T.Delort, Applications of Theory of Ether,Phys.Essays, 17 (Sept 2004)
8. Thierry Delort, *Théories d'or 8[ième] édition* , Books on Demand, Paris (2015)).
9. Perlmutter et al,Discovery of a supernova Explosion at half the age of the Universe, Nature 391, 51-54 (1998)
10. D.J Raine and E.G Thomas, *An introduction to the science of Cosmology* (IoP 2001)
11. M.Lachieze-Rey, *Initiation à la Cosmologie*, Dunod, Paris 2000.

Titre :THEORIE DE LA MATIERE SOMBRE ET DE L' ENERGIE SOMBRE (version 2)

Auteur:Thierry DELORT
INRIA-SACLAYS
Date:18 Juin 2018
Email :tdelort@yahoo.fr

Résumé:

Dans cet article, on propose un nouveau modèle de matière sombre. D'après ce nouveau modèle, la matière sombre est une substance, nouvel élément physique non constitué de particules classiques, appelé *substance sombre* et remplissant l'Univers. Supposant des propriétés physiques très simples de cette substance sombre, on justifie théoriquement la courbe de rotation plate des galaxies et la loi baryonique de Tully-Fisher. Nous étudierons ensuite d'après notre nouvelle théorie les différents modèles de distribution de matière sombre dans les galaxies et les amas, puis la vitesse des galaxies dans les amas.

Puis utilisant le nouveau modèle de la matière sombre, on est naturellement conduit à proposer un nouveau modèle géométrique d'Univers, fini, non prévu par le Modèle Standard de Cosmologie (MSC). On expose ensuite un nouveau modèle Cosmologique basé sur ce nouveau modèle géométrique et sur le Référentiel de Repos du Cosmic Microwave Background (RRC) qu'on appellera aussi *Référentiel local Cosmologique*. On propose ensuite un premier modèle mathématique d'expansion de l'Univers qui, basé comme le MSC sur la Relativité Générale, nous conduit au même Univers observable avec des prédictions théoriques identiques au MSC, puis on propose un 2ième modèle mathématique d'expansion de l'Univers, beaucoup plus simple mathématiquement, avec des prédictions théoriques en accord avec les observations astronomiques, et qui donne une solution au problème de l'énergie sombre. Pour terminer on étudiera l'évolution de la température de la substance sombre dans l'Univers et on montrera l'existence d'une énergie sombre dans l'Univers d'après notre théorie de la matière sombre et de l'énergie sombre.

Mots clés : Loi baryonique de Tully-Fisher, matière sombre, CMB, Référentiel de Repos du CMB, amas de galaxies, gravitational lensing, halo sombre, vitesse des galaxies, énergie sombre.

1.INTRODUCTION

La 1^{ière} partie de l'article propose une théorie de la matière sombre. Dans cette partie, nous proposons qu'un nouvel élément physique, appelé *substance sombre*, constitue la matière sombre. Cette substance sombre, d' après le modèle

proposé, remplit tout l'Univers, et a des propriétés physiques proches de celles d'un gaz parfait. On montre qu'alors on peut déduire la courbe de rotation plate observée pour certaines galaxies, de façon totalement nouvelle avec une densité de matière sombre en $1/r^2$. Une expression mathématique simple de densité de matière sombre en $1/r^2$ permettant d'obtenir cette courbe de rotation plate a bien été proposée, mais il n'a pas été proposé de modèle de matière sombre permettant de justifier théoriquement cette densité en $1/r^2$. Si de plus on suppose des propriétés thermiques simples à cette substance sombre, on montre qu'on obtient la Loi baryonique de Tully-Fisher, malgré la forme très particulière de celle-ci. La théorie appelée MOND (1) propose aussi une justification théorique de la courbe de rotation plate des galaxies mais elle est contraire à la loi d'attraction gravitationnelle de Newton et de plus est contredite par certaines observations astrophysiques. Nous étudierons ensuite selon notre théorie de la matière sombre les différents modèles de distribution de matière sombre dans les galaxies.

Nous montrerons ensuite comment notre Théorie de la matière sombre interprète avec succès les données expérimentales concernant la masse sombre des amas, notamment la vitesse des galaxies dans les amas et l'effet appelé gravitational lensing qui est la déviation de rayons lumineux, prévue par la Relativité Générale, due à la masse des amas. Nous verrons ensuite comment notre théorie de la matière sombre permet de déterminer la valeur des rayons sombres des galaxies et la densité de matière sombre dans l'Univers à l'origine de certaines anisotropies du CMB (Cosmic Microwave Background, appelé en Français « rayonnement fossile ») .

On pourrait aussi appeler la substance sombre *ether-substance*, par analogie avec la Théorie pré-relativiste dans laquelle il existait une substance emplissant tout l'espace et appelée « ether ».

La Théorie de la matière sombre exposée dans cet article ne présente aucun des points faibles précédents. De plus elle est compatible avec le Modèle Standard Cosmologique (MSC). Cependant elle prévoit la possibilité d'un nouveau modèle géométrique d'Univers. Dans la 2ième partie de l'article, nous proposerons un nouveau modèle Cosmologique basé sur ce nouveau modèle géométrique et sur l'interprétation physique du Référentiel de Repos du CMB (RRC) qui n'a pas d'interprétation physique dans le Modèle Standard de la Cosmologie (MSC). A cause de ses propriétés astrophysiques on appellera aussi le RRC *Référentiel local Cosmologique*. On pourra bien sûr identifier le RRC avec le Référentiel absolu appelé « Ether » dans la Théorie de l'Ether. On obtient donc que cet Ether est défini localement en tout point de l'Univers, et on pourra donc l'appeler « Ether-local ». On verra que le nouveau modèle Cosmologique conduit à des définitions des variables Cosmologiques, (notamment le temps Cosmologique et les

différentes sortes de distances utilisées en Cosmologie) compatibles avec leurs définitions dans le MSC. Comme le MSC, le nouveau modèle Cosmologique est compatible avec la Relativité Restreinte et Générale (localement), puisque selon ce nouveau modèle Cosmologique, le RRC ne peut pas être déterminé par des expériences de physique usuelles mais seulement par l'observation du CMB. On verra que notre théorie de l'énergie sombre propose 2 modèles mathématiques d'expansion de l'Univers. Le 1^{ier} modèle mathématique d'expansion de l'Univers est comme le MSC basé sur la Relativité Générale. On montre alors que l'Univers observable dans ce 1^{ier} modèle mathématique est identique à celui prévu par le MSC s'il est observé suffisamment loin de ses frontières, c'est-à-dire que dans ce 1^{ier} modèle mathématique d'expansion de l'Univers les différentes sortes de distances utilisées en Cosmologie (exprimées en fonction du décalage spectral z) et la constante de Hubble sont égales mathématiquement à celles obtenues dans le MSC.

Le second modèle mathématique d'expansion de l'Univers proposé n'est pas basé sur la Relativité Générale, mais est beaucoup plus simple. Cependant ses prédictions astrophysiques théoriques, notamment la valeur de la constante de Hubble et celle des distances Cosmologiques sont en accord avec l'observation. De plus, ce second modèle résout l'énigme de l'énergie sombre.

Enfin nous étudierons d'après notre théorie de l'énergie sombre et le 2ième modèle mathématiques d'expansion de l'Univers de cette théorie l'évolution de la température de la substance sombre dans l'Univers avant et après l'apparition des galaxies, et nous verrons qu'il existe d'après la nouvelle théorie une énergie sombre dans l'Univers.

On rappelle que pour beaucoup de physiciens et d'astrophysiciens [(6)], les énigmes de la matière sombre et de l'énergie sombre rendent nécessaire un nouveau paradigme pour le MSC, et notre article propose un tel modèle.

Nous verrons que la théorie de la matière sombre et de l'énergie sombre exposée dans cet article demeure compatible avec le MSC[(7)(8)(9)] pour l'interprétation de la plupart des phénomènes Cosmologiques non liés à l'énergie sombre ni à la matière sombre, par exemple l'abondance des éléments primordiaux, l'apparition des particules baryoniques (pour le même z que dans le MSC), la formation et l'apparition des galaxies (pour le même z que dans le MSC), l'apparition du CMB (pour le même z que dans le MSC), l'évolution du CMB (en 1/(1+z))….

2. THEORIE DE LA MATIERE SOMBRE

2.1 Propriétés physiques de la substance sombre.

Comme on l'a vu dans l'Introduction, on admet le Postulat 1 suivant exprimant les propriétés physiques de la substance sombre :

Postulat 1 :

a)Une substance, appelée substance sombre, emplit tout l'Univers.
b)Cette substance sombre n'interagit pas avec les photons qui la traversent.
c)Cette substance a une masse et obéit aux lois de Boyle (appelée aussi loi de Mariotte) et de Charles (appelée aussi loi de Gay-Lussac), et à la loi suivante qui est leur synthèse:
Un élément de substance sombre de masse m, de volume V, de pression P et de température T vérifie, k_0 étant une constante :
$PV=k_0mT$

La loi précédente est valide pour un gaz parfait donné G_0, remplaçant k_0 par une constante $k(G_0)$, et ceci est une conséquence de l'équation universelle des gaz, qui est aussi obtenue en utilisant les lois de Boyle et Charles. Pour cette raison on l'appellera *loi de Boyle-Charles*.

On a 2 remarques conséquences de ce Postulat :
-Tout d'abord malgré son nom, la substance sombre n'est pas réellement sombre mais transparente. En effet, à cause du Postulat 1b), elle n'interagit pas avec les photons qui la traversent.
-De plus à cause du Postulat 1, ce qu'on appelle « Le vide », n'est pas vide : Il est rempli de substance sombre.

2.2 Courbes de rotations plates des galaxies.

En utilisant que la substance sombre se comporte comme un gaz parfait (Postulat 1c), on va montrer qu'une concentration sphérique de substance sombre peut constituer la matière sombre de galaxies ayant une courbe de rotation plate.

D'après le Postulat 1c), un élément de substance sombre de masse m, de volume V de pression P et de température T vérifie la loi, k_0 étant une constante :

$$PV=k_0mT \qquad (1)$$

Ce qui signifie, posant $k_1=k_0T$:

$$PV=k_1m \qquad (2)$$

Ou de façon équivalente, ρ étant la densité massique de l'élément:

$$P=k_1\rho \qquad (3a)$$

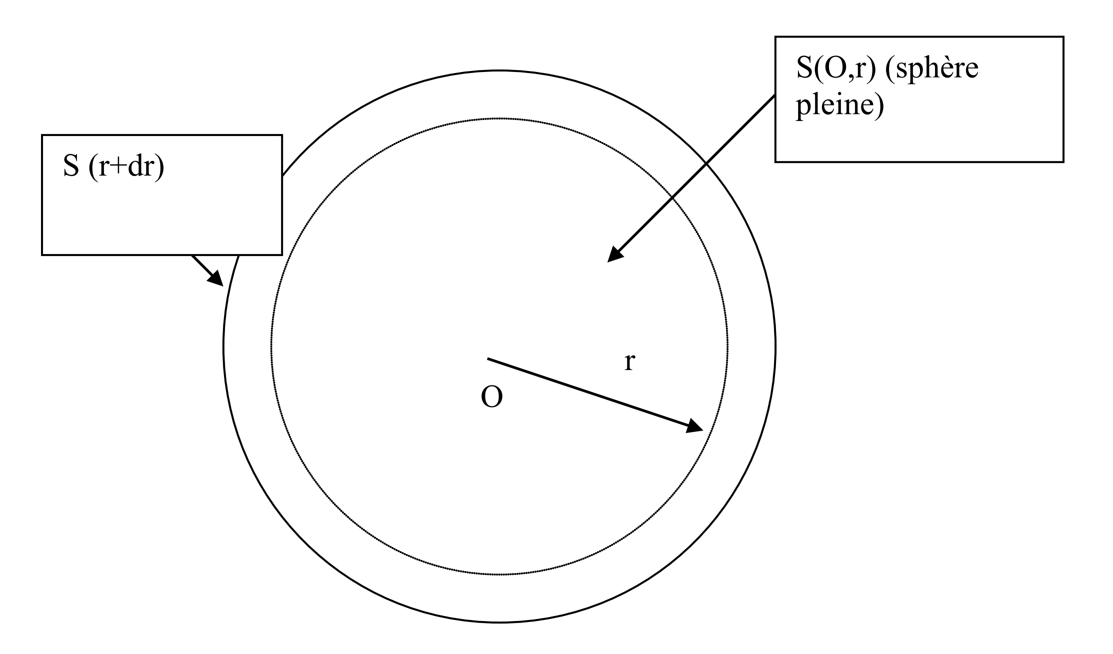


Figure 1:La galaxie concentration de substance sombre

Nous faisons maintenant l'hypothèse naturelle qu'une galaxie peut être modélisée par une concentration de substance sombre présentant une symétrie sphérique, à une température constante et homogène T.

On considère alors la surface sphérique S(r) (resp. la surface sphérique S(r+dr)) qui est la surface sphérique de rayon r (resp. r+dr) et de centre O le centre de la galaxie. S(O,r) est la sphère pleine de substance sombre de rayon r et de centre O.

La masse M(r) de S(O,r) est donnée par:

$$M(r) = \int_0^r \rho(x) 4\pi x^2 dx \quad (3b)$$

Supposant alors une symétrie sphérique, on obtient alors selon les lois de Newton (Σ**F**=0, $\mathbf{F}_G$=m**G**, utilisant le théorème de Gauss pour obtenir **G**) l'équation suivante (4) de l'équilibre des forces d'un élément de substance sombre de surface dS, d'épaisseur dr, situé entre S(O,r) et S(r+dr).

$$dSP(r+dr) + \frac{G}{r^2}(\rho(r)dSdr)(\int_0^r \rho(x)4\pi x^2 dx) - dSP(r) = 0 \quad (4)$$

Eliminant dS, on obtient l' équation:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G}{r^2}(\rho(r))(\int_0^r \rho(x)4\pi x^2 dx) \quad (5)$$

Et utilisant l'équation (3), obtenue par la loi de Boyle-Charles (Postulat 1), on obtient l'équation:

$$k_1 \frac{d\rho}{dr} = -\frac{G}{r^2}(\rho(r))(\int_0^r \rho(x)4\pi x^2 dx) \quad (6)$$

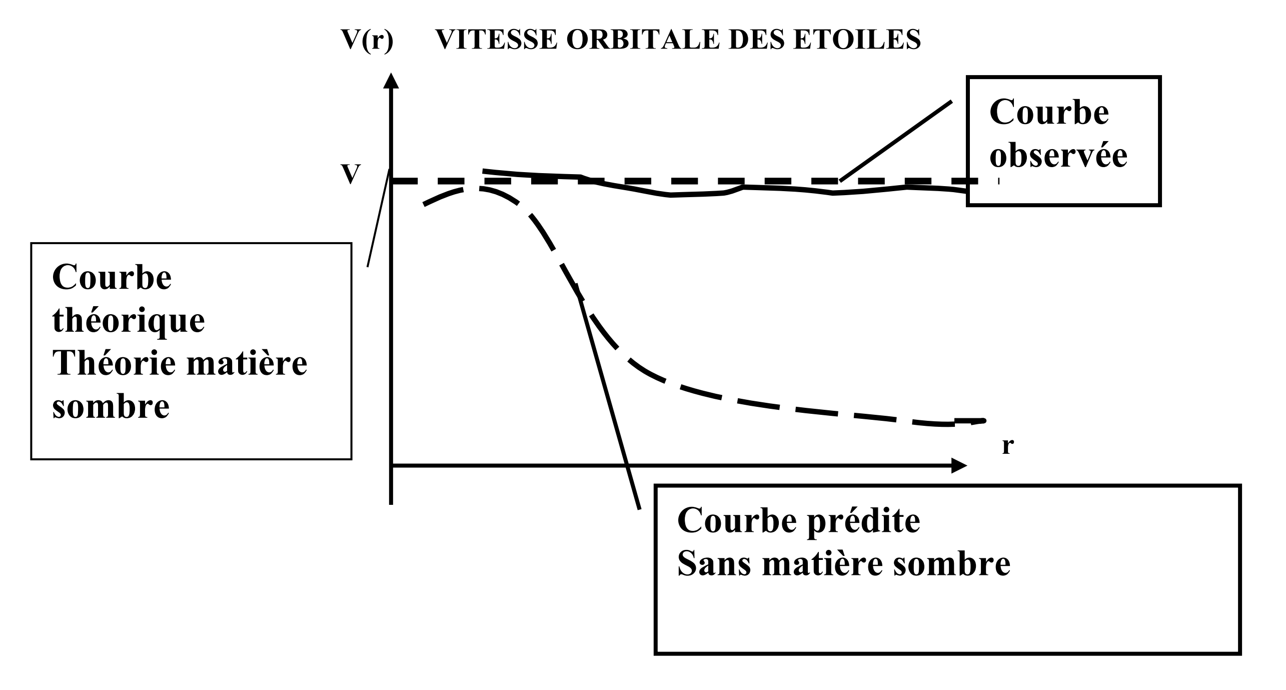
On vérifie alors que la densité de substance sombre ρ(r) satisfaisant la précédente équation d'équilibre est la solution évidente:

$$\rho(r) = \frac{k_2}{4\pi r^2} \quad (7)$$

(Une densité de matière sombre en $1/r^2$ exprimée comme dans l'équation (7) a déjà été proposée pour expliquer la courbe de rotation plate des galaxies mais il n'a pas été proposé de modèle de substance sombre permettant de justifier théoriquement cette densité en $1/r^2$ ni d'obtenir la constante k_2. Ici on donne une justification théorique de cette densité en $1/r^2$ (Equation (7)) et on va donner une expression mathématique donnant k_2. (Equation (8)). Ceci est la conséquence de la modélisation de la substance sombre comme un gaz parfait. (Postulat 1c))

Pour obtenir k_2, on remplace ρ(r) donnée par l'expression (7) dans l'équation (6), et on voit que cette équation (6) est vérifiée pour la constante k_2 donnée par l'expression suivante :

$$k_2 = \frac{2k_1}{G} = \frac{2k_0 T}{G} \quad (8)$$



DISTANCE DES ETOILES AU CENTRE O DE LA GALAXIE
Figure 2 :Courbe de rotation des galaxies

Utilisant la précédente équation (7), on obtient que la masse M(r) de la sphère S(O,r) est donnée par l'expression :

$$M(r) = \int_0^r 4\pi x^2 \rho(x)dx = k_2 r \quad (9)$$

On obtient alors, négligeant la masse des étoiles dans la galaxie,que la vitesse v(r) d'une étoile de la galaxie située à une distance r du centre O est donnée par $v(r)^2/r=GM(r)/r^2$ et donc on a :

$$v(r)^2=Gk_2=2k_1=2k_0T \qquad (10)$$

Donc on obtient dans la précédente équation (10) que la vitesse d'une étoile dans une galaxie est indépendante de sa distance au centre O de cette galaxie.

2.3 Loi baryonique de Tully-Fisher.

2.3.1 Rappel.

On rappelle que la loi de Tully-Fisher est la suivante :

Tully et Fisher ont réalisé des observations sur les galaxies spirales présentant une courbe de rotation plate. Ils ont obtenu que la luminosité L d'une telle galaxie spirale est proportionnelle à la 4ième puissance de la vitesse v des étoiles dans cette galaxie. On a donc la Loi de Tully-Fisher pour de telles galaxies, K_1 étant une constante :

$$L=K_1v^4 \qquad (11)$$

Mais dans les cas étudiés par Tully et Fisher la masse baryonique M d'une galaxie spirale est proportionnelle à sa luminosité L. On a donc dans ces cas, K_2 étant une constante :

$$M=K_2v^4 \qquad (12)$$

Cette seconde forme de la loi de Tully-Fisher est appelée *Loi baryonique de Tully-Fisher.*

Les observations récentes de McGaugh [(2)] montrent que cette loi baryonique de Tully-Fisher est apparemment vraie pour toutes les galaxies ayant une courbe de rotation plate, y compris celles pour laquelle la luminosité n'est pas proportionnelle à la masse baryonique.

Nous allons voir qu'à l'aide du Postulat 1 et d'un Postulat 2 exprimant des propriétés thermiques très simples de la substance sombre (notamment son interaction avec la matière baryonique), on justifie théoriquement cette loi baryonique, malgré sa grande spécificité.

2.3.2 Hypothèse de la perte thermique quantifiée des baryons.

On a vu dans l'équation précédente (10) que dans notre modèle de substance sombre la température de la concentration de substance sombre constituant la galaxie est proportionnelle au carré de la vitesse des étoiles dans cette galaxie. Donc on doit déterminer cette température T.

-Une première idée possible est que T soit la température du CMB. Mais ceci est impossible car alors toutes les courbes de rotations de toutes les galaxies seraient identiques, ce qui est contraire à l'observation.

-Une 2ième idée possible est que, dans la galaxie, chaque baryon interagit avec la substance sombre dans laquelle il est immergé, en lui transmettant une énergie calorifique. Cette énergie thermique est très faible, mais à cause de la très faible densité de la substance sombre, et des temps considérés (On rappelle que le diamètre des galaxies est de l'ordre de 100000 années lumières), il peut conduire à des températures appréciables de la concentration de substance sombre. On pourrait penser que ce transfert thermique dépend à la fois de la température du baryon et de celle de la substance sombre mais si cela était le cas il aurait été très difficile à calculer, et vraisemblablement n'aurait pas pu expliquer la très simple loi baryonique de Tully-Fisher.

Nous sommes conduit alors à l'hypothèse la plus simple mathématiquement du transfert thermique entre baryons et la substance sombre, exprimée dans la Postulat 2 (Ce Postulat donne les propriétés thermiques de la substance sombre):

Postulat 2a)

-Chaque noyau d'atome dans une galaxie est soumis à un transfert thermique vers la substance sombre dans laquelle il est immergé.

-Ce transfert thermique dépend seulement du nombre de nucléons du noyau d'atomes (indépendant donc de sa température). Si p est la puissance thermique dissipée par le noyau, n est le nombre de nucléons du noyau, on a une constante p_0 (puissance dissipée par nucléon) :

$$p=np_0 \qquad (13)$$

D'après l'équation (13), la puissance totale transmise par les atomes de la galaxie vers la substance sombre est proportionnelle au nombre total de nucléons, et donc à la masse baryonique de la galaxie. Ainsi, si m_0 est la masse d'un nucléon, M étant la masse baryonique de la galaxie, la puissance thermique totale P_r reçue par la concentration de substance sombre de la part des baryons est donnée par, K_3 étant la constante p_0/m_0 :

$P_r=(M/m_0)p_0=K_3M$ (14)

Concernant le précédent Postulat 2a) :
-Il est possible qu'il ne soit valable que pour les atomes dont la température est supérieure à celle de la substance sombre.
-Il permet d'obtenir la très simple équation (14), et on verra que celle-ci est essentielle pour justifier la loi baryonique de Tully-Fisher.

2.3.3 Obtention de la loi baryonique de Tully-Fisher.

En accord avec le précédent modèle de galaxie, nous modélisons une galaxie comme une concentration de substance sombre présentant une symétrie sphérique, étant elle aussi une sphère, à une température homogène T et immergée dans un milieu de substance sombre intergalactique à une température T_0 et ayant une densité ρ_0.

Pour obtenir le rayon R de la concentration de substance sombre constituant la galaxie, il est naturel de supposer la continuité de la densité ρ(r): R est le rayon pour lequel la densité ρ(r) de la concentration de substance sombre est égale à ρ_0.On appellera R le *rayon sombre* de la galaxie. On a donc l'équation:

$$\rho(R)=\rho_0 \qquad (15)$$

Par conséquent, d'après les équations (7) et (8) :

$$\frac{k_2}{4\pi R^2}=\rho_0 \qquad (16)$$

$$\frac{2k_0T}{G}\times\frac{1}{4\pi R^2}=\rho_0 \qquad (17)$$

Donc on obtient que le rayon R de la concentration de substance sombre constituant la galaxie est donné approximativement par l'équation :

$$R=(\frac{2k_0T}{4\pi G\rho_0})^{1/2}=K_4T^{1/2} \qquad (18)$$

La constante K_4 étant donnée par :

$$K_4 = \left(\frac{2k_0}{4\pi G\rho_0}\right)^{1/2} \qquad (19)$$

On doit considérer qu'il existe un transfert thermique entre la concentration de substance sombre à la température T et la substance sombre intergalactique qui l'entoure à la température T_0. Le plus simple et naturel transfert est un transfert convectif classique. On admettra ceci dans le Postulat 2 :

Postulat 2b) :

Le transfert thermique entre la concentration sphérique de substance sombre constituant la galaxie (à la température T) et la substance sombre intergalactique (à la température T_0) est un transfert convectif.

On sait que si φ est le flux surfacique d'énergie thermique aux frontières de la concentration de substance sombre de rayon R, P_p étant la puissance thermique totale perdue par la concentration de substance sombre, on a l'équation:

$$P_p=4\pi R^2\varphi \qquad (20)$$

Mais d'après la définition d'un transfert thermique convectif et d'après le Postulat 2b), on a une constante h, dépendant seulement de ρ_0 telle que :

$$\varphi=h(T-T_0) \qquad (21)$$

Et donc la puissance thermique totale perdue par la concentration de substance sombre est :

$$P_p=4\pi R^2h(T-T_0) \qquad (22)$$

On peut considérer qu'à l'équilibre la puissance thermique totale P_r reçue par la concentration de substance sombre est égale à la puissance thermique totale P_p qu'elle perd. Et donc d'après les équations(14) et (22), on a l'égalité :

$$K_3M=4\pi R^2h(T-T_0) \qquad (23)$$

Utilisant l'équation (18) :

$$K_3M=4\pi K_4^2hT(T-T_0) \qquad (24)$$

Faisant l'approximation $T_0<<T$:

$$M = 4\pi \frac{K_4^2}{K_3} h T^2 \qquad (25)$$

On obtient donc l'expression de T, définissant la constante K_5 :

$$T = (\frac{K_3}{4\pi K_4^2 h})^{1/2} M^{1/2} = K_5 M^{1/2} \qquad (26)$$

Et donc d'après l'équation (10) :

$$v^2=2k_0T=2k_0K_5M^{1/2} \qquad (27)$$

Donc :

$$M = (\frac{1}{2k_0 K_5})^2 v^4 \qquad (28)$$

On obtient finalement :

$$M=K_6v^4 \qquad (29)$$

La constante K_6 étant définie par:

$$K_6 = (\frac{1}{2k_0 K_5})^2 = \frac{4\pi K_4^2 h}{4k_0^2 K_3} \qquad (30)$$

$$K_6 = \frac{4\pi h}{4k_0^2 K_3} \times \frac{2k_0}{4\pi G\rho_0} \qquad (31)$$

$$K_6 = \frac{m_0 h}{2k_0 G\rho_0 p_0} \qquad (32)$$

On obtient donc la loi baryonique de Tully-Fisher (12) avec $K_2=K_6$. Il est naturel de supposer que h dépend de ρ_0. La plus simple expression de h est $h=C\rho_0$, C étant une constante. Avec cette relation, K_6 est indépendant de ρ_0, et on peut utiliser la loi baryonique de Tully-Fisher pour évaluer des distances dans l'Univers.

2.4 Temperature de la substance sombre intergalactique.

On a introduit la température T_0 de la substance sombre intergalactique. On pourrait penser que cette température est celle du CMB mais rappelons que pour obtenir la loi baryonique de Tully-Fisher, T étant la température d'une concentration de substance sombre constituant une galaxie, on a supposé $T_0 << T$. Et donc dans l'hypothèse précédente on serait conduit à des températures très élevées de substance sombre constituant les galaxies. Nous verrons plus loin que dans la nouvelle théorie proposée la température T_0 de la substance sombre intergalactique n'est pas égale à la température du CMB, sauf pour un décalage Cosmologique particulier z.

On peut être dans les cas suivants :

a)La température T_0 de la substance sombre intergalactique à l'âge actuel de l'Univers (équation (21)) est très inférieure à la température du CMB.

b)Les baryons peuvent émettre leur puissance thermique vers la substance sombre même avec une température inférieure.

On rappelle que d'après le Postulat 1b), la substance sombre n'interagit pas avec les photons et en particulier avec ceux du CMB. Elle ne reçoit donc pas de transfert thermique rayonné.

2.5 Forme de l' Univers

Les éléments de la Théorie de la matière sombre exposés précédemment, c'est-à-dire l'obtention de la courbe de rotation plate des galaxies et de la loi baryonique de Tully-Fisher sont compatibles avec le Modèle Standard Cosmologique (MSC). Nous verrons qu'il en est de même pour l'ensemble de notre Théorie de la matière sombre. Et donc notre Théorie de la matière sombre est compatible avec les différents modèles topologiques d'Univers prévus par la MSC. Cependant notre modèle de matière sombre permet la possibilité d'un nouveau modèle géométrique d'Univers très simple :

Ce modèle est une sphère emplie de substance sombre et entourée d'un milieu qu'on appellera « néant ». $R_U(t)$ étant le rayon de cette sphère au temps Cosmologique t, et 1+z étant le facteur d'expansion de l'Univers entre t_1 et t_2, on a alors:

$$R_U(t_2)=(1+z)\, R_U(t_1) \qquad (33)$$

2.6 Sphère superposée.

Considérons une concentration sphérique de substance sombre avec une densité en $1/r^2$ telle qu'on l'a définie dans les sections précédentes se déplaçant dans l'espace. On pourrait s'attendre à ce que sa vitesse et sa masse soient modifiées à cause de son déplacement soit à cause de la force d'Archimède soit à cause d'absorption ou de perte de substance sombre par la concentration de substance sombre en mouvement. Cet effet pourrait être négligeable, mais on a une justification qu'il est nul beaucoup plus intéressante.

En effet d'après notre théorie de la matière sombre, la substance sombre se comporte ou bien comme une substance matérielle ayant une densité ou bien comme le vide absolu. Pour les baryons immergés elle se comporte toujours comme le vide absolu et donc la vitesse des baryons de l'Univers n'est jamais affectée par une force d'Archimède due à la substance sombre dans laquelle ils sont immergés. D'après notre théorie, la substance sombre dans laquelle est immergée la concentration sphérique de substance sombre se comporte aussi comme le vide absolu concernant le déplacement de la sphère : Ni la vitesse ni la masse de la concentration sphérique de substance sombre ne sont modifiées à cause de son déplacement dans la substance sombre intergalactique. On dira donc aussi que la concentration sphérique de substance sombre est une *sphère superposée* à la substance sombre dans laquelle elle est immergée.

On sait que dans la théorie de la gravitation de Newton, on suppose que seule la densité baryonique existe ce qui n'est pas le cas dans notre théorie de la matière sombre et de plus dans la théorie de Newton, l'Univers est statique, ce qui n'est pas le cas non plus dans notre théorie de la matière sombre. Les équations de la mécanique Newtoniennes doivent donc être adaptées à notre théorie de la matière sombre, et nous allons voir qu'on a 3 exemples très simples d'adaptation de ces équations.

Dans la section 2.2, pour établir notre modèle de sphère superposée avec une densité de substance sombre en $1/r^2$, on a supposé qu'on avait une symétrie sphérique de centre O_{GA} centre de la sphère superposée. Or on verra que ceci n'est pas en général le cas si la sphère superposée est à l'intérieur d'un amas. Afin de pouvoir utiliser cette symétrie sphérique et de tenir compte des possibles comportements de la substance sombre, nous proposons la règle suivante

d'adaptation des équations de Newton, qui peut être exacte ou vraie avec une bonne approximation :

La règle d'adaptation est la suivante :

Dans le cas d'une galaxie G_A constituée d'une sphère superposée de centre O_{GA} et de rayon R_{GA} :
a)Pour déterminer les vitesses et trajectoires des étoiles à l'intérieur de la sphère superposée dans le Référentiel d'origine O_{GA}, pour obtenir le champ gravitationnel $\mathbf{G}_{GA}$ et le potentiel gravitationnel U_{GA} permettant d'obtenir ces vitesses et trajectoires, on prend $\rho(r)=0$ dans les équations de la mécanique Newtonienne pour $r>R_{GA}$.
b)O_{GA} est accéléré par une accélération $\mathbf{G}(O_{GA})$, $\mathbf{G}(O_{GA})$ étant défini par $\mathbf{F}_G(G_A)=m(G_A)\mathbf{G}(O_{GA})$, avec $\mathbf{F}_G(G_A)$ force gravitationnelle totale exercée sur G_A par la substance sombre dans laquelle G_A est immergée, $m(G_A)$ masse de G_A. Donc la substance sombre dans laquelle est immergée G_A agit sur G_A comme si elle était un solide.

On remarque que la règle d'adaptation précédente est équivalente à ce que l'action de la substance sombre dans laquelle est immergée la sphère superposée consiste à générer dans cette sphère un champ gravitationnel uniforme et égal à $\mathbf{G}(O_{GA})$. La règle précédente entraîne que le modèle utilisé pour obtenir une densité en $1/r^2$ dans la sphère superposée est toujours valide.

On a donc un 1^{ier} exemple possible d'adaptation des équations de la mécanique Newtonienne à notre théorie de la matière sombre.

La règle d'adaptation précédente peut être exacte ou seulement avec une bonne approximation. Ceci est en totale analogie avec le cas du système solaire où on peut obtenir les équations de la trajectoire des planètes sans tenir compte de la gravitation générée par les autres étoiles de la galaxie, c'est-à-dire en prenant $\rho(P)=0$ dans les équations de Newton pour P en dehors du système solaire (Comme dans la règle d'adaptation précédente).

On a vu dans la Section 2.3 un modèle de transfert thermique convectif entre la sphère superposée à la température T et la substance sombre dans laquelle elle est immergée à la température T_0. Le flux était alors :

$$\varphi=h(T-T_0) \qquad (34)$$

Il est possible que la substance sombre entourant la sphère superposée se comporte comme le vide absolu non seulement d'un point de vue gravitationnel

mais aussi du point de vue thermique. Ceci nous conduit à proposer un 2ième modèle de transfert thermique entre la sphère superposée et la substance sombre dans laquelle elle est immergée, avec un flux qui n'est plus exprimé par l'équation (34) mais par l'équation suivante :

$\varphi = hT$ (35)

Le flux précédent reste analogue à un transfert thermique convectif, on remarque qu'il a la forme d'un transfert convectif entre un milieu à la température T et un milieu à la température $T_0=0$.

Ce 2ième modèle de transfert thermique est intéressant car il entraîne que la loi baryonique de Tully-Fisher qu'on a établie dans la section 2.3 demeure valide quelle que soit la température T_0 de la substance sombre dans laquelle est immergée la sphère superposée, alors que c'est vrai seulement avec la condition $T_0 << T$ dans le 1ier modèle de transfert thermique.

2.7 Rayon baryonique et rayon sombre d'une galaxie.

On a vu dans la Section 2.1 que si r est la distance au centre O d'une concentration sphérique de substance sombre constituant une galaxie ayant une courbe de rotation plate, l'expression de la densité de substance sombre $\rho(r)$ était donnée par, k_3 étant une constante (voir équation (7) dans la section 2.1, $k_3=k_2/4\pi$):

$$\rho(r) = \frac{k_3}{r^2} \qquad (36)$$

Donc on obtient, M (r) étant la masse d'une sphère de centre O et de rayon r (Voir équation (9)):

$$M(r) = 4\pi k_3 r \qquad (37)$$

Par conséquent, v étant la vitesse d'une étoile à une distance r de O (voir équation (10)):

$$v^2 = \frac{GM}{r} = 4\pi k_3 G \qquad (38)$$

Et donc :

$$k_3 = \frac{v^2}{4\pi G} \qquad (39)$$

On a vu aussi que si ρ_0 est la densité locale de substance sombre intergalactique dans laquelle est immergée la concentration sphérique de substance sombre

constituant la galaxie, alors le rayon R de cette concentration de substance sombre est donné par l'expression (voir équation (15)):

$$\rho(R) = \frac{k_3}{R^2} = \rho_0 \qquad (40)$$

Et donc :

$$R = \sqrt{\frac{k_3}{\rho_0}} = v\sqrt{\frac{1}{4\pi G\rho_0}} \qquad (41)$$

On a appelé dans une section précédente R *rayon sombre* de la galaxie considérée.

Ainsi donc, dans une galaxie pour laquelle il existe une concentration sphérique de substance sombre analogue à celle proposée (C'est-à-dire dans le cas où elle présente une courbe de rotation plate), on a 2 différents types de rayon :

La 1^iere^ sorte de rayon, appelé *rayon sombre* de la galaxie est le rayon de la concentration sphérique de substance sombre. La seconde sorte de rayon, est le rayon de la plus petite sphère contenant toutes les étoiles de la galaxie, c'est le *rayon baryonique* de la galaxie. On remarque qu'à un âge de l'Univers donné, si une galaxie possède une courbe de rotation plate, le rayon sombre de la galaxie doit être supérieur à son rayon baryonique.

2.8 Autres modèles de distribution de matière sombre dans l'Univers.

On rappelle que la substance sombre n'est pas de la matière ordinaire et n'a donc pas obligatoirement des propriétés physiques identiques à celles de la matière ordinaire. Dans cette section et aussi dans la section suivante interprétant la dynamique des amas, nous proposerons des propriétés physiques de la matière sombre, simples mais différentes de celles de la matière ordinaire, permettant d'interpréter les observations dans l'Univers liées à la matière sombre.

2.8.1 Le double comportement possible de la substance sombre.

En plus du 1^ier^ modèle exposé dans la section 2.2 de distribution de substance sombre avec une densité en $1/r^2$ obtenu pour les galaxies ayant une courbe de rotation plate, on doit aussi considérer un second modèle de distribution de matière sombre avec une densité constante $\rho(r)=\rho_0$, ρ_0 densité de substance sombre dans laquelle est immergée la galaxie. En général, ρ_0 est la densité de la

substance sombre intergalactique, qu'on a supposé homogène en température et en densité dans la section 2.2.

Ce 2nd modèle est la conséquence d'un comportement possible de la substance sombre qui est d'être homogène en densité.

On voit donc que la substance sombre a 2 comportements possibles : Ou bien elle est homogène en densité (dans un volume donné) en violation de l'équilibre des forces (comme par exemple la substance sombre intergalactique), ou bien sa densité obéit à l'équilibre des forces comme la matière ordinaire (comme dans notre modèle de galaxie à courbe de rotation plate).

Nous devons maintenant définir dans quels cas la substance sombre adopte tel ou tel comportement. On rappelle qu'on a admis que les galaxies à courbe de rotation plates étaient des sphères de substance sombre superposées à la substance sombre intergalactique. Ceci nous conduit à admettre l'Hypothèse a) suivante :

Hypothèse a) :

La substance sombre a une densité constante partout dans l'Univers sauf à l'intérieur de sphères superposées.

Il est attractif d'admettre qu'à l'intérieur d'une sphère superposée S, la substance sombre conserve les propriétés principales qu'elle a dans l'Univers en dehors de toute sphère superposée. C'est pourquoi on généralise l'Hypothèse a) par l'hypothèse b) pour notre modèle de substance sombre:

Hypothèse b) :

Pour qu'il y ait une concentration locale de substance sombre dans un volume dV à l'intérieur d'une sphère superposée S (dV étant petit devant le volume de S), alors dV doit appartenir à une sphère se substance sombre S' superposée à S.

On peut se demander cependant s'il existe plusieurs niveaux de sphères superposées, c'est-à-dire s'il peut exister une sphère de substance sombre S' superposée à une autre comme dans le cas de l'Hypothèse b) précédente. L'hypothèse la plus simple serait qu'il n'en existe pas et cette hypothèse semble être en accord avec les observations, et donc on admettra l'hypothèse c) dans notre modèle de substance sombre:

Hypothèse c) :

Il ne peut pas y avoir plusieurs niveaux de sphères superposées.

L'hypothèse a) entraîne que dans l'Univers, si une étoile n'appartient pas à une sphère superposée il n'y a pas de concentration de substance sombre dans son voisinage. Les hypothèses b) et c) entraînent que à l'intérieur d'une sphère

superposée S constituant une galaxie à courbe de rotation plate, il n'y a pas de concentration locale de substance sombre, ni au voisinage des étoiles ni au voisinage des galaxies naines.

Et donc si les hypothèses b) et c) sont vraies il n'y a pas de concentration locale de substance sombre au voisinage des nuages de Magellan. Si on observait cependant que les nuages de Magellan ont une courbe de rotation plate obéissant à la loi baryonique de Tully-Fisher, cela signifierait que hypothèse c) est fausse, conservant l'hypothèse b). Cependant l'Hypothèse c) n'est pas nécessaire à notre Théorie de la matière sombre, notre justification de la loi baryonique de Tully-Fisher peut s'appliquer à une sphère de substance sombre S' superposée à une sphère de substance sombre S.

2.8.2 La génération des sphères superposées.

Un problème intéressant est de déterminer comment sont apparues les sphères superposées. On remarque qu'on n'a pas observé de concentration de matière sombre au voisinage des étoiles planètes et des trous noirs de faible masse. Ceci signifie donc d'après les hypothèses a) et b) précédentes qu'il n'y a pas de sphère superposées au voisinage des étoiles et des trous noirs de faible masse. Et donc on doit admettre l'hypothèse d) suivante :
Hypothèse d) :
Ni les planètes, ni les étoiles ni les trous noirs de faible masse ne génèrent des sphères superposées.

Il est cependant possible que les sphères superposées soient générées par les trous noirs super massifs. Si tel était le cas, on devrait avoir un trou noir super massif au centre de chaque galaxie à courbe de rotation plate et réciproquement toute galaxie dont le centre est un trou noir super massif devrait être une galaxie à courbe de rotation plate. Il est aussi possible que les sphères superposées soient générés par les trous noirs primordiaux (C'est-à-dire formé dans l'Univers primordial), apparus lorsque l'Univers était très dense mais disparus aujourd'hui.

On a donc 2 possibilités pour la formation des sphères superposées : Ou bien elles sont générées par certains astres, comme les trous noirs super massifs, ou bien elles sont générées par des phénomènes dans l'Univers primordial.

2.8.3 La courbe de rotation des galaxies à courbe de rotation plate au voisinage de leur centre.

On rappelle qu'on a obtenu dans notre modèle des galaxies à courbe de rotation plate une densité en $1/r^2$ (r distance au centre de la galaxie). Cependant les

observations montrent que la courbe de rotation n'est pas constante au voisinage de r=0, mais croit à partir de v=0 en r=0.

Pour justifier ceci, on a l'explication simple suivante :

On a vu précédemment que la substance sombre avait 2 comportements possibles : Ou bien elle était homogène en densité (dans un volume donné), ou bien sa densité obéissait à l'équilibre des forces comme la matière ordinaire. Pour expliquer l'allure de la courbe de rotation au voisinage de r=0 d'une galaxie à courbe de rotation plate, nous proposons l'explication simple suivante, Hypothèse e), dans notre modèle de substance sombre :

Hypothèse e) :

T étant une température quelconque, il existe une densité maximale $\rho_M(T)$ pour laquelle la substance sombre peut se comporter comme obéissant à l'équilibre des forces. Pour une densité supérieure ou égale à $\rho_M(T)$, la substance sombre se comporte comme une substance homogène en densité.

Avec l'hypothèse précédente e), on obtient que pour une galaxie à courbe de rotation plate, il existe une distance d_0 telle que pour $0<r<d_0$ la densité de la substance sombre est égale à $\rho_M(T)$ et pour $r>d_0$ $\rho(r)$ décroît jusqu'à ρ_0, densité de la substance sombre intergalactique. Pour r suffisamment grand, on obtient que $\rho(r)$ est asymptote à la courbe en $1/r^2$ obtenue dans le 1[ier] modèle sans l'Hypothèse e). On obtient bien une courbe de rotation en accord avec l'observation. Notons qu'on améliorerait le modèle en tenant compte de la matière baryonique.

Pour déterminer $\rho(r)$ avec l'hypothèse e) on procède comme suit (Sans tenir compte de la limite inférieure de $\rho(r)$ qui est égale à ρ_0):

a étant un réel positif, on définit la fonction $\rho_{Sa}(r)$ par :

(i) Pour $0\leq r\leq a$: $\rho_{Sa}(r)=\rho_M(T)$

(ii) Pour $a<r$: $\rho_{Sa}(r)$ est solution de l'équation de l'équilibre des forces et est donc asymptotique à la courbe en $1/r^2$ établie dans le modèle sans l'Hypothèse e).

On définit alors la fonction $\rho_{Sam}(r)$ comme l'une des fonctions précédentes (unique) telle que :

(i)Pour tout r $\rho_{Sa}(r)\leq\rho_M(T)$

(ii)a est minimal.

La solution en tenant compte de l'Hypothèse e) est alors $\rho_{Sam}(r)$. De plus $d_0=a_m$. On peut facilement adapter ce qui précède en tenant compte de la limite inférieure de la densité qui est égale à ρ_0.

2.8.4 Le milieu inter-amas et la loi baryonique de Tully-Fisher.

Les observations astronomiques ont montré la présence dans les amas d'un plasma constitué de matière baryonique, ce plasma étant appelé milieu inter-amas. Ce milieu constitue une part importante de la masse baryonique de l'amas, en général plus importante que la masse totale des galaxies de l'amas.

Or pour obtenir la loi baryonique de Tully-Fisher dans notre Théorie de la matière sombre, on a considéré que toutes les particules baryoniques appartenant au halo sombre d'une galaxie à courbe de rotation plate transmettait de l'énergie thermique à la substance sombre constituant ce halo sombre. Et si on tenait compte de ce plasma, on n'obtiendrait plus la loi baryonique de Tully-Fisher en prenant seulement comme masse baryonique dans le halo sombre la masse visible de gaz et d'étoiles.

Nous proposons l'explication suivante : Le plasma est constitué de particules ionisées, en général hydrogène ou hélium. On obtient donc la loi de Tully-Fisher en prenant comme masse baryonique la masse des étoiles et particules visibles si on admet que si une particule baryonique est chargée, en particulier une particule ionisée, alors elle ne transmet pas d'énergie thermique à la substance sombre dans laquelle elle est immergée.

Les observations astronomiques montrent que les particules ionisées constituant le plasma ne refroidissent pas. Ceci est aussi justifié par l'explication précédente.

2.8.5 Les collisions entre matière sombre et matière baryonique.

On n'a jamais observé de collisions entre matière sombre et matière baryonique. Ceci est très bien expliqué par notre Théorie de la matière sombre : En effet d'après cette théorie la matière sombre est une substance emplissant l'espace et qui peut se comporter comme du vide. Et il est évident qu'il ne peut y avoir de collisions entre vide et matière baryonique. On rappelle que pour la même raison d'après notre Théorie de la matière sombre il n'y a pas de poussée d'Archimède s'exerçant sur les particules se déplaçant dans la substance sombre. Et donc notre Théorie de la matière sombre ne prédit aucune collision possible entre matière sombre et matière baryonique en accord avec les observations astronomiques.

2.9 Les autres observations de la matière sombre.

Nous allons maintenant interpréter à l'aide de la théorie de la matière sombre que nous proposons les données expérimentales concernant les vitesses des galaxies dans les amas.

D'après ce qui précède, ces vitesses sont déterminées par :

-La masse baryonique dans les amas (étoiles, gaz..).
-La masse des halos sombres des galaxies dans les amas.
-La masse de la substance sombre intergalactique dans les amas.

On admet d'après la section précédente que l'amas contient seulement des galaxies avec une densité de substance sombre en $1/r^2$ telles qu'on les a définis dans la section 2.1 (1^{ier} modèle de distribution de la substance sombre dans les galaxies) et des galaxies avec une densité de substance sombre constante égale à ρ_0, ρ_0 densité de la substance sombre intergalactique (2nd modèle de distribution de substance sombre dans les galaxies).

On obtient un résultat très intéressant sur la densité moyenne des halos des galaxies dont la densité de substance sombre est en $1/r^2$:

En effet, d'après l'équation (18), pour ces galaxies le rayon du halo sombre est:

$$R_S=(2k_0T/4\pi G\rho_0)^{1/2} \qquad (42)$$

D'après l'équation (8) :

$$k_2=2k_0T/G \qquad (43)$$

Donc :

$$R_S=(k_2/4\pi\rho_0)^{1/2} \qquad (44)$$

Donc d'après l'équation (9) la masse totale du halo sombre est :

$$M_S(R_S)=\frac{k_2^{3/2}}{(4\pi\rho_0)^{1/2}} \qquad (45)$$

Calculons maintenant la masse d'une sphère de même rayon R_S et de densité égale à la densité de la substance sombre intergalactique ρ_0 :

$$M_I(R_S) = \rho_0 \frac{4}{3}\pi(\frac{k_2}{4\pi\rho_0})^{3/2} = \frac{1}{3}\frac{k_2^{3/2}}{(4\pi\rho_0)^{1/2}} \qquad (46)$$

Et donc :

$M_I(R_S)=M_S(R_S)/3$ (47)

Et donc les halos des galaxies du 1ier modèle (densité de substance sombre en $1/r^2$) ont une densité moyenne égale à $3\rho_0$, ceci quelle que soit le rayon et la température du halo sombre et donc quelle que soit la vitesse orbitale des étoiles dans la galaxie considérée.

D'après la relation précédente (47) on peut s'attendre à ce que la masse sombre dans les amas soit très supérieure à la masse baryonique des galaxies de ces amas. En effet, d'après la théorie de la matière sombre que nous proposons, on a vu que pour une galaxie du 1ier modèle, R_B rayon baryonique de la galaxie, la masse sombre $M_S(R_B)$ contenue dans une sphère de centre O (O centre de la galaxie) et de rayon R_B est très grande par rapport à la masse baryonique $M_B(R_B)$. Et donc pour cette galaxie, puisque $R_B<R_S$ la masse totale du halo sombre $M_S(R_S)$ est encore plus grande par rapport à $M_B(R_B)$. Or d'après la relation (47), pour ces galaxies la densité moyenne du halo sombre est seulement 3 fois supérieure à la densité minimale de la substance sombre ρ_0. (Puisqu'on a supposé que seules les galaxies correspondant au 1ier et au 2ième modèle de distribution de substance sombre existent). Et donc on peut s'attendre à ce que la masse sombre des amas soit très supérieure à la masse baryonique des galaxies de ces amas.

Et donc, pour tout amas A de densité moyenne ρ_{mA}, on obtient si on néglige la densité de matière baryonique :

$\rho_0<\rho_{mA}<3\rho_0$ (48)

Et donc la densité moyenne des amas permet d'obtenir une estimation de la densité de substance sombre intergalactique ρ_0. De plus si A1 et A2 sont 2 amas de densité moyenne ρ_{mA1} et ρ_{mA2} avec par exemple $\rho_{mA1}<\rho_{mA2}$, on a d'après la relation précédente :

$\rho_{mA2}<3\rho_{mA1}$ (49)

On verra que la prédiction théorique précédente est en accord avec les données expérimentales.

Il est intéressant d'introduire le volume moyen de halo sombre par galaxie correspondant au 1^{ier} modèle Vol_{SG}. Alors si les amas contiennent les mêmes modèles de la galaxies dans les mêmes proportions (Ce qui n'est pas toujours le cas), on peut exprimer la densité moyenne de l'amas ρ_{mA} comme fonction de N_A nombres de galaxies dans l'amas A et de Vol_{SG}. On obtient en effet immédiatement, puisque la densité moyenne des halos sombres correspondant au 1^{ier} modèle est égale à $3\rho_0$ (Equation (47)) et qu'ailleurs dans l'amas la densité de substance sombre est égale à ρ_0, Vol_A étant le volume de l'amas :

$$\rho_{mA} = \frac{1}{Vol_A}[3\rho_0 N_A Vol_{SG} + \rho_0(Vol_A - N_A Vol_{SG})] \quad (50)$$

Donc on obtient, ρ_{mAG} étant la densité moyenne du nombre de galaxies dans l'amas, $\rho_{mAG}=N_A/Vol_A$:

$$\rho_{mA}=\rho_{mAG}(2\rho_0 Vol_{SG})+\rho_0 \quad (51)$$

De plus, $Vol_A(H)$ étant le volume des halos sombres des galaxies correspondants au 1er modèle dans l'amas, puisque la densité moyenne des halos sombres correspondant au 1^{ier} modèle est égale à $3\rho_0$ (Equation (47)) et qu'en dehors de ces halos dans l'amas la densité de substance sombre est égale à ρ_0 :

$$\rho_{mA} = \frac{1}{Vol_A}[3\rho_0 Vol_A(H) + \rho_0(Vol_A - Vol_A(H))] \quad (52)$$

$$\rho_{mA} = 2\rho_0 \frac{Vol_A(H)}{Vol_A} + \rho_0 \quad (53)$$

Un cas particulier intéressant est le cas où on a toujours pour tous les amas $\rho_{mAG}Vol_{SG}<<1$ ou $Vol_A(H)/Vol_A<<1$. Alors on a toujours $\rho_{mA}\approx\rho_0$ quel que soit ρ_{mAG}. Ceci entraîne, puisque ρ_0 dépend de z, que des amas correspondant au même z ont approximativement la même densité moyenne.

Cependant ceci n'est vraie que si on néglige la contribution de la matière baryonique dans la densité moyenne ρ_{mA}. Dans ce qui suit on supposera qu'on a en général dans les amas $Vol_A(H)/Vol_A<<1$, et donc $\rho_{mA}\approx\rho_0$. On rappelle que de plus

ρ_0 dépend de t, âge de l'Univers. On verra que l'hypothèse précédente est en accord avec les observations astronomiques.

Nous allons maintenant étudier 3 modèles dynamiques permettant d'obtenir des relations entre la masse des amas et la vitesse des galaxies dans ces amas. On verra que les 3 modèles ont des prédictions assez proches concernant les relations entre la masse des amas, le rayon des amas et la vitesse de dispersion ou la vitesse maximale (dans le Référentiel lié à l'amas) des galaxies dans les amas, mais cependant que le 1^{ier} modèle n'est pas compatible avec les observations astronomiques et que le 3ième modèle est basé sur notre modèle de matière sombre et de plus permet d'interpréter des observations astronomiques non interprétées par le 2nd modèle. Notons que les 2 premiers modèles ne sont pas nouveaux et que le 2ième modèle est en général admis dans le MSC, mais sans modèle de matière noire.

Selon un 1^{ier} modèle dynamique des amas les galaxies tournent autour du centre des amas de la même façon que les planètes autour du soleil ou que les étoiles autour de la voie lactée. On appellera *modèle dynamique planétaire* des amas ce 1^{ier} modèle.

R_A étant le rayon d'un amas A, V_{MA} étant la vitesse orbitale des galaxies dans l'amas d'une galaxie à une distance R_A du centre O_A de A (V_{MA} est aussi la vitesse orbitale maximale des galaxies d'après ce 1^{ier} modèle), M_A étant la masse de l'amas, on obtient en supposant une symétrie sphérique de la distribution de substance sombre, utilisant la loi d'attraction Universelle de Newton, le théorème de Gauss ainsi que la loi de la dynamique Newtonienne classique $\mathbf{F}_G = m\boldsymbol{\gamma}$:

$$\frac{GM_A}{R_A^2} = \frac{V_{MA}^2}{R_A} \qquad (54)$$

$$\frac{GM_A}{R_A} = V_{MA}^2 \qquad (55)$$

Cependant, des observations astronomiques très importantes pour notre théorie de la matière sombre appliquée aux amas ont été réalisées concernant l'amas du Coma qu'on désignera par A4 [(10)]. Des astrophysiciens ont tracé un graphe donnant pour différentes galaxies G la vitesse de récession $V_R(G)$ observée d'un point O_T proche de la terre et origine d'un Référentiel inertiel R_T dans lequel la vitesse de la terre est petite devant c, en fonction de l'angle a(G) entre les droites (O_T, O_4) et (O_T,O_G), avec O_4 centre de l'amas du Coma et O_G centre de la galaxie G.

D'après ce graphe, on observe que l'écart entre vitesse de récession maximale et vitesse de récession minimale est maximal pour les galaxies telles que a(G)=0 (5000km/s) puis il diminue notablement.

Or ceci contredit ce 1ier modèle planétaire puisque selon ce modèle pour une galaxie G telle que a(G)=0 la vitesse de G est perpendiculaire à (O_T,O_G) et donc v(G) devrait être proche de 0. Et donc selon ce modèle planétaire l'écart entre vitesse de récession maximale et vitesse de récession minimale devrait augmenter avec a(G). Et donc les observations concernant l'amas du Coma contredisent le modèle dynamique planétaire des amas.

Un 2ième modèle dynamique des amas possible est le modèle généralement utilisé dans le Modèle Standard de Cosmologie (MSC) [(8)] basé sur le théorème du Viriel. On appellera donc ce 2ième modèle *modèle dynamique du Viriel* des amas.

D'après ce modèle, si σ_A est la vitesse de dispersion dans un amas A, M_A étant la masse de l'amas A et R_A son rayon :

$$\frac{GM_A}{R_A} \approx \alpha_A \sigma_A^2 \qquad (56)$$

Dans l'expression précédente α_A est de l'ordre de l'unité et dépend de l'amas, on le prend souvent égal à 1 ou à 2. On peut aussi remplacer dans l'expression précédente R_A par le rayon d'Abel [(7)].

On remarque cependant que l'équation (55) du 1ier modèle dynamique des amas et (56) du 2nd modèle semblent être approximativement en accord avec les observations astronomiques. Nous verrons que ceci est aussi le cas pour le 3ième modèle dynamique des amas suivant.

Nous allons maintenant proposer un 3ième modèle dynamique des amas basé sur notre modèle de matière sombre. Dans ce modèle, G_A étant une galaxie d'un amas A en un point P, on considère seulement le potentiel gravitationnel généré en P par la substance sombre. On appellera donc ce 3ième modèle *modèle dynamique du potentiel sombre* des amas.

Pour obtenir dans ce 3ième modèle le potentiel gravitationnel généré par la substance sombre en tout point de l'amas, il est nécessaire d'exposer les éléments de notre théorie de la matière sombre permettant de calculer le champ gravitationnel **G** et le potentiel gravitationnel U en tout point de l'Univers. On a déjà vu 2 exemples d'adaptation des équations de la mécanique Newtonienne à notre théorie de la matière sombre (Section 2.6 et 2.8) qui sont nécessaires car dans la Théorie de la Gravitation Newtonienne seule la densité baryonique existe et il

n'y a pas d'expansion de l'Univers, ce qui n'est pas le cas dans notre théorie de la matière sombre. Pour obtenir **G**(Q) et U(Q) en un point Q de l'Univers par les équations de la mécanique Newtonienne, pour prendre en compte la densité de substance sombre en P, on doit distinguer le cas où P est à l'intérieur d'une concentration de matière baryonique ou si cela n'est pas le cas :

a)Supposons que P soit un point de l'Univers n'appartenant à aucune concentration de matière baryonique mais appartenant à la substance sombre intergalactique. On sait alors que la densité de substance sombre en P est égale à ρ_0. (Voir section 2.3 et section 2.8). A cause de l'expansion de l'Univers et des propriétés de la substance sombre, on admettra qu'il doit y avoir une symétrie pour tous les points P défini comme précédemment, entraînant qu'on doit prendre $\rho(P)=0$ dans les équations de la mécanique Newtonienne pour obtenir **G**(Q) et U(Q) en un point Q. C'est-à-dire que la substance sombre se comporte comme le vide absolu en P dans les équations de la mécanique Newtonienne, de façon analogue à l'exemple de la section 2.8.

Donc la règle précédente a) justifie qu'entre les amas, la substance sombre se comporte comme le vide absolu, en accord avec les observations astronomiques.

b)Si P appartient à une concentration de matière baryonique importante (amas, galaxie, étoile..), alors la symétrie précédente du a) est brisée: On doit prendre $\rho(P)=\rho_0$ (ou $\rho(P)$ est égale à la densité de la substance sombre en P) dans les équations de la mécanique Newtonienne pour obtenir **G**(Q) et U(Q) en un point Q.

On a donc un 3ième exemple d'adaptation des équations de la mécanique Newtonienne à notre théorie de la matière sombre, qui est dû à un effet de l'expansion de l'Univers, qui n'existait pas dans la Théorie de la gravitation de Newton.

Dans ce 3ième modèle du potentiel sombre, on modélise un amas comme un système (amas idéal) ayant les propriétés suivantes :

a)L'amas est une sphère de rayon R_A, de centre O_A, contenant des galaxies et de la substance sombre, présentant une symétrie sphérique.

b)Pour obtenir **G** et U dans l'amas, permettant d'obtenir les vitesses, trajectoires et énergies des galaxies, celles-ci étant modélisées comme des masses ponctuelles, (identifiées avec leur centre de masse), on peut considérer que l'amas a une densité

homogène égale à ρ_{mA} (A cause de l'équation (53), supposant $Vol_A(H)/Vol_A<<1$ et négligeant la matière baryonique).

Concernant les galaxies de l'amas, vitesses et énergie étant calculées dans le Référentiel inertiel d'origine O_A centre de l'amas, celles-ci sont modélisées par les propriétés :

c)On définit pour une galaxie G_A le ratio $r(G_A)$ tel que $r(G_A)=E_T(G_A)/m(G_A)$ ($E_T(G_A)$ énergie totale de la galaxie G_A et $m(G_A)$ masse de G_A) et r_{AMax} comme étant la valeur maximale de ce ratio. Alors d'après notre modèle d'amas :
(i)Le rayon R_A de l'amas est la distance maximale possible entre une galaxie G_A de l'amas et O_A le centre de l'amas (Avec la condition $r(G_A)\leq r_{AMax}$).

(ii)Les galaxies G_A avec $r(G_A)=r_{AMax}$ ont une densité élevée (non nécessairement homogène) dans tout l'amas. C'est-à-dire qu'en tout point P de l'amas, il existe une galaxie G_A proche de P telle que $r(G_A)=r_{AMax}$. De plus dans le cas où $P=O_A$ centre de l'amas, par symétrie sphérique, **u** étant un vecteur unitaire quelconque, il existe une galaxie G_{A0} proche de O_A telle que $r(G_{A0})=r_{AMax}$ et de plus $\mathbf{V}(G_{A0})$ étant le vecteur vitesse de G_{A0} : $\mathbf{V}(G_{A0}).\mathbf{u}\approx V(G_{A0})$ ($V(G_{A0})$ norme du vecteur $\mathbf{V}(G_{A0})$. Ceci signifie que le vecteur $\mathbf{V}(G_{A0})$ est approximativement colinéaire à **u**).

d)Les galaxies G_A telles que $r(G_A)=r_{AMax}$ conservent leurs énergies et leurs masses, et donc r_{AMax} est constant.

On obtient donc d'après la propriété a) de notre modèle d'amas et l'adaptation des équations de la mécanique Newtonienne à notre théorie de la matière sombre :

$$U(R_A)=-GM_A/R_A \qquad (57a)$$

$$\mathbf{G}(R_A)=-GM_A/R_A^2\ \mathbf{u} \qquad (57b)$$

De plus, G_A étant une galaxie de l'amas à une distance r du centre de l'amas, $V(G_A)$ étant sa vitesse en norme (Dans le Référentiel inertiel de centre O_A), $m(G_A)$ étant sa masse et $U(r)$ étant le potentiel gravitationnel en r, l'énergie totale de G_A $E_T(G_A)$ est donc :

$$E_T(G_A)=(1/2)m(G_A)V(G_A)^2+m(G_A)U(r) \qquad (58)$$

De plus, appliquant le théorème de Gauss, d'après la propriété a) de notre modèle d'amas M(r) étant la masse de la sphère de centre O_A et de rayon r, le champ gravitationnel **G**(r) est alors :

$$\mathbf{G}(\mathrm{r}) = -\mathrm{G}\frac{\mathrm{M(r)}}{\mathrm{r}^2}\mathbf{u} \qquad (59)$$

D'après la propriété b) de notre modèle d'amas, $M(r)=(4/3)\pi r^3\rho_{mA}$ et donc :

$$\mathbf{G}(r) = -G\frac{4}{3}\pi r\rho_{mA}\mathbf{u} \qquad (60)$$

Puisque par définition **G**=-**Grad**(U), on obtient, C_{AU} étant une constante positive à un âge donné de l'Univers:

$$U(r)=G(4/6)\pi r^2\rho_{mA}-C_{AU} \qquad (61)$$

Cette équation peut s'écrire aussi, (M(r) étant la masse de la sphère de centre O_A et de rayon r):

$$U(r)=GM(r)/2r-C_{AU} \qquad (62)$$

On a donc, $M_A=M(R_A)$ étant la masse de l'amas, utilisant l'équation (57a) :

$$\frac{GM_A}{2R_A} - C_{AU} = -\frac{GM_A}{R_A} \qquad (63)$$

Et donc on obtient finalement, M_A et R_A dépendant à priori de t, âge de l'Univers:

$$C_{AU} = \frac{3}{2}\frac{GM_A(t)}{R_A(t)} \qquad (64)$$

Et donc on obtient, utilisant l'équation (58), pour une galaxie à une distance r de O_A :

$$\frac{1}{2}m(G_A)V(G_A)^2 + Gm(G_A)\frac{M(r)}{2r} = E_T(G_A) + m(G_A)C_{AU} \quad (65a)$$

De plus, puisque par définition dans la propriété c) de notre modèle d'amas on a défini r_{AMax} comme le ratio maximal de $E_T(G_A)/m(G_A)$, on a pour toute galaxie G_A :

$$\frac{1}{2}V(G_A)^2 + G\frac{M(r)}{2r} \leq r_{AMax} + C_{AU} \qquad (65b)$$

On va considérer maintenant les cas d'une galaxie G_{Al} aux limites de l'amas ($r=R_A$) et celui d'une galaxie G_{A0} en O_A ($r=0$).

D'après la propriété c)(i) de notre modèle d'amas, le rayon R_A de l'amas est la distance maximale possible entre une galaxie G_A de l'amas et O_A centre de l'amas avec la condition $r(G_A) \leq r_{AMax}$. Considérant l'inégalité précédente (65b), on a donc pour une galaxie G_{Al} aux limites de l'amas $V(G_{Al})=0$ et :

$$G\frac{M(R_A)}{2R_A} = r_{AMax} + C_{AU} \qquad (66)$$

Pour une galaxie G_{A0} au centre de l'amas ($r=0$), et telle que $r(G_{A0})=r_{AMax}$, d'après l'équation (65a) :

$$\frac{1}{2}V(G_{A0})^2 = r_{AMax} + C_{AU} \qquad (67)$$

Et donc d'après l'équation (65b), $V(G_{A0})$ est égale à la vitesse maximale des galaxies dans l'amas V_{MA}. Et donc d'après les équations ((66) et (67), on obtient :

$$V_{MA}^2 = \frac{GM_A}{R_A} \qquad (68a)$$

De plus d'après la propriété c) de notre modèle d'amas, **u** étant un vecteur unitaire quelconque, il existe une galaxie G_{A0} proche de O_A telle que $r(G_{A0})=r_{AMax}$ et $\mathbf{V}(G_{A0}).\mathbf{u} \approx V(G_{A0}) \approx V_{MA}$. Et donc si on définit $V_{MA}(\mathbf{u})$ comme étant la valeur maximale de $\mathbf{V}(G_A).\mathbf{u}$, considérant toutes les galaxies G_A de l'amas, $V_{MA}(\mathbf{u})=V_{MA}$.

Dans les observations astronomiques, G_A étant une galaxie de l'amas, **u** étant le vecteur unitaire de la direction d'observation, on mesure $V_T(G_A)(\mathbf{u})=\mathbf{V}_T(G_A).\mathbf{u}$, composante sur **u** de la vitesse $\mathbf{V}_T(G_A)$, vitesse de G_A dans un Référentiel inertiel R_T d'origine O_T proche de la terre, et dans lequel la vitesse de la terre est petite devant c. On obtient alors $V_{MA}(\mathbf{u})$ par l'expression suivante, avec des notations évidentes :

$V_{MA}(\mathbf{u})=(1/2)[Max_A(V_T(G_A)(\mathbf{u}))-min_A(V_T(G_A)(\mathbf{u}))]$ (68b)

Etant donné que notre modèle d'amas défini par les propriétés a)b)c)d) est seulement approximatif, on introduit une constante β_A dépendant de l'amas et du vecteur **u**, telle que, $V_{MA}(\mathbf{u})$ étant défini par l'équation précédente (68b) :

$$V_{MA}(\mathbf{u})^2 = \beta_A \frac{GM_A}{R_A} \qquad (69)$$

On obtient donc aussi dans notre 3ième modèle une équation analogue aux équations (55) et (56). Cependant, notre 3ième modèle prévoit que la vitesse des galaxies est maximale pour les galaxies proches du centre de l'amas, en accord avec les observations astronomiques [7], ce qui n'est pas le cas du modèle du Viriel.

De plus, A_i et A_j étant 2 amas, utilisant $M_{Ai}=(4/3)\pi\rho_{mAi}R_{Ai}^3$, on obtient immédiatement, utilisant l'équation (68a) :

$$\frac{\rho_{mAj}}{\rho_{mAi}} = (\frac{V_{MAj}}{V_{MAi}})^2 (\frac{R_{Ai}}{R_{Aj}})^2 \qquad (70a)$$

Or on a vu dans l'équation (53) que si A_i et A_j correspondent au même décalage Cosmologique z, si de plus on avait $Vol_{Ai}(H)/Vol_{Ai}<<1$ et $Vol_{Aj}(H)/Vol_{Aj}<<1$, alors ρ_{mAj}/ρ_{mAi} devait être proche de l'unité.

Considérons par exemple l'amas de la Vierge A2 ($z_2<0{,}01$) et l'amas du Coma A4 ($z_4=0{,}03$). D'après les observations astronomiques, considérant les galaxies NGC4388 et IC3258 on obtient $V_{MA2}(\mathbf{u}_2)=1500$ km/s [11]. De plus on peut prendre $R_{A2}=2{,}2$Mpc [14]. Pour l'amas du Coma on peut prendre $V_{MA4}(\mathbf{u}_4)=2500$ km/s [10], et $R_{A4}=12{,}5$ millions a.l=3,8 Mpc [13]. (On a pris une valeur médiane parmi les valeurs de R_{A4} données dans la littérature scientifique). On obtient alors avec les valeurs précédentes, utilisant l'équation (70a), $\rho_{mA4}/\rho_{mA2}=0{,}93$. L'accord entre cette valeur et la prédiction théorique (ρ_{mA4}/ρ_{mA2} proche de 1) est assez bon car une erreur de 10% sur l'un des paramètres entraîne une erreur de 20% sur le résultat final.

Pour obtenir l'évolution de la masse et du rayon d'un amas, on utilise que selon la propriété d) de notre modèle d'amas, r_{AMax} se conserve. Puisque d'après l'équation (64), remplaçant t par le décalage Cosmologique z, $C_{AU}=(3/2)GM_A(z)/R_A(z)$, d'après l'équation (66) on obtient :

$$r_{AMax} = -G\frac{M_A(z)}{R_A(z)} \qquad (70b)$$

Et donc puisque d'après la propriété d) de notre modèle r_{AMax} se conserve, $M_A(z)/R_A(z)$ se conserve aussi. De plus, $M_A(z)=(4/3)\pi R_A(z)^3\rho_{mA}(z)$ avec d'après l'équation (53), supposant $Vol_A(H)/Vol_A<<1$, $\rho_{mA}(z)\approx\rho_0(z)$, $\rho_0(z)$ correspondant à la densité de la substance sombre intergalactique pour un Univers correspondant à un décalage Cosmologique z. Et donc d'après l'équation (70b) $M_A(z)$ et $R_A(z)$ évoluent en $1/\rho_0(z)^{1/2}$. Or on verra dans cette section que $\rho_0(z)\approx\rho_0(0)(1+z)^3$. Et donc on a :

$M_A(z)\approx M_A(0)/(1+z)^{3/2}$

$R_A(z)\approx R_A(0)/(1+z)^{3/2}$ (70c)

Par exemple, on obtient $M_A(2)\approx M_A(0)/5$ et $M_A(1)\approx M_A(0)/3$. Ce qui veut dire que l'amas du Coma était approximativement 3 fois moins massif pour l'Univers correspondant au décalage Cosmologique z=1.

Le fait qu'on observe plus de matière sombre prés du centre des amas s'expliquerait par le fait que les galaxies à courbe de rotation plate les plus massives sont prés du centre des amas.

La densité de la substance sombre intergalactique dépend de l'âge de l'Univers. On notera $\rho_0(0)$ la densité à l'âge actuel de l'Univers (z=0) et $\rho_0(z)$ la densité correspondant à un décalage vers le rouge Cosmologique z. L'estimation de la densité intergalactique $\rho_0(0)$ obtenue à l'aide des modèles dynamiques des amas exposés précédemment permet d'autres prédictions théoriques confirmant la validité de notre modèle de matière sombre.

En effet d'après l'équation (18), pour une galaxie correspondant au 1^{ier} modèle, le rayon R_S de cette galaxie est donnée par, à l'âge actuel de l'Univers :

$$R_S = \left(\frac{2k_0T}{4\pi G\rho_0(0)}\right)^{1/2} \qquad (70d)$$

Et donc, v étant la vitesse orbitale des étoiles dans cette galaxie, d'après l'équation (10) :

$$R_S = \frac{v}{(4\pi G\rho_0(0))^{1/2}} \qquad (70e)$$

Or notre modèle dynamique des amas permet d'obtenir une estimation de $\rho_0(0)$. Considérons par exemple le cas de la Voie Lactée. Pour obtenir $\rho_0(0)$, on applique le 3ième modèle du Potentiel sombre des amas à l'amas de la Vierge ($z<0,01$). D'après l'équation (68) on obtient, ρ_{mA} étant la densité moyenne de l'amas A, utilisant $M_A=\rho_{mA}(4/3)\pi R_A^3$:

$$\rho_{mA} = \frac{1}{(4/3)\pi G}\frac{V_{MA}^2}{R_A^2} \qquad (70f)$$

Si A est un amas avec z_A très proche de 0, avec dans l'équation (53), $Vol_A(H)<<Vol_A$, on a alors $\rho_{mA}\approx\rho_0(0)$. On obtient, remplaçant $\rho_0(0)$ dans l'équation (70e) par ρ_{mA} donné par l'équation (70f) :

$$R_S \approx \frac{v}{\sqrt{3}}\frac{R_A}{V_{MA}} \qquad (70g)$$

Prenant comme amas l'amas de la Vierge A2, avec les données expérimentales précédentes $R_2\approx2,2$Mpc =7,3 millions a.l, $V_{M2}\approx1500$ km/s et $v\approx210$ km/s on trouve un rayon sombre pour la Voie Lactée $R_{SM.W}\approx550000$ a.l. Ce résultat est non seulement cohérent mais aussi il donne un rayon sombre pour la Voie Lactée supérieur à la distance entre le centre de la Voie Lactée et les nuages de Magellan (Environ 250000 a.l) [(14)] .

On sait qu'on observe un effet appelé gravitational lensing, prévu par la Relativité Générale, qui est la déviation de rayons lumineux dus à la masse des amas. Puisqu'on a vu que la substance sombre entre les amas se comportait comme le vide absolu du point de vue gravitationnel, on peut appliquer la Relativité Générale pour obtenir la déviation d'un rayon lumineux par l'amas, comme si celui-ci était immergé dans le vide absolu. Il serait intéressant de comparer la masse obtenue par le gravitional lensing avec la masse prédite par le 3ième modèle du potentiel sombre exposé précédemment.

De plus, on sait que l'étude du CMB montre l'existence d'anisotropies dues à la densité de substance sombre dans l'Univers. On peut distinguer 2 types de densité de substance sombre: Le premier type de densité est la densité de la

substance sombre ayant un effet gravitationnel. Alors pour obtenir la densité moyenne de substance sombre dans l'Univers, on doit seulement prendre en compte la densité de substance sombre dans les amas On obtient alors très facilement cette densité $\rho_{mUG}(z)$ en fonction du volume de l'Univers $Vol_U(z)$, du volume total des amas $Vol_U(A)(z)$ dans l'Univers et de la densité de la substance sombre intergalactique $\rho_0(z)$ (correspondant à un décalage Cosmologique z).

$$\rho_{mUG}(z) = \rho_0(z)\frac{Vol_U(A)(z)}{Vol_U(z)} \qquad (70h)$$

Le 2ième type de densité moyenne dans l'Univers prend en compte toute la matière sombre de l'Univers. Nous allons maintenant obtenir cette dernière densité moyenne $\rho_{mU}(z)$.

Comme dans le cas des amas, on définit $Vol_U(z)$ volume de l'Univers correspondant au décalage z et $Vol_U(H)(z)$ le volume des halos sombres des galaxies ayant une densité de substance sombre en $1/r^2$.

On obtient alors comme on a obtenu l'équation (53), négligeant la densité due à la matière baryonique, $\rho_{mU}(z)$ étant la densité moyenne de l'Univers :

$$\rho_{mU}(z)=2\rho_0(z)(Vol_U(H)(z)/Vol_U(z))+\rho_0(z) \qquad (70i)$$

(Si on tient compte de la substance sombre dans laquelle les halos sombres sont superposés on doit remplacer dans l'équation précédente le facteur 2 par le facteur 3)

Avec l'approximation $Vol_U(H)(z)/Vol_U<<1$, on obtient :

$$\rho_{mU}(z)=\rho_0(z) \qquad (70j)$$

On remarque aussi que si on suppose que la masse sombre de l'Univers se conserve, puisqu'on a un facteur d'expansion 1+z entre l'âge de l'Univers correspondant à un décalage Cosmologique z et l'âge actuel de l'Univers :

$$\rho_{mU}(z)=\rho_{mU}(0)(1+z)^3 \qquad (70k)$$

Et donc d'après l'équation (70j) :

$$\rho_0(z)=\rho_0(0)(1+z)^3 \qquad (70l)$$

On a vu qu'on pouvait obtenir une estimation de $\rho_0(0)$ et donc obtenir une estimation de $\rho_0(z)$ grâce à l'équation précédente, qu'on a utilisée dans l'étude sur l'évolution des amas.

Dans ce qui précède on a supposé un Univers fini mais on généralise les équations précédentes même dans le cas d'un Univers infini.

2.10 Formation des grandes structures de l'Univers.

D'après le MSC les galaxies et les étoiles et plus généralement les grandes structures de l'Univers observées aujourd'hui se sont formées à cause d'hétérogénéités de la densité de l'Univers primordial. Cependant, si on estime les hétérogénéités baryoniques de l'Univers primordial, elles sont bien insuffisantes pour expliquer les grandes structures observées aujourd'hui. Et donc on admet dans le MSC que ces hétérogénéités en densité étaient dues à la matière sombre.

D'après notre Théorie de la matière sombre, ces hétérogénéités sont dues en généralisant notre hypothèse introduite dans la section précédente:

A cause des propriétés de la substance sombre et de l'expansion de l'Univers, dans l'Univers primordial, si un point P n'appartient pas à une concentration de matière baryonique (la densité de la substance sombre étant supposée constante et la densité de la matière baryonique est elle aussi homogène presque partout), alors on doit prendre en P dans les équations Newtoniennes de la gravitation $\rho_{SN}(P)=0$ comme densité de la substance sombre et $\rho_{BN}(P)=0$ comme densité de la matière baryonique en P.

On doit prendre dans ces équations $\rho_{SN}(P)=\rho_0$, ρ_0 étant la densité réelle de la substance sombre et $\rho_{BN}(P)=\rho_B(P)$, $\rho_B(P)$ étant la densité réelle en P de la matière baryonique si P appartient à une concentration de matière baryonique.

L'hypothèse précédente amplifie donc l'effet gravitationnel des hétérogénéités de la matière baryonique, et donc pourrait être à l'origine des grandes structures de l'Univers observées aujourd'hui.

3.NOUVEAU MODELE COSMOLOGIQUE

3.1 Introduction.

Dans la partie précédente, on a exposé une théorie interprétant l'ensemble des observations astronomiques liées à la matière sombre. On a vu aussi dans la section 2.5 que le concept de substance sombre constituant la matière sombre

qu'on a introduit conduisait à la possibilité d' un Univers sphérique en expansion. Dans cette 2ième partie, nous allons proposer un nouveau modèle Cosmologique basé à la fois sur la forme géométrique de l'Univers introduit dans la 1ière partie (sphérique) et sur l'interprétation physique du Référentiel de Repos du CMB (RRC). Nous verrons qu'avec ce nouveau modèle Cosmologique, on peut définir des distances qui sont totalement analogues aux distances utilisées en Cosmologie par le MSC (distance angulaire, distance luminosité, distance temps-arrière..), et aussi une constante de Hubble qui a la même signification que dans le MSC. Notons que ce nouveau modèle Cosmologique est cependant beaucoup plus simple et compréhensible que le MSC. Nous proposerons dans ce nouveau modèle Cosmologique 2 modèles mathématiques d'expansion possibles, c'est-à-dire permettant d'obtenir la valeur du décalage Cosmologique z. Le 1ier modèle est basé comme le MSC sur les équations de la Relativité Générale. Comme le MSC il nécessite l'existence d'une énergie sombre, et il donne les mêmes valeurs des distances utilisées en Cosmologie et de la constante de Hubble que celles obtenues dans le MSC. Le 2nd modèle mathématique est beaucoup plus simple, mais malgré sa grande simplicité, il donne des valeurs de la constante de Hubble et des distances Cosmologiques en excellent accord avec les observations astronomiques. De plus ce 2nd modèle mathématique a la propriété remarquable de ne pas nécessiter l'existence d'une énergie sombre. Nous verrons cependant que notre théorie de la matière sombre et de l'énergie sombre prévoit l'existence d'une énergie sombre dans l'Univers, qui est l'énergie interne de la substance sombre qu'on a introduit dans la 1ière partie, et qu'on a modélisé comme un gaz parfait. Il apparaîtra que le nouveau modèle Cosmologique proposé demeure compatible avec la Relativité Restreinte et la Relativité Générale, car le Référentiel de Repos du CMB, sur lequel est basé notre le nouveau modèle Cosmologique, ne peut pas être détecté par les expériences en laboratoires usuelles de physique mais seulement par l'observation du CMB. Nous admettrons donc dans cette partie comme dans la précédente la validité de la Relativité Restreinte et celle de la Relativité Générale (localement) même si cela n'est pas la seule possibilité [15][16].

Comme dans la 1ière partie, nous verrons dans cette 2ième partie que le nouveau modèle Cosmologique proposé exposé dans cet article demeure compatible avec le MSC[3][4][5] pour l'interprétation de la plupart des phénomènes Cosmologiques non liés à l'énergie sombre ni à la matière sombre, par exemple l'abondance des éléments primordiaux, l'apparition des particules baryoniques (pour le même z que dans le MSC), la formation et l'apparition des galaxies (pour le même z que dans le MSC), l'apparition du CMB (pour le même z que dans le MSC), l'évolution du CMB (en 1/(1+z))….

3.2 Interprétation physique du RRC. Référentiels Cosmologiques local et Universel.

On rappelle que le CMB (appelé rayonnement fossile en Français) présente un effet Doppler qui s'annule mesuré dans un Référentiel appelé Référentiel de Repos du CMB (RRC). Or ce RRC n'a pas d'interprétation physique dans le MSC. Nous allons ici en donner une interprétation physique, qui permet d'obtenir un nouveau modèle Cosmologique basé aussi sur le modèle d'Univers sphérique introduit dans la section précédente. Ce nouveau modèle Cosmologique permet de définir des variables Cosmologiques (temps Cosmologique, distances utilisées en Cosmologie, Constante de Hubble) en accord avec leur définition dans le MSC. Pour obtenir la valeur du décalage Cosmologique z, ce qui est fondamental dans notre nouveau modèle Cosmologique comme dans le MSC, notre nouveau modèle Cosmologique propose 2 modèles mathématiques d'expansion. Le 1^ier^ modèle mathématique d'expansion est basé sur la Relativité Générale comme le MSC. D'après ce 1^ier^ modèle mathématique, les variables Cosmologiques, et notamment le décalage Cosmologique z, sont données par les mêmes expressions mathématiques que dans le MSC, mais pour un Univers plat car dans le nouveau modèle d'expansion de l'Univers exposé ici, l'Univers est plat. Le 2ième modèle mathématique possible est beaucoup plus simple. Malgré cela ses prédictions astrophysiques théoriques sont en accord avec l'observation.

Concernant l'interprétation physique du RRC :

-Premièrement il est naturel qu'en tout point de l'Univers on puisse définir un RRC. On peut supposer alors qu'ils ont tous des axes respectivement parallèles.

-Deuxièmement on peut penser que le RRC permet de définir très simplement le temps Cosmologique, identifié à l'âge de l'Univers. La définition la plus simple serait que le temps des RRC, c'est-à-dire donné par des horloges immobiles dans le RRC, soit le temps Cosmologique. Et on verra que cette hypothèse très simple est en accord avec les observations astrophysiques. En effet, cette hypothèse entraîne que le temps Cosmologique est identique avec une très bonne approximation au temps de notre terre. En effet supposons que le temps Cosmologique est le temps du RRC. On appellera alors le RRC *Référentiel local Cosmologique* et on le désignera par R_{LC}. Considérons une Horloge H_S donnant le temps du Référentiel inertiel R_S lié au soleil et V_S la vitesse de R_S par rapport à R_{LC}. D'après la Relativité Restreinte, les transformations entre R_S et R_{LC} sont les transformations de Lorentz et donc si T_S est un temps mesuré par H_S correspondant à un temps cosmologique T_C de R_{LC} on a $T_S=T_C(1-V_S^2/c^2)^{1/2}$. Et donc dans le cas où $V_S<<c$,

(Ce qui est le cas puisqu'on sait que V_S est de l'ordre de 300km/s) on a $T_S \approx T_C$. Et donc le temps donné par le Référentiel lié au soleil (et donc celui donné par les horloges de notre terre) est approximativement égal au temps Cosmologique. On remarque qu'il est donc complètement impossible que localement tous les Référentiels inertiels (avec des transformations de Lorentz entre eux) donnent le temps Cosmologique (âge de l'Univers) et donc il n'était pas du tout évident que le temps de notre système solaire soit le temps Cosmologique.

-Troisièmement on sait que d'après la Relativité Restreinte, la vitesse d'un photon dans le RRC où il se trouve se conserve, en vecteur et en norme. On appellera *vitesse locale* cette vitesse. Le problème est l'évolution de cette vitesse locale lorsque le photon voyage dans l'Univers. Il est clair que l'hypothèse la plus simple et la plus naturelle est que cette vitesse locale se conserve, le photon voyageant dans tout l'Univers, et donc se trouvant dans de nombreux RRC différents. Là encore on verra que cette hypothèse très simple conduit à des résultats en accord avec l'observation. En particulier on verra qu'elle permet de justifier très simplement l'effet prédit par le MSC (et illustré par l'observation) de l'expansion de l'Univers sur les longueurs d'onde des photons et la distance entre 2 photons de vitesse parallèle.

Ainsi, on exprime les propriétés physiques précédentes dans le Postulat 3 suivant :

Postulat 3 :

a)En tout point de l'Univers on peut définir un RRC. On suppose que les RRC ont des axes respectivement parallèles.

b)Le temps Cosmologique (identifié à l'âge de l'Univers), est donné par les horloges des RRC.

c)La *vitesse locale* d'un photon, c'est-à-dire mesurée dans le RRC dans lequel il se trouve, se conserve en vecteur et en norme, le photon voyageant dans tout l'Univers.

Etant donné son importance en Cosmologie, on appellera aussi le RRC *Référentiel Cosmologique local*.

A cause du Postulat 3b) puisque le Référentiel inertiel lié au soleil R_S est animé d'une vitesse $v_S << c$ par rapport au RRC, le temps de ce Référentiel R_S, obtenu par la Relativité Restreinte, est très proche du temps du RRC qui est le

temps Cosmologique, ce qui est en accord avec l'observation. Donc le Postulat 3b) justifie que le temps de R_S peut être identifié au temps Cosmologique ce qui n'avait à priori rien d'évident. On remarque que d'après les observations astronomiques, localement (C'est-à-dire prés de la Voie Lactée), les vitesses locales des galaxies et des étoiles (c'est-à-dire les vitesses mesurées dans le RRC) sont petites devant c. Ceci entraîne donc que localement prés de la Voie Lactée, toutes les étoiles donnent un temps proche du temps Cosmologique, à cause du Postulat 3b).

Il est naturel de supposer que la propriété précédente peut être généralisée à tout l'Univers, et donc on obtient que le temps donné par toutes les étoiles de l'Univers (et toutes les planètes) sont tous très proches du temps Cosmologique.

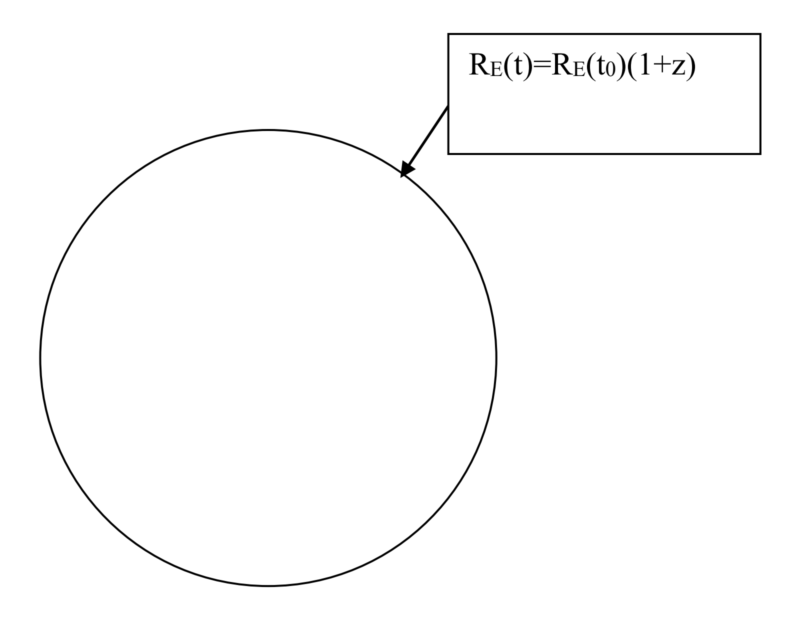


Figure 3:Le modèle sphérique de l'Univers en expansion .

Il nous faut maintenant définir complètement les RRC. On a vu dans la section précédente que l'Univers devait être d'un volume fini, et on supposera que ce volume est une sphère de centre O. On rappelle cependant qu'on peut généraliser ce qui va suivre pour de nombreux modèles d'Univers fini, avec des

frontières .On suppose donc que l'Univers est une sphère en expansion de centre O, et que le rayon de cette sphère est noté $R_E(t)$, t étant le temps Cosmologique. En accord avec le MSC, on suppose $R_E(t)=R_E(t_0)(1+z)$, 1+z étant le facteur d'expansion de l'Univers entre t_0 et t. Nous verrons plus loin comment obtenir 1+z.

Pour définir complètement les RRC, on introduit un nouveau type de Référentiel R_C, appelé *Référentiel Cosmologique Universe)*, ayant son origine en O. Ce Référentiel Cosmologique Universel R_C sera utilisé pour définir les variables Cosmologiques. En particulier, on définit le temps de ce Référentiel R_C comme le temps Cosmologique des RRC. De plus, on suppose que ses axes sont respectivement parallèles à ceux des RRC et que localement, il donne les mêmes distances que les RRC. Cependant le Référentiel R_C a des axes permettant de mesurer toutes les distances entre 2 points quelconques de l'Univers, alors que les RRC ne définissaient que des distances locales. On verra qu'on peut exprimer toutes les distances Cosmologiques classiques (Notamment les différents types de distances utilisées en Cosmologie comme la distance comobile, la distance luminosité, la distance angulaire…) en fonction des distances dans R_C , du temps de R_C (Temps Cosmologique) et du décalage spectral dû à l'expansion z.

Nous allons maintenant définir des points particuliers très importants du Référentiel Cosmologique R_C, appelés *points comobiles* de la sphère en expansion.

On suppose que P(t) est un point de la surface de la sphère enflant, t, temps Cosmologique, **OP**(t) demeurant dans la même direction **u**, **u** vecteur de R_C.

Un point comobile A(t) de la sphère en expansion est défini par :

-A(t) demeure sur le segment [O,P(t)].
-OA(t)=aOP(t), a étant une constante appartenant à [0,1] (71)

Et donc en particulier O et P(t) sont des points comobiles de la sphère en expansion. De plus, si A(t) et B(t) sont 2 points comobiles appartenant tous 2 à un rayon [O,P(t)], si t_1 et t_2 sont 2 âges de l'Univers, si $1+z=OP(t_2)/OP(t_1)$ (1+z est le facteur d'expansion de l'Univers entre t_1 et t_2) alors on obtient immédiatement les 2 relations entre les 2 points comobiles:

$A(t_2)B(t_2)=(1+z)A(t_1)B(t_1)$ (72)

Et :

$[A(t_2),B(t_2)]//[A(t_1),B(t_1)]$ (73)

(On note classiquement, P,Q étant 2 points de R_C, PQ est la distance mesurée dans R_C, [P,Q] est le segment d'extrémités P et Q, et (P,Q) est la droite contenant P et Q)

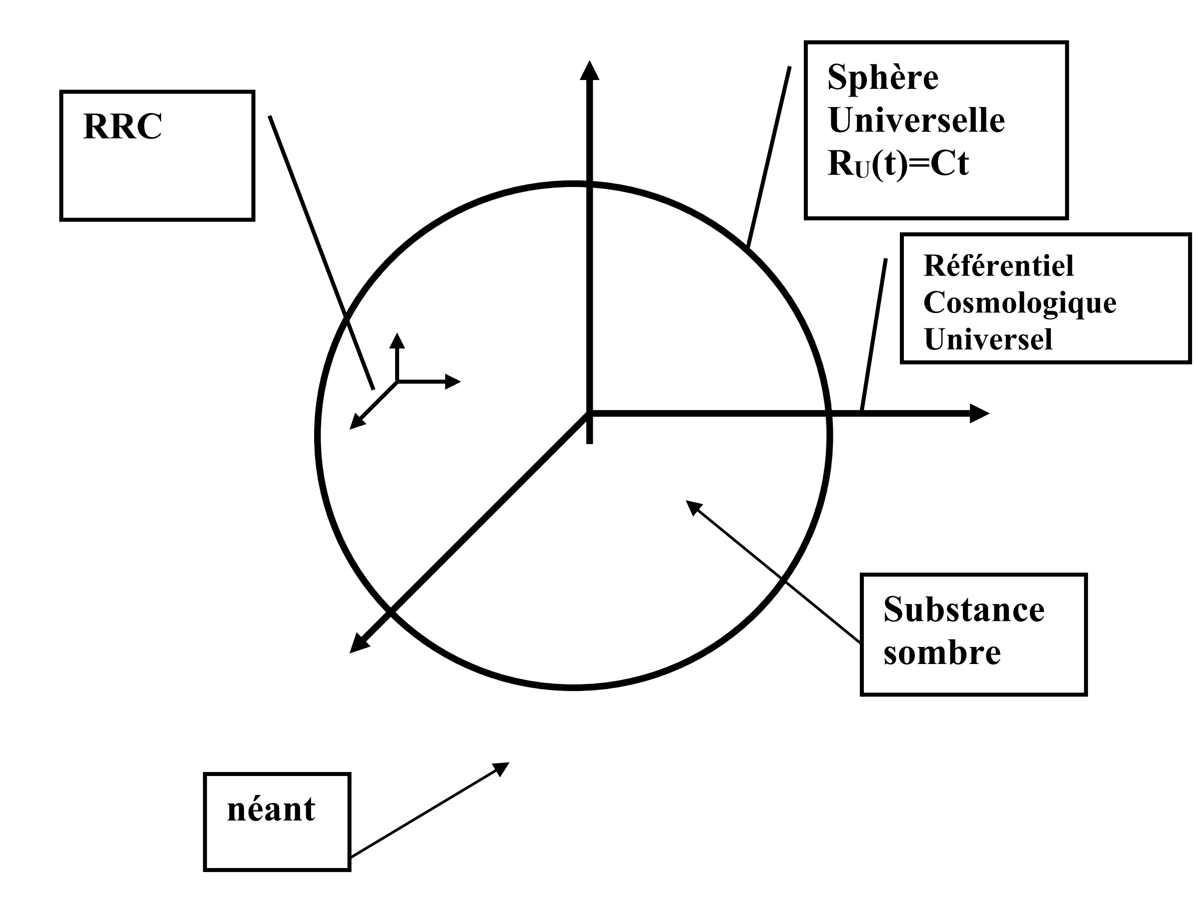


Figure 4 :Nouveau modèle Cosmologique.

Nous allons montrer qu'utilisant le Théorème de Thalès, on obtient les 2 précédentes relations (72) et (73) A(t) et B(t) étant n'importe quelle paire de points

comobiles de la sphère enflant (définis par les relations (71)), n'appartenant pas nécessairement au même segment [O,P(t)].

Considérons 2 points comobiles quelconques (distincts de O) $A(t_1)$ et $B(t_1)$, à un temps Cosmologique t_1. On suppose que A(t) appartient au segment [O,P(t)], P(t) appartenant à la surface de la sphère en expansion, et de même B(t) appartient au segment [O,Q(t)].

t_2 étant un temps Cosmologique supérieur à t_1, d'après les relations (71), $O,B(t_1)$ et $B(t_2)$ sont alignés, de même que $O,A(t_1)$ et $A(t_2)$. On considère alors le triangle $(O,A(t_2),B(t_2))$. Dans ce triangle, d'après les relations (71), 1+z étant le facteur d'expansion de l'Univers entre t_1 et t_2:

$$OA(t_2)/OA(t_1)=OP(t_2)/OP(t_1)=1+z \qquad (74)$$

De même :

$$OB(t_2)/OB(t_1)=1+z \qquad (75)$$

Donc :

$$OA(t_2)/OA(t_1)=OB(t_2)/OB(t_1) \qquad (76)$$

Appliquant la réciproque du Théorème de Thalès au triangle $(O,A(t_2),B(t_2))$ on obtient bien les relations (72) et (73):

$$A(t_2)B(t_2)=(1+z)A(t_1)B(t_1) \qquad (77)$$

$$[A(t_2),B(t_2)]//[A(t_1),B(t_1)] \qquad (78)$$

Les propriétés précédentes, valables pour tout couple de points comobiles, sont très remarquables et très importante dans le nouveau modèle d'expansion proposé par notre théorie de la matière sombre et de l'énergie sombre.

On remarque que si A(t) est un point comobile d'un segment [O,P(t)], d'après les relations (71), si $V_P(t)$ est la vitesse de P(t) mesurée dans le Référentiel Cosmologique Universel R_C et $V_A(t)$ celle de A(t), avec les mêmes notations que dans la relation (71) on obtient :

$$V_A(t)=aV_P(t) \qquad (79a)$$

L'introduction du concept de points comobiles de la sphère en expansion définis par les relations (71) permet de compléter la définition des RRC, dans le Postulat 4 suivant :

Postulat 4 :

a)L'Univers est une sphère en expansion.

b)Les origines des Référentiels Cosmologiques locaux (RRC) sont les points comobiles de la sphère en expansion.

Il nous faut maintenant montrer comment on obtient dans le nouveau modèle d'expansion de l'Univers le facteur d'expansion 1+z. Nous allons proposer 2 modèles mathématiques possibles, à l'intérieur du nouveau modèle d'expansion de notre théorie, permettant d'obtenir 1+z. Les 2 modèles mathématiques sont différents et ne donnent pas la même expression de 1+z. Cependant, on verra que tous deux sont approximativement en bon accord avec les observations astronomiques. Déterminer le modèle qui a les prédictions les plus proches des observations expérimentales sera un élément pour déterminer le meilleur d'entre les 2 modèles.

Dans le 1^ier^ modèle mathématique d'expansion de l'Univers , 1+z est obtenu comme dans le MSC, pour un Univers plat: On applique les équations de la Relativité Générale, supposant que la densité de matière sombre, baryonique et d'énergie sombre ont la même valeur que dans le MSC et sont homogènes dans tout l'Univers et que l'Univers est plat. Et donc dans ce 1^ier^ modèle mathématique le facteur d'expansion 1+z est identique à celui obtenu dans le MSC pour un Univers plat. On verra que la conséquence de ceci est que le 1^ier^ modèle mathématique prédit des distances utilisées en Cosmologie et une constante de Hubble identiques à celles prédites par le MSC, pour un observateur situé suffisamment loin des frontières de l'Univers, avec une petite vitesse locale.

Cependant, à priori, il est possible que le facteur d'expansion 1+z de l'Univers ne soit pas obtenu par les équations de la Relativité Générale. Il est possible que tout comme la vitesse de la lumière, la vitesse $V_E(t)$ des frontières de l'Univers mesurée dans le Référentiel Universel Cosmologique R_C (définie par $V_E(t)=d(R_E(t))/dt$, t temps Cosmologique) soit égale à une constante C. A priori, C n'a aucune raison d'être égale ou inférieure à la vitesse de la lumière c. En effet c'est seulement la vitesse locale des photons qui est égale à c (en norme). Et donc dans le 2nd modèle mathématique, la vitesse des frontières de la sphère mesurée dans R_C est égale à une constante C. (Nous verrons plus loin comment donner une

limité inférieure à C). Et nous verrons aussi que ce 2nd modèle mathématique d'expansion, malgré sa simplicité, est en accord avec toutes les observations astrophysiques. Alors si P(t) est toujours un point comobile de la surface de la sphère, on a OP(t)=Ct. Et donc on a une expression très simple du facteur d'expansion 1+z : Entre t et t_0 ($t<t_0$), le facteur d'expansion 1+z est donné par :

$$1+z=(Ct_0)/(Ct)=t_0/t \qquad (79b)$$

On a vu que le MSC nécessitait l'existence d'une énergie sombre, tout comme le 1ier modèle mathématique d'expansion de l'Univers. Or dans le 2nd modèle mathématique d'expansion de l'Univers de notre théorie de la matière sombre et de l'énergie sombre, cette énigme est résolue car ce modèle mathématique ne nécessite pas l'existence d'une énergie sombre. Et ceci est aussi un point très attractif de ce second modèle.

Dans notre nouveau modèle d'expansion de l'Univers on peut montrer que tout comme dans le modèle d'expansion du MSC, si 2 photons ph1 et ph2 se déplacent dans la même direction sur la même droite en direction de O origine de R_C, alors entre les temps Cosmologiques t_1 et t_2, la distance entre les 2 photons et la longueur d'onde de chaque photon s'accroissent du facteur d'expansion entre t_1 et t_2 1+z. Ceci étant vrai dans les 2 modèles mathématiques d'expansion. Nous verrons plus loin qu'il est possible de remplacer O par n'importe que point comobile O' de la sphère en expansion

En effet considérons 2 photons ph1 et ph2. On prendra les notations suivantes : Au temps Cosmologique t ph1 se trouve au point ph1(t) de R_C et ph2 au point ph2(t) de R_C. On suppose aussi qu'au temps Cosmologique t_1 ph1(t_1) coïncide avec le point comobile $A_1(t_1)$ et ph2(t_1) avec le point comobile $A_2(t_1)$. On suppose donc qu'il existe un vecteur unitaire **u** de R_C tel que $A_1(t_1)$ et $A_2(t_1)$ appartiennent au même segment [O,P(t)] avec (O,P(t)) parallèle à **u** et que les vitesses locales de ph1 et ph2 sont identiques et égales à **c**=c**u**.

Soit 1+dz le facteur d'expansion de l'Univers entre t_1 et t_1+dt. On a alors, d'après les propriétés des points comobiles (77) :

$$A_1(t_1+dt)A_2(t_1+dt)=(1+dz)A_1(t_1)A_2(t_1)=(1+dz)\ ph_1(t_1)ph2(t_1) \qquad (79c)$$

De plus puisque la vitesse locale des photons est égale à c (Postulat 3):

$$A_1(t_1+dt)ph1(t_1+dt)=A_2(t_1+dt)ph2(t_1+dt)=cdt \qquad (79d)$$

D’après les propriétés exprimées dans l’équation (77) des points comobiles, les vitesses locales de ph1(t) et ph2(t) étant aussi parallèles à **u**, on a donc O, $A_1(t_1+dt)$, $ph1(t_1+dt)$, $A_2(t_1+dt)$, $ph2(t_1+dt)$ sont alignés sur la même droite que O,$A_1(t_1)$ et $A_2(t_1)$ (de direction **u**) et on suppose de plus qu’ils sont rangés dans cet ordre. On a alors :

$$ph1(t_1+dt)ph2(t_1+dt)=A_1(t_1+dt)ph2(t_1+dt)-A_1(t_1+dt)ph1(t_1+dt) \quad (79e)$$

$$ph1(t_1+dt)ph2(t_1+dt)=A_1(t_1+dt)A_2(t_1+dt)+ A_2(t_1+dt)ph2(t_1+dt)-A_1(t_1+dt)ph1(t_1+dt)$$

Et donc d’après l’équation (79d) :

$$ph1(t_1+dt)ph2(t_1+dt)=A_1(t_1+dt)A_2(t_1+dt) \quad (79f)$$

Et donc d’après l’équation (79c) :

$$ph1(t_1+dt)ph2(t_1+dt)=(1+dz)ph1(t_1)ph2(t_1) \quad (80a)$$

Et donc entre t_1 et t_1+dt la distance entre les photons $ph1(t_1)$ et $ph2(t_1)$ s’accroît du facteur d’expansion de l’Univers entre t_1 et t_1+dt noté 1+dz. Il en résulte qu’entre t_1 et t_2 la distance entre les 2 photons d’accroît du facteur d’expansion de l’Univers entre t_1 et t_2 1+z. On a donc montré que pour les photons considérés ph1(t) et ph2(t):

$$ph1(t_2)ph2(t_2)=(1+z)ph1(t_1)ph2(t_1) \quad (80b)$$

Pour montrer l’effet de l’expansion sur la longueur d’onde du photon, on procède comme précédemment : On modélise le photon ph1 comme un système dont les extrémités sont 2 points mobiles a(t) et b(t), la distance a(t)b(t) étant la longueur d’onde du photon. ph1(t) appartenant comme précédemment à un segment [O,P(t)], avec (O,P(t)) parallèle au vecteur unitaire u et la vitesse locale de ph1(t) étant **c**=c**u**. On suppose alors que pour tout photon ph1(t), a(t) et b(t) ont des vitesses locales identiques égales à la même vitesse locale **c**, et que a(t) et b(t) appartiennent aussi à [O,P(t)]. On procède alors exactement avec a(t) et b(t) comme pour ph1(t) et ph2(t). On obtient donc dans notre nouveau modèle d’expansion, λ(t) était la longueur d’onde d’un photon au temps Cosmologique t, une relation analogue à (80b) :

$$\lambda(t_2)=(1+z)\lambda(t_1) \quad (80c)$$

On rappelle que les relations (80b)(80c) étaient aussi valides dans le modèle d'expansion du MSC. C'est à cause de la relation précédente (80c), valide pour tout photon d'après notre théorie de la matière sombre et de l'énergie sombre, qu'on utilise la notation 1+z pour représenter le facteur d'expansion de l'Univers. On rappelle que dans la ralation (80c), $\lambda(t_1)$ et $\lambda(t_2)$ doivent être mesurées dans le Référentiel Cosmologique local (Référentiel de Repos du CMB) dans lequel se trouve le photon et qui donne aussi les distances dans le Référentiel Cosmologique R_C d'après la définition de R_C.

On peut montrer plus généralement de façon analogue que si on suppose simplement que ph1 et ph2 ont la même vitesse locale en vecteur (ph1(t) et ph2(t) n'appartenant pas nécessairemnt à la même droite passant par le point O), alors entre 2 temps Cosmologiques t_1 et t_2 la distance entre ph1(t) et ph2(t) mesurée dans R_C s'accroît du facteur d'expansion 1+z entre t_1 et t_2, (Comme dans l'équation (80c)) et de plus on a la relation $(ph1(t_2),ph2(t_2))//(ph1(t_1),ph2(t_1))$.

On remarque que pour point comobile O'(t) on peut définir un Référentiel Cosmologique R_C'd'origine O'(t), dont le temps est le temps Cosmologique, c'est-à-dire celui du Référentiel Cosmologique Universel R_C dont les axes sont parallèles à ceux de R_C et qui donne les mêmes distances entre 2 points (à un temps Cosmologique donné t) que le Référentiel R_C. On appellera R_C' *Référentiel Cosmologique Universel secondaire*.

Alors si A(t) est un point comobile quelconque, t_1 et t_2 étant 2 temps Cosmologiques, d'après les propriétés des points comobiles (72)(73), si 1+z est le facteur d'expansion de l'Univers entre t_1 et t_2 :

$$O'(t_2)A(t_2)=(1+z)O'(t_1)A(t_1)$$

$$(O'(t_2),A(t_2))//(O'(t_1),A(t_1)) \qquad (81)$$

Et donc $(O'(t_1), A(t_1))$ et $(O'(t_2),A(t_2))$ sont dans la même direction d'un vecteur **u** de R_C'.

Et donc les relations (71) (72)(73) demeurent valides, remplaçant R_C par R_C' et O par O'(t). P(t) est toujours un point de frontière de la sphère en expansion mais on n'a plus $O'P(t)=R_E(t)$.

Et donc on aurait pu définir les points comobiles dans R_C' de la même façon que dans R_C. Et donc les expressions des distances utilisées en Cosmologie et de la Constante de Hubble sont obtenues dans R_C' de la même façon que dans R_C.

On verra qu'on ne peut pas observer tout l'Univers de O' (Ce qui était aussi le cas dans le MSC) et que si O' est suffisamment éloigné des frontières de l'Univers, alors l'Univers observé de O' est approximativement identique à l'Univers observé de O.

3.3 Loi de Hubble-Distances utilisées en Cosmologie.

On garde les notations de la section précédente, R_C est le Référentiel Cosmologique d'origine O, centre de l'Univers sphérique. (On rappelle qu'on peut généraliser ceci en remplaçant R_C par un autre Référentiel Cosmologique R_C'ayant comme origine un autre point comobile O'). Supposons qu'un photon est émis d'un astre S en un point comobile $Q(t_E)$ à un temps Cosmologique t_E dans la direction de O et arrive au temps actuel t_0 en O. On suppose que le facteur d'expansion entre t_E et t_0 est égal à $1+z_0$.

Entre t et t+dt, on sait que le photon parcourt la distance locale cdt. Et donc entre t_E et t_0 la somme des distances locales parcourues sera :

$$D_T=c(t_0-t_E). \qquad (82)$$

On appellera cette distance D_T, puisqu'elle a la même expression que dans le MSC, de son nom dans le MSC, c'est à dire la « distance temps-arrière » à $Q(t_E)$ car elle permet d'évaluer le temps Cosmologique s'étant écoulé depuis l'émission du photon de S. On l'appelle aussi, comme dans le MSC « light-travel distance » à $Q(t_E)$ car elle correspond à la distance réellement parcourue par le photon depuis son émission en $Q(t_E)$.

Dans le 1ier modèle mathématique d'expansion de l'Univers, la prédiction théorique de D_T est identique à celle du MSC puisque les équations donnant D_T sont identiques (celles de la Relativité Générale).

Dans le 2nd modèle mathématique d'expansion de l'Univers défini dans la section précédente, on obtient très simplement la loi de Hubble en utilisant la distance temps- arrière définie précédemment :

En effet, d'après ce 2nd modèle et l'équation (79b), $1+z_0$ étant le facteur d'expansion de l'Univers entre t_E et t_0 :

$1+z_0=(Ct_0)/(Ct_E)=t_0/(t_0-D_T/c)$. (83a)

Quand $D_T/ct_0<<1$ on obtient $z_0=D_T/ct_0$ et donc la constante de Hubble est égale à $1/t_0$. L'équation précédente (83a) est très simple et peut facilement être vérifiée. Ainsi, pour t_0=15 milliards d'années, on obtient que pour z_0=0.5, D_T=5 milliards d'années. Pour z_0=9 on obtient D_T=13.5 milliards d'années. Ces valeurs sont en accord avec les observations astronomiques pour la distance temps-arrière D_T.

On a pris un âge de l'Univers t_0 approximativement égal à 15 milliards d'années correspondant à une constante de Hubble $H=1/t_0$ approximativement égal à 65km/sMpc^{-1}, alors qu'on prend souvent pour H la valeur 72km/sMpc^{-1} qui correspond alors à un âge de l'Univers de 13,5 milliards d'années. Cependant, même récemment, de nombreux astrophysiciens prennent une valeur pour H proche de 65km/sMpc^{-1}, par exemple Tammann et Reindl en Octobre 2012 [(17)].

Il est donc remarquable que d'après notre 2ième modèle, la valeur de la constante de Hubble est très facilement obtenue et est égale à $1/t_0$, t_0 âge actuel de l'Univers. Dans le MSC (et dans le 1^{ier} modèle mathématique d'expansion de notre théorie de la matière sombre et de l'énergie sombre), l'obtention de la constante de Hubble était beaucoup plus compliqué et celle-ci n'était pas exactement égale à $1/t_0$.

On suppose toujours qu'un photon est émis d'un astre S en un point comobile $Q(t_E)$ à un âge de l'Univers t_E et arrive à l'origine O du Référentiel Cosmologique Universel RC à l'âge actuel de l'Univers t_0 . On a vu dans la section 3.2 que l'on pouvait supposer que la vitesse locale de S était petite devant c, de la même façon que les vitesses locales des étoiles proches de notre galaxie (C'est-à-dire mesurées dans le Référentiel de Repos du CMB local), étaient petites devant c. Et donc si le photon émis de S au temps t_E possède la longueur d'onde λ_0 mesurée dans le Référentiel inertiel lié à S, et si ce photon atteint au temps t_0 une planète T très proche de O, T ayant une vitesse locale très petite devant c, alors si $\lambda_T(t_0)$ est la longueur d'onde de ce photon mesurée dans le Référentiel inertiel lié à la planète T (au temps t_0), d'après l'équation (80c), $1+z_0$ étant le facteur d'expansion de l'Univers entre t_E et t_0 :

$\lambda_T(t_0)\approx\lambda_0(1+z_0)$ (83b)

On peut définir les autres types de distances utilisées en Cosmologie de façon analogue au MSC. On a vu (Equation (82)) qu'on pouvait exprimer la distance temps-arrière par l'expression :

$$D_T = \int_{tE}^{t0} c\,dt \qquad (84)$$

La distance locale parcourue par le photon entre t et t+dt est d'après le Postulat 3 égale à cdt. Cette distance locale, considérée comme distance entre 2 points comobiles, s'accroît d'un facteur 1+z entre t et t_0, 1+z étant le facteur d'expansion de l'Univers entre t et t_0, d'après la relation (79b).

En complète analogie avec le MSC, on appelle *distance comobile* entre O et Q(t) la distance entre $Q(t_0)$ et $O(t_0)$ mesurée dans le Référentiel Cosmologique Universel R_C, qui est la somme de toutes les distances locales cdt accrues d'un facteur 1+z. Soit D_C cette distance :

$$D_C = \int_{tE}^{t0} c(1+z)\,dt \qquad (85)$$

De cette expression on définit la *distance-luminosité* D_L entre O et $Q(t_0)$ et la *distance angulaire* D_A entre O et $Q(t_E)$ en complète analogie avec leurs définitions dans le MSC :

$$D_L=(1+z_0)D_C \qquad (86a)$$

$$D_A=D_C/(1+z_0) \qquad (86b)$$

La distance D_A apparaît comme la distance mesurée dans R_C entre O et $Q(t_E)$. En complète analogie avec le MSC elle permet d'obtenir des angles dans R_C.

La distance D_L apparaît comme étant obtenue en mesurant le flux de luminosité émis par une supernova en tenant compte de l'effet de l'expansion sur la longueur d'onde des photons et sur la distance entre les photons. On a vu dans la section 3.2 (Equations (80b)(80c)) que cet effet prévu dans le MSC était aussi vrai dans notre modèle d'Univers fini en expansion.

Les expressions mathématiques des distances Cosmologiques (85)(86a))(86b) qu'on a données sont équivalentes à celles prédites dans le MSC, dans le cas d'un Univers plat.

Dans le 1ier modèle mathématique d'expansion de notre théorie de la matière sombre et de l'énergie sombre, puisque 1+z a la même expression mathématique que dans le MSC, ces distances utilisées en Cosmologie ont des expressions identiques à celles du MSC. Et donc on obtient aussi une constante de Hubble identique.

Dans notre 2nd modèle mathématique d'expansion de l'Univers, ces expressions sont beaucoup plus simples. D'après les équations (79b) et (85), on a dans ce 2nd modèle :

$$D_C = \int_{tE}^{t0} c(1+z)dt = \int_{tE}^{t0} c(t_0 / t)dt \qquad (87)$$

On obtient donc finalement l'expression très simple de la distance comobile:

$D_C = ct_0 Log(t_0/t_E) = ct_0 Log(1+z_0)$. (88a)

Là encore on peut vérifier que cette expression est en accord avec les observations astronomiques. On déduit facilement de l'équation précédente une expression très simple, dans ce 2nd modèle mathématique, des distances D_L et D_A (Equations (86). On remarque que dans ce 2nd modèle mathématique d'expansion, d'après les expressions précédentes, on a comme dans le MSC, pour $z_0 << 1$:

$D_C \approx D_T \approx D_A \approx D_L \approx cz_0$ (88b)

On sait que dans le 2nd modèle mathématique, la vitesse d'un point comobile quelconque Q(t) mesurée dans le Référentiel Cosmologique Universel R_C est constante (D'après l'équation (79a) avec $V_P(t)=C$, par définition du 2nd modèle mathématique d'expansion de l'Univers). Soit V_Q cette vitesse. Alors la distance mesurée dans R_C entre O et $Q(t_0)$ (qu'on a aussi appelé distance comobile D_C)entre O et $Q(t_0)$) est aussi égale à $V_Q t_0$. Et donc, d'après l'équation (88a) :

$V_Q = cLog(1+z_0)$ (89)

On peut interpréter dans notre modèle d'expansion de l'Univers exposé plus haut l'observation de l'explosion d'une supernova de la même façon que pour le MSC en tenant compte de l'effet de l'expansion sur la longueur d'onde des photons et sur la distance entre les photons. On a vu dans la section 3.2 que cet effet prévu dans le MSC était aussi vrai dans notre modèle d'expansion (Equations

(80b)(80c)). On interprète donc les observations astronomiques concernant l'explosion d'une supernova exposées dans l'article [18].

3.4 Limites Cosmologiques de l'Univers observable.

Dans notre modèle d'Univers fini en expansion on ne peut pas, comme c'était aussi le cas dans le MSC, observer l'Univers (Par l'observation des galaxies) avant un temps Cosmologique donné t_{OU}. Ceci entraîne que si on observe l'Univers d'un point $O'(t_0)$ suffisamment loin des frontières de l'Univers, t_0 âge actuel de l'Univers, l'Univers observable est isotrope et de plus les frontières de l'Univers ne peuvent être observées de $O'(t_0)$. Dans cette section nous allons montrer comment obtenir ce temps t_{OU} dans notre modèle d'Univers fini en expansion, et plus précisément d'après notre 2nd modèle mathématique d'expansion, beaucoup plus simple que le 1ier modèle mathématique basé comme celui du MSC sur la Relativité Générale. On doit procéder de façon analogue, juste en modifiant les expressions mathématiques, pour obtenir t_{OU} d'après le 1ier modèle mathématique d'expansion de l'Univers.

On conserve dans notre théorie de la matière sombre et de l'énergie sombre l'hypothèse admise dans le MSC d'un âge sombre de l'Univers durant lequel la lumière ne peut se propager dans l'Univers. Soit t_D la fin de cet âge sombre. Il est évident que t_{OU} doit être supérieur à t_D. De plus, les galaxies ne peuvent être observées avant le temps Cosmologique t_G ou apparaissent les premières galaxies. Il existe une autre limite d'observation pour l'Univers dans notre modèle d'Univers fini en expansion. Ceci est très clair dans notre second modèle :

D'après l'équation (89), puisque V_Q est forcément inférieure à C, on a :

$$C \geq cLog(1+z_0) \qquad (90)$$

Et donc avec les notations de la section précédente:

$$t_0/t_E=1+z_0=\leq exp(C/c) \qquad (91)$$

Ce qui veut dire que l'Univers ne pourra être observé avant le temps t_I défini par (On rappelle que t_0 est l'âge actuel de l'Univers) :

$$t_I=t_0 exp(-C/c) \qquad (92)$$

Donc d'aprés notre théorie de la matière sombre et de l'énergie sombre, t_{OU} , temps Cosmologique minimal pour que l'Univers puisse être observé, est le temps

Cosmologique le plus grand entre t_D,t_G et t_I. De plus si t_{OU}>t_I, on ne peut observer les frontières de l'Univers de O.

Notons que l'équation (90) permet de donner une limite inférieure à la constante C du 2nd modèle mathématique d'expansion: Puisqu'on a mesuré des décalages spectraux z=10, cela veut dire que C>2,3c. Si on prend C=10c, on obtient t_I de l'ordre de 1million d'années.

On doit utiliser une méthode analogue pour obtenir n'est pas située en O mais en un autre point comobile O'(t). Alors seulement t_I est modifié, dépendant de la distance minimale de O'(t) aux frontières de l'Univers.

3.5 Cosmic Microwave Background.

De la même façon que dans le MSC, on admet l'apparition d'un CMB (appelé « rayonnement fossile » en Français) à un temps Cosmologique proche du Big-Bang (Le Big-Bang correspondant à un temps Cosmologique égal à 0). De la même façon que dans le MSC, en tenant compte de l'effet de l'expansion sur la longueur d'onde des photons et sur la distance entre les photons (On a vu dans la section 3.2 que cet effet prévu dans le MSC était aussi vrai dans notre modèle d'expansion (Equations (80b)(80c)), on obtient dans le modèle d'expansion de notre théorie de la matière sombre et de l'énergie sombre que si ce rayonnement fossile apparaît au temps Cosmologique t_{iRF}, correspondant à la température initiale du rayonnement fossile T_{iRF}, alors en un temps Cosmologique t supérieur à t_{iRF}, si le facteur d'expansion entre t_{iRF} et t est égal à 1+z, alors le rayonnement fossile à t est celui d'une température $T_{R.F}(t)=T_{iR.F}/(1+z)$. (Ceci est obtenu de la même façon que dans le MSC, puisque la densité de photons est divisée par $(1+z)^3$, puisque le rayon de l'Univers $R_E(t)$ s'accroît d'un facteur 1+z, et que la longueur d'onde des photons s'accroît d'un facteur 1+z (Equation (80c)). Et donc notre modèle est en accord avec l'observation CMB correspondant à un grand décalage spectral z [(3)].

Si on admet qu'à l'apparition du rayonnent fossile (z≈1500), la température de ce rayonnement était égale à celle de la substance sombre emplissant l'Univers, on obtient l'isotropie observée actuellement de ce rayonnement fossile, sans introduire le phénomène d'inflation, car on a admis que la substance sombre intergalactique était homogène en température.

La grande nouveauté de notre théorie de la matière sombre et de l'énergie sombre concernant le CMB, est que d'après cette interprétation, le Référentiel de Repos du CMB est totalement défini, ainsi que ses propriétés physiques, qui apparaissent comme étant fondamentales. Et que les propriétés physiques admises dans notre interprétation physique du RRC donnent des prédictions en accord avec les observations astrophysiques. Comme on l'a vu dans notre Introduction, on

interprète dans notre théorie de la matière sombre et de l'énergie sombre les anisotropies du CMB de la même façon que dans le MSC.

Il est important de se demander ce que devient un photon arrivant sur les frontières de l'Univers. Il pourrait être absorbé, mais cela n'est pas la seule hypothèse possible. L'hypothèse la plus simple serait qu'il soit réfléchi, en prenant une vitesse locale opposée (en vecteur) à celle qu'il avait en atteignant la frontière. Avec cette dernière hypothèse on pourrait s'attendre à voir les images réfléchies de galaxies sur les frontières de l'Univers. Mais on a plusieurs explications possibles au fait que cela ne soit pas le cas :

Supposons que t_0 soit l'âge actuel de l'Univers, t_I le temps Cosmologique le plus petit de l'Univers qu'on peut observer à cause de la finitude de l'Univers (voir la section 3.4), t_G le temps absolu où les galaxies sont apparues, et t_D la fin de l'âge sombre, c'est-à-dire de l'âge de l'Univers où la lumière des galaxies n'était pas transmise. On sait que t_D est de l'ordre du milliard d'années et t_0 de 15 milliards d'années. t_G est aussi de l'ordre du milliard d'années.

On obtient facilement que si $t_G > t_I$ ou $t_I < t_D$ alors on ne peut observer la réflexion d'images de galaxies sur les frontières de l'Univers. En effet dans le 1^{ier} cas les photons réfléchis arrivent en O après t_0, et dans le 2ième cas les photons réfléchis sont absorbés dans l'âge sombre.

3.6 Contribution dipolaire du CMB.

On sait que dans le MSC [7], on a les fluctuations de température suivantes pour le rayonnement fossile :

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right) = \frac{1}{4\pi}\sum_{l} l(2l+1)C_l \qquad (93)$$

On conservera cette expression dans notre théorie de la matière sombre et de l'énergie sombre. Cependant dans cette interprétation, l=1 est la contribution dipolaire, correspondant au mouvement de notre terre par rapport au RRC. Cette contribution dipolaire est donc complètement interprétée dans notre théorie de la matière sombre et de l'énergie sombre, ce qui n'était pas le cas dans le MSC pour lequel le Référentiel de Repos du CMB n'avait pas d'interprétation physique.

3.7 Lien entre le CMB et la température de la substance sombre intergalactique.

On a vu que d'après le nouveau modèle Cosmologique, l'Univers était une sphère remplie de substance sombre, entourée d'un milieu appelé « néant » (Voir Section 2.5). Par analogie avec les concentrations sphériques de substance sombre étudiées dans la 1ière partie, il est possible qu'il existe un transfert thermique convectif entre cette sphère et le néant. Le flux surfacique convectif serait alors de la forme $F=h_nT_0(t)$, $T_0(t)$ étant la température de la substance sombre intergalactique au temps Cosmologique t. Généralisant l' analogie avec le cas des concentrations sphériques de substance sombre, on obtient l'équation d'équilibre thermique avec K_3 constante (K_3 donné par l'Equation (14)), M_B masse baryonique de l'Univers, $R_E(t)$ rayon de l'Univers à l'âge t de l'Univers, d'après le Postulat 2a), dans la section 2.3 :

$$K_3M_B=4\pi R_E(t)^2(h_nT_0(t)) \qquad (94a)$$

Cependant, pour obtenir l'équation précédente on a supposé l'existence d'un transfert thermique convectif entre la sphère Universelle emplie de substance sombre et le néant (Alors qu'il est possible que ce transfert soit nul) et de plus on a négligé les autres facteurs énergétiques agissant sur la température de la substance sombre intergalactique (Ce qui n'est peut être pas une approximation valide. Nous étudierons dans la section suivante l'ensemble de ces facteurs énergétiques) .

On remarque que si on avait comme dans l'obtention de la loi de Tully-Fisher une constante C_2 telle que $h_n=C_2\rho_0(t)$, alors d'après l'équation (94a) on obtiendrait que la température $T_0(t)$ augmenterait avec t. Ceci est impossible avec le 1ier modèle de transfert thermique exposé dans la section 2.3, mais est possible avec le 2nd modèle de transfert thermique exposé dans la section 2.6. Mais si on suppose h_n constante, alors on obtient d'après l'équation (94a) que $T_0(t)$ évolue alors en $1/(1+z)^2$, (1+z) facteur d'expansion de l'Univers. Dans notre théorie de la matière sombre et de l'énergie sombre, on admet comme dans le MSC que le rayonnement fossile est apparu pour z de l'ordre de 1500. Si on suppose que pour cette valeur de z, CMB et substance sombre intergalactique avaient la même température, on obtient qu'actuellement, c'est-à-dire à un temps Cosmologique de 15 milliards d'années, la température de la substance sombre intergalactique est 1500 fois plus faible que celle du CMB, ce qui est une valeur acceptable avec le 1ier type de transfert thermique et justifie notre hypothèse de la section 2.3 exprimant que cette température de la substance sombre intergalactique est négligeable par rapport à la température de concentrations de substance sombre constituant les galaxies avec une courbe de rotation plate (voir section 2.1).

L'hypothèse de l'égalité entre la température initiale du CMB et celle de la substance sombre intergalactique entraîne, puisqu'on a supposé que cette dernière était homogène, l'homogénéité initiale de la température du CMB (Et donc

l'isotropie du CMB observée du système solaire à l'âge actuel de l'Univers), sans avoir besoin pour l'expliquer du phénomène d'inflation, comme c'était nécessaire dans le MSC.

3.8 Energie sombre de l'Univers.

On a vu dans la 1ière partie de notre théorie sur la matière sombre que selon cette théorie, l'Univers était rempli d'une substance sombre pouvant être modélisée comme un gaz parfait (Section 2.1). Il est donc naturel de considérer que cette substance sombre, comme un gaz parfait, possède une énergie interne, qu'on peut identifier à une énergie sombre présente dans tout l'Univers.

Nous rappelons l'équation (94a), avec M_B masse baryonique dans l'Univers, $R_U(t)$ rayon de l'Univers à un âge t de l'Univers, $T_0(t)$ température de la substance sombre intergalactique au temps Cosmologique t et K_3 constante définie dans l'équation (14) :

$$K_3M_B=4\pi R_U(t)^2h_nT_0(t) \qquad (94b)$$

Comme on l'a remarqué dans la section précédente, si on prend h_n constant, $T_0(t)$ évolue alors en $1(1+z)^2$.

Pour obtenir $T_0(t)$ par l'équation précédente, on a donc tenu compte ni de l'évolution de l'énergie interne de la substance sombre intergalactique, ni de l'énergie interne perdue à cause de la dilatation du volume de la substance sombre intergalactique, celle-ci étant modélisée comme un gaz parfait. On appellera 1ier *modèle d'évolution de la température de la substance sombre* le modèle précédent. On remarque que dans la section 3.7 on a supposé sa validité seulement pour z<1500, et non juste après le Big-Bang.

Considérons donc un 2ième *modèle d'évolution de la température de la substance sombre* dans lequel au contraire, on néglige l'énergie transférée des baryons vers la substance sombre (énergie qui est évidemment nulle avant l'apparition des baryons), et aussi l'énergie perdue aux frontières de l'Univers par le transfert convectif défini plus haut, devant la variation d'énergie interne de la substance sombre et aussi l'énergie perdue sous forme de travail de la substance sombre. On suppose que dans ce 2nd modèle, la substance sombre est homogène dans tout l'Univers, en densité et en température, parce qu'on est avant l'apparition des galaxies (z>1500). Donc la substance sombre obéit à la loi de Boyle-Charles (Postulat 1), et de plus on admet qu'elle obéit à la loi de Joule pour les gaz parfaits c'est-à-dire qu' il existe une constante K_{ES} telle que T(t) étant la température de la

substance sombre, M_S la masse totale de la substance sombre et U(T(t)) étant l'énergie interne totale de la substance sombre, à un âge de l'Univers égal à t:

$U(T(t))=K_{ES}M_ST(t)$ (95)

De plus, l'énergie perdue sous forme de travail par la substance sombre ayant la pression P, pour une variation de volume dV est égale à :

$dW=-PdV$ (96)

On suppose dans ce 2ième modèle d'évolution de la température que la transformation est adiabatique réversible. On peut donc appliquer la loi de Laplace : Il existe une constante γ telle que, V étant le volume de l'Univers pour une température T à un âge t de l'Univers et V_1 pour une température T_1 à un âge t_1 de l'Univers :

$TV^{\gamma-1}=T_1V_1^{\gamma-1}$ (97)

Et donc si 1+z est le facteur d'expansion de l'Univers entre t_1 et t, $V(t)=(1+z)^3V_1(t_1)$ et :

$T(t)=T(t_1)/(1+z)^{3(\gamma-1)}$ (98)

Dans un 3ième modèle d'évolution de la température de la substance sombre intergalactique, on tient compte de toutes les formes d'énergie perdue ou gagnées par la substance sombre, celle-ci étant toujours modélisée comme un gaz parfait. Cependant, on considère que la substance sombre est homogène dans tout l'Univers, on ne tient pas compte des halos des galaxies ayant une courbe de rotation plate, et on a vu que ceci était justifié car le volume de ces halos est très petit devant le volume de l'Univers. On notera T(t), P(t) et V(t) les température, pression et volume de la substance sombre à un âge t de l'Univers. On prendra les notations suivantes :

dW(t,t+dt) est l'énergie reçue sous forme de travail (négative) par la substance sombre de l'Univers entre t et t+dt.

$dE_{TF}(t,t+dt)$ est l'énergie reçue par la substance sombre (négative) sous forme de transfert thermique entre la substance sombre et le néant entre t et t+dt. $R_U(t)$ étant le rayon de l'Univers à un âge t de l'Univers, on a vu (équation (94a)) :

$dE_{TF}(t,t+dt)=(-h_nT(t))(4\pi R_U(t)^2)dt$ (99)

$dE_{TB}(t,t+dt)$ est l'énergie reçue par la substance sombre par les baryons (positive) (Equation (14) et (94b)), $M_B(t)$ étant la masse totale des baryons, entre t et t+dt :

$dE_{TB}(t,t+dt)=K_3M_B(t)dt$ (100)

Alors l'équation d'équilibre de l'énergie reçue et perdue par la substance sombre de l'Univers entre t et t+dt est :

$dU(t,t+dt)=dW(t,t+dt)+dE_{TF}(t,t+dt)+dE_{TB}(t,t+dt)$ (101)

On rappelle que d'après la loi de Boyle-Charles, M_S étant la masse totale de la substance sombre (supposée constante) :

$P(t)V(t)=k_0M_ST(t)$ (102)

Et, $R_U(t)$ étant le rayon de l'Univers, $V(t)=(4/3)\pi R_U(t)^3$, $d(R_U(t))=dzR_U(t)$, et donc $dV(t)=4\pi R_U(t)^3dz$ (1+dz facteur d'expansion de l'Univers entre t et t+dt), et donc $dV(t)/V(t)=3dz$, et donc:

$dW(t,t+dt)=-PdV(t)= -k_0M_ST(t)(dV(t)/V(t))$ (103a)

$dW(t,t+dt)=-3k_0M_ST(t)dz$ (103b)

On obtient donc l'équation d'équilibre, équation différentielle en T(t),puisque dz et $R_U(t)$ s'expriment en fonction de t:

$d(K_{ES}M_ST(t))=-3k_0M_ST(t)dz-h_nT(t)(4\pi R_U(t)^2)dt+K_3M_B(t)dt$ (104a)

$K_{ES}M_S(dT(t)/dt)=-3k_0M_ST(t)(dz/dt)-h_n(4\pi R_U(t)^2)T(t)+K_3M_B(t)$ (104b)

On montre facilement que comme pour les gaz parfaits avec les notations précédentes, le paramètre γ utilisé dans l'équation de Laplace (97) s'exprime par :

$\gamma=1+k_0/K_{ES}$ (105)

Et donc par analogie avec les gaz parfaits usuels, k_0 devrait être de l'ordre de K_{ES}. A l'aide de l'équation précédente (104b), on peut exprimer les conditions

de validité du 1ier modèle d'évolution de la température de la substance sombre, où on a négligé la variation d'énergie interne et le travail reçu par la substance sombre. Ces conditions sont :

$-K_{ES}M_S(dT(t)/dt)<<K_3M_B(t)$

$-K_{ES}M_S(dT(t)/dt)<<h_n(4\pi R_U(t)^2)T(t)$

$3k_0M_ST(t)(dz/dt)<<K_3M_B(t)$

$3k_0M_ST(t)(dz/dt)<<h_n(4\pi R_U(t)^2)T(t)$ (106)

Les conditions pour que le 2ième modèle d'évolution de la température de la substance sombre soit valide sont les conditions inverses (remplaçant « << » par « >> »).

3.9 Evolution de la température de la substance sombre-2nd modèle d'expansion.

Nous allons considérer l'application de la section précédente dans le cas du 2nd modèle d'expansion de l'Univers, c'est-à-dire avec $R_U(t)=Ct$ (C constante), et donc entre t et t+dt, $1+dz=(t+dt)/t$, donc $dz=dt/t$.

On remarque que dans le 1ier modèle d'évolution de la température de la substance sombre on avait T(t) évoluait en $1/(1+z)^2$ donc en $1/t^2$. Dans le 2nd modèle d'évolution de la température, T(t) évoluait en $1/(1+z)^{3(\gamma-1)}$ avec $\gamma>1$, et donc dans les 2 cas T(t) évolue en $1/t^p$, avec $p>0$. Or dans ce cas, on obtient donc que pour t tend vers l'infini les fonctions T(t) et $(dT(t)/dt)/T(t)$ tendent toutes deux vers 0.

Et donc pour t assez grand, on obtient immédiatement que les relations (106) sont valides et donc on peut appliquer le 1ier modèle d'évolution de la température.

Au contraire pour t tend vers 0, les fonctions T(t) et $(dT(t)/dt)/T(t))$ tendent vers l'infini et donc pour t assez petit (proche du Big-Bang), l'inverse des relations (106) sont valides et on peut appliquer le 2ième modèle d'évolution de la température.

3.10 Energie sombre des particules baryoniques.

On a vu dans la section 3.8 que d'après notre théorie de la matière sombre et de l'énergie sombre il existait dans tout l'Univers une énergie sombre qu'on

pouvait identifier à l'énergie interne de la substance sombre. Or nous allons voir dans cette section qu'il est très possible, selon notre théorie, que les particules baryoniques possèdent aussi une énergie sombre, c'est-à-dire une énergie qui ne puisse pas être détectée par les expériences en laboratoire classiques. Ceci n'est cependant pas une hypothèse nécessaire à notre théorie.

On a défini dans le Postulat 1 la loi de Boyle-Charles pour un élément de substance sombre à la pression P, dans un volume V, à une température T et de masse m, k_0 étant une constante :

$$PV=k_0mT \qquad (107)$$

Utilisant la loi précédente et la loi de Newton de la gravitation, on a obtenu l'équation (10), valable pour les galaxies présentant une courbe de rotation plate. En particulier pour la voie lactée, T_{MW} étant la température du halo sombre de la voie lactée et v_{MW} étant la vitesse orbitale des étoiles dans la voie lactée, on a l'équation :

$$v_{MW}^2 \approx 2k_0T_{MW} \qquad (108)$$

Et donc prenant $v_{MW} \approx 2.\ 10^5$m/s on obtient $k_0T_{MW} \approx 2.\ 10^{10}$ U.S.I .

Comparons l'équation (107) avec l'équation analogue valable pour l'hydrogène modélisé comme un gaz parfait. On sait qu'il existe une constante k_H telle que pour un élément d'hydrogène de masse m_H, de volume V, à la température T et à la pression P :

$$PV=k_Hm_HT \qquad (109)$$

On sait que pour une mole d'hydrogène, pour $T=T_K=273°K$, $V=20.\ 10^{-3}$, $P=10^5$ Pa, $m_H=10^{-3}$ kg, on a :

$$k_HT_K \approx PV/m_H=10^5\times 20.\ 10^{-3}\times 10^3= 2.\ 10^6 \text{ U.S.I} \qquad (110)$$

Si on suppose que la substance sombre et l'hydrogène obéissent à la loi de Joule, on obtient donc que l'énergie interne d'un kg d'hydrogène à la température T_K est de l'ordre de k_HT_K c'est-à-dire de $2.\ 10^6$ Joules alors que l'énergie interne d'un kg de substance sombre appartenant au halo de la voie lactée est de l'ordre de k_0T_{MW} c'est-à-dire de $2.\ 10^{10}$ Joules, et donc cette dernière énergie est très supérieure à la première (On utilise l'équation (105), avec comme pour les gaz

parfaits usuels, k_0/K_{ES} de l'ordre de l'unité). Considérant cette importante différence d'énergie, on doit considérer un 2ième modèle possible de transfert énergétique des baryons vers la substance sombre, permettant une puissance transmise beaucoup plus importante qu'une puissance thermique correspondant à une diminution quasi imperceptible de la température de la matière baryonique. Dans ce 2ième modèle, l'énergie transmise est de *l'énergie sombre*. Les particules baryoniques contiennent une quantité très importante d'énergie sombre, mais celle-ci n'intervient pas dans la masse des particules utilisées dans les expressions de l'énergie de repos $E=mc^2$ ou de l'énergie potentielle $E_p=mU$. On ne peut donc pas la détecter par des expériences en laboratoire classiques. D'après notre théorie, pour que la section 2.3 permettant d'obtenir la loi baryonique de Tully-Fisher demeure valide, la puissance d'énergie sombre transmise a la même expression très simple que dans le 1ier modèle :

$$P_r=K_{3S}M \qquad (111)$$

Avec M masse baryonique considérée et K_{3S} constante. p_{0S} étant la puissance d'énergie sombre perdue par nucléon et m_0 étant la masse d'un nucléon on obtient $K_{3S}=p_{0S}/m_0$. L'existence d'une énergie sombre pour les baryons est très attractive car non seulement elle permet théoriquement la transmission d'une énergie des baryons vers la substance sombre beaucoup plus importante que de l'énergie thermique, mais aussi elle justifie que cette énergie transmise est indépendante de la température des baryons et de la température de la substance sombre à laquelle ceux-ci transmettent l'énergie.

Cependant, l'existence d'une énergie sombre pour les particules baryoniques n'est pas une hypothèse nécessaire à notre théorie de la matière sombre. En effet d'après notre modèle d'évolution de la température de la substance sombre (Section 2.8), on peut s'attendre à ce que la température des concentrations de substance sombre soit initialement très élevée, égale à la température de la substance sombre intergalactique, et ensuite décroît jusqu'à atteindre sa température finale. Et donc la variation d'énergie interne des concentrations de substance sombre est très lente, et est par conséquent compatible avec une puissance thermique très faible émise par les baryons vers la substance sombre.

3.11 Détermination du centre de l'Univers.

Un problème est de savoir si on peut déterminer le centre de l'Univers, c'est-à-dire le centre O de la sphère Universelle en expansion. Si l'Univers était

homogène (au sens Cosmologique) cela semblerait impossible dans l'état de la Théorie de la matière sombre exposée dans cet article mais il est possible que certains astres soient répartis de façon non homogènes en présentant une symétrie sphérique (au sens Cosmologique) par rapport à un unique point O. Alors O sera obligatoirement le centre de l'Univers. Et donc si on découvre de tels astres, on aura déterminé le centre de l'Univers.

4.CONCLUSION

Nous avons donc dans la Théorie de la matière sombre exposée dans cet article modélisé la matière sombre comme une substance sombre dont les propriétés physiques, notamment la propriété d'être modélisée comme un gaz parfait, permettaient d'interpréter théoriquement les observations astrophysiques liées à la matière sombre. En particulier, ces propriétés physiques, malgré leur simplicité, nous ont permis de justifier théoriquement la courbe de rotation plate des galaxies et la loi baryonique de Tully-Fisher. On a interprété pour cela les galaxies présentant des courbes de rotation plate comme des concentrations sphériques de substance sombre en équilibre gravitationnel. On a vu que le concept de substance sombre introduit dans notre théorie de la matière sombre conduisait naturellement à proposer un nouveau modèle géométrique pour l'Univers, Univers fini et sphérique.

On a étudié d'après notre théorie de la matière sombre les effets du déplacement d'une concentration sphérique de substance sombre sur sa vitesse et sa masse et on a vu que cet effet était nul. On a vu qu'en accord avec les observations astronomiques, notre théorie de la matière sombre définissait 2 types de rayon d'une galaxie, son rayon baryonique et son rayon sombre. On a aussi exposé d'après cette théorie les différents modèles de distribution de substance sombre dans les galaxies. Puis on a vu que cette théorie prédisait des relations importantes entre la vitesse des galaxies dans les amas et la masse des amas, ainsi que des relations entre la densité moyenne d'amas correspondants au même décalage Cosmologique z, et on a vu que ces prédictions théoriques étaient en accord avec les données expérimentales. Enfin on a vu que notre théorie de la matière sombre prédisait la valeur du rayon sombre des galaxies avec une courbe de rotation plate, celle-ci étant en accord avec les observations astronomiques sur le rayon sombre minimal de la Voie Lactée, et permettait d'obtenir la densité moyenne de l'Univers en substance sombre pour tout décalage Cosmologique z, et aussi la valeur de la densité de la substance sombre intergalactique pour tout z.

On a vu que la nouvelle Théorie de la matière sombre était compatible avec la MSC. De plus on a modélisé la substance sombre comme un gaz parfait. Il est possible que l'énergie sombre nécessaire dans le MSC soit l'énergie interne de la

substance sombre modélisée comme un gaz parfait et don ayant une énergie interne.

Nous avons aussi dans la 2ième partie proposé un nouveau modèle Cosmologique basé sur la forme géométrique de l'Univers obtenue dans la 1ière partie (sphérique) et sur l' Interprétation Physique du Référentiel de Repos du CMB (RRC) qu'on a appelé *Référentiel Cosmologique local*. Ce nouveau modèle Cosmologique nous a permis de donner une nouvelle définition du temps Cosmologique, en accord avec l'observation. Notre nouveau modèle Cosmologique l'Univers nous a aussi conduit à définir un nouveau type de Référentiel, appelé *Référentiel Cosmologique Universel*. On a ensuite défini à l'intérieur de ce nouveau modèle Cosmologique un premier modèle mathématique d'expansion de l'Univers basé comme le MSC sur la Relativité Générale. On a vu aussi qu'un 2ième modèle mathématique, beaucoup plus simple que le premier, conduisait malgré cette simplicité à des prédictions théoriques en accord avec les observations astrophysiques, notamment prédiction théorique des valeurs des distance de luminosité, de la distance comobile, de la distance angulaire et de la distance temps-arrière. De plus, ce 2nd modèle mathématique d'expansion ne nécessitait pas, contrairement au MSC et au 1ier modèle mathématique d'expansion de l'Univers, l'existence d'une énergie sombre, et donc apportait une solution à l'énigme de énergie sombre. Il devrait aussi être possible de comparer l'accord entre les prédictions théoriques et les observations expérimentales entre celles du 1ier modèle mathématique d'expansion(identique à celles du MSC) et le 2nd modèle mathématique d'expansion. Par exemple on a vu que dans ce 2nd modèle mathématique d'expansion, la constante de Hubble est précisément égale à $1/t_0$, t_0 âge actuel de l'Univers (temps Cosmologique) ce qui n'est pas le cas dans le MSC (Et dans le 1ier modèle mathématique d'expansion). Enfin, nous avons étudié selon notre théorie de l'énergie sombre l'évolution de la température de la substance sombre dans l'Univers, juste après le Big-Bang jusqu'à l'âge actuel de l'Univers, et on a vu l'existence d'une énergie sombre de l'Univers, qui est identifiée à l'énergie interne de la substance sombre, celle-ci étant modélisée comme un gaz parfait.

On a remarqué qu'un élément très attractif en faveur du modèle d'Univers proposé par notre théorie de la matière sombre et de l'énergie sombre est que ce modèle d'Univers, fini et sphérique, peut être conçu par l'esprit humain, ce qui n'était pas le cas pour les modèles proposés par le MSC qui étaient soit infinis soit finis mais sans frontières. C'est notre modèle de matière sombre qui nous a permis de définir un tel modèle géométrique d'Univers, plat et fini.

References:

1.M.Milgrom, A modification of the Newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis, Astrophysical Journal 270 (1983)

2.Stacy Mc Gaugh, A Novel Test of Modified Newtonian Dynamics with Gaz rich

Galaxies, Physical Reviex Letter, arxiv.

3.J.D Bekenstein, Relativistic gravitation theory for the modified Newtonian dynamics paradigm, Physical Review D 70 (2004)

4.M.D Seifert, Stability of spherically symmetric solutions in modified theory of gravitation, Physical Review D 76 (2007)

5. G.W Angus, H.Y Shan, H.S Zhao, B.Famaey, On the proof of dark matter, the law of gravity and the mass of neutrinos, The Astrophysical Journal Letter (2006)

6.P.Kroupa,M.Pawlowski,M.Milgrom, The failures of the standard model of Cosmology require a new paradigm, International Journal of Physics D21 (2012)

7.D.J Raine,E.G Thomas,An introduction to the science of Cosmology,Institute of physics, London (2001).

8.J.V Narlikar, An introduction to Cosmology, Cambridge University press,Cambridge (2002)

9.Helge Kragh, Cosmology and Controversy, Princeton University Press, New Jersey.

10.www.astro.cornell, The Coma cluster.

11. SEDS Messier Database, The Virgo Cluster of galaxies, messier.seds.org/more/virgo.html (2006).

12.D.Fouque, J.Solanes, T.Sanches,C.Balkowski, Structure mass and distance of the Virgo cluster, Astronomy ans Astrophysics (2001).

13.F.H Shu, Coma cluster, Encyclopedia Britannica (Britannica.com).

14.D.R Alves,C.A Nelson, The rotation curve of the Large Magellanic cloud and the implications for Microlensing. The astrophysical Journal (October 2000).

15.Thierry Delort, Théories d'or 10e édition, Editions Books on Demand, Paris (2019)

16. T.Delort, Theory of Ether, Physica Essays 13,4 (2000).

17.G.A Tammann and B.Reindl, Astronomy and Astrophysics 549(2013) (on arXiv)

18. Perlmutter et al, Discovery of a supernova explosion at half the age of the universe, Nature 391, 51-54 (1998).

Article : THEORIE DE L'ETHER AVEC GRAVITATION
Auteur :Thierry DELORT
Date : Juin 2018
Extrait du livre : Théories d'or 10e édition, Editions Books on Demand, Paris
5ième article (Théorie de l'Ether)

Résumé :

Le but de cet article est de montrer que la Théorie moderne de l'Ether peut donner une nouvelle interprétation de l'ensemble des expériences liées à la Relativité Générale (R.G). Nous présentons donc dans cet article une Théorie de l'Ether avec Gravitation (T.E.G) généralisant la Théorie de l'Ether présentée dans l'article Théorie de l'Ether, extrait du livre Théories d'or [(6)]. On généralisera 3 Postulats fondamentaux de la T.E présentés dans ce premier article, lorsqu'on tient compte de la gravitation. L'interprétation du tenseur métrique d'Einstein par la T.E.G conduit à croire que l' expression numérique de celui-ci est valide seulement dans les cas de faible potentiel gravitationnel. (Ce qui est toujours le cas dans les expériences en laboratoire). Nous donnerons donc une nouvelle expression numérique générale de celui-ci d'après la T.E.G. Nous verrons dans cet article comment la T.E.G interprète avec succès l'ensemble des phénomènes liés à la R.G (par exemple la déviation du périhélie de Mercure, celle de la lumière par une masse, l'accélération des horloges en altitude..). Nous verrons qu'il existe dans la T.E.G comme dans la T.E présentée dans le 1ier article [(6)] un espace absolu, mais que l'espace dans lequel nous vivons est différent. Nous verrons aussi que la T.E.G permet d'interpréter à l'aide de ces 2 espaces l'électromagnétisme et la physique quantique de façon beaucoup plus simple mais aussi beaucoup plus complète et générale que la R.G

Mots clés :espace dilaté, Ether, Relativité Générale, tenseur métrique, fluidité du temps, solution de Scwartzchild, espace superposé.

1.INTRODUCTION

Dans un premier article, Théorie de l'Ether [(6)], on a présenté une Théorie moderne de l'Ether (T.E) concernant tous les phénomènes liés à la Relativité Restreinte (R.R).
Dans cet article nous présentons l'interprétation par la Théorie moderne de l'Ether avec Gravitation (T.E.G) des autres phénomènes liés à la Relativité Générale

(R.G). Nous montrons comment le concept de fluidité du temps se généralise, ainsi que les Postulats 1,2,3 introduits dans le 1ier article [6]. La T.E.G demeure en accord avec le Principe Fondamental de la Théorie de l'Ether exposé dans le 1ier article [6]. En particulier, nous allons aussi définir dans la T.E.G un Espace Absolu. Nous allons aussi donner une nouvelle interprétation par la T.E.G du tenseur métrique d'Einstein, cette interprétation justifiant sa forme particulière, et aussi conduisant à penser qu'il n'est valide que pour les faibles potentiels. Nous donnerons sa forme générale, c'est-à-dire valide même quand le Potentiel gravitationnel n'est pas faible, d'après cette interprétation de la T.E.G.
Au début de la section 2 nous présentons un 2ième Principe fondamental de la T.E (avec gravitation), puis les Postulats 4,5,6 qui en sont la conséquence.
Le Postulat 4 définit l'Espace absolu (vide superposé). Il donne l'interprétation physique du Tenseur d'Einstein par la T.E.G. Nous verrons que le concept de fluidité du temps est généralisé. Ce Postulat introduit aussi le concept d'une base propre de dilatation.
Le Postulat 5 généralise la contraction (des temps et des longueurs) due au mouvement en présence de gravitation ainsi que les lois mécaniques.
Le Postulat 6 généralise les lois de l'électromagnétisme et notamment celles concernant la lumière en présence de gravitation.
Dans toute la section 2, on se réfèrera aux Postulats 1,2,3 tels qu'on les a exposé dans le 1ier article [6].
Dans la section 3 nous donnons l'interprétation par la T.E.G des expériences classiques liées à la R.G, cette interprétation étant à la fois nouvelle et plus simple que la R.G.

Nous verrons qu'il est parfois nécessaire d'utiliser l'Espace absolu (vide superposé) E_A introduit dans le Postulat 4, et parfois l'espace dans lequel nous vivons, qu'on appellera Espace dilaté E_d à cause de ses relations ave E_A.

2.POSTULATS

2.1 Principe Fondamental.

Dans le 1ier article [6], on a énoncé un 1ier Principe de la T.E :

1ier PRINCIPE DE LA THEORIE DE L'ETHER:

a)Il existe un Référentiel fixe absolu, appelé « Ether », non équivalent à tous les Référentiels Galiléens, (et définissant donc une simultanéité absolue) .

b)Les lois dans cet Ether sont telles qu'elles tendent à empêcher un observateur au repos dans un Référentiel Galiléen de détecter son mouvement par rapport à l'Ether.

Nous introduisons dans la T.E.G un 2nd Principe :

2ième PRINCIPE DE LA THEORIE DE L'ETHER :

a)En présence de gravitation, on peut définir un *espace dilaté* E_d dans lequel est notre Univers, superposé à un espace absolu E_A.

b)En un point fixe P de l'espace dilaté E_d, on peut définir un tenseur de la T.E.G donnant les correspondances entre les intervalles spatiaux et temporels mesurés dans E_A et dans E_d. Ce tenseur de la T.E.G a l'expression du tenseur métrique d'Einstein dans certains cas, notamment le cas où $V/c^2<<1$ et où on a une seule masse générant le potentiel gravitationnel, celle-ci présentant une symétrie sphérique .

On remarque que le point a) du 2nd Principe est en accord avec le point a) du 1ier Principe.
On justifie le point b) du 2nd Principe de la T.E de la façon suivante :
Dans la R.G, les équations permettant d'obtenir le tenseur métrique d'Einstein ont été obtenues empiriquement, afin d'obtenir, dans l'hypothèse où les particules libres suivent les géodésiques de l'espace-temps, la déviation du périhélie de Mercure. L'obtention de la déviation d'un rayon lumineux avec le même tenseur et la même hypothèse, a été considérée comme une confirmation de la validité des équations permettant d'obtenir le tenseur métrique d'Einstein.
On peut aussi admettre ces équations empiriquement dans la T.E.G dans l'approximation $V/c^2<<1$ pour une raison totalement analogue : Nous établirons qu'avec le tenseur de la T.E.G obtenu par ces équations et l'approximation $V/c^2<<1$, on obtient aussi par la T.E.G, (par une méthode utilisant des nouvelles équations généralisant la T.E sans gravitation, méthode qui n'utilise pas l'hypothèse qu'une particule libre suit une géodésique de l'espace temps, mais généralise une méthode utilisée dans l'approximation Newtonienne), la déviation du périhélie de Mercure dans un modèle où le soleil est immobile dans E_d . Les mêmes équations de la T.E.G et ce tenseur de la T.E.G permettent aussi, dans l'approximation $V/c^2<<1$, d'obtenir la déviation observée d'un rayon lumineux.
Ainsi, on peut admettre empiriquement la validité des équations donnant le tenseur de la T.E.G dans l'approximation $V/c^2<<1$, de la même façon qu'on les admet

empiriquement dans la R.G. Et ceci conduit à obtenir exactement le point b) du 2ième Principe de la T.E exposé précédemment.

La T.E.G utilise beaucoup le 1^{ier} Principe de la T.E : Ainsi, on a vu que le 1^{ier} point du 2ième Principe exprimait la validité du 1^{ier} point du 1^{ier} Principe en présence de gravitation. De plus, on verra que les Postulats 4,5,6 de la T.E.G généralisent les Postulats 1,2,3 de la T.E, exposés dans le 1^{ier} article Théorie de l'Ether [(6)], qui étaient la conséquence du 1^{ier} Principe en l'absence de gravitation. On verra aussi qu'on utilise le 1^{ier} Principe dans le cas où une masse créant le Potentiel n'est pas immobile dans E_A, mais est immobile dans un Référentiel Galiléen.

On verra dans les Postulats 4,5,6 que la T.E.G introduit des équations qui n'existaient pas dans la R.G, que ce soit concernant les contractions temporelle et spatiale, mais aussi en ce qui concerne les équations de la mécanique, de l'électromagnétisme et de la Physique quantique. Ces équations généralisent la T.E sans gravitation, de façon beaucoup plus générale que la R.G généralise la R.R.

Notons que la simultanéité absolue est définie par l' Espace absolu E_A. Et donc comme dans la Théorie de l'Ether sans gravitation, un évènement Ev1 peut être la cause d'un évènement Ev2 que si Ev1 et Ev2 se produisent à des temps absolus t_1 et t_2 de E_A avec $t_1<t_2$.

Présentons maintenant les Postulats 4,5,6 généralisant les Postulats 1,2,3.

2.2 **Temps et Espace absolu :Postulat 4.**

2.2.1 *Le Postulat 4A*.

Le Postulat 4 définit un Espace absolu dans la T.E.G, qui est aussi appelé l'Espace absolu vide superposé à cause de sa définition.

POSTULAT 4A :

a)Il existe un *Espace absolu* E_A, espace Euclidien défini exactement comme l'Espace absolu défini dans le Postulat 1 du premier article, sans gravitation et avec des horloges et des règles standards fixes virtuelles définissant des longueurs et des temps absolus.

b)En présence de gravitation, la masse M générant le potentiel étant immobile dans E_A (Nous étudierons dans l'article suivant « Suite de la Théorie de l'Ether » [(9)] le

cas où M est au repos dans un Référentiel Galiléen R_A'), il existe un *Espace dilaté* E_d, qui est l'espace dans lequel nous vivons, tel que E_A est superposé à E_d et E_d est fixe par rapport à E_A. Le temps de E_d est mesuré par des horloges standards (virtuelles) et les distances dans E_d sont mesurées par des règles standards, celles-ci étant placées dans E_d et fixes par rapport à E_d et E_A. Tout point de E_d est superposé à un point de E_A, on pourra identifier ces 2 points.

c)Les objets rigides dans E_d sont soumis à des contractions des longueurs relatives identiques à celles des règles standards. C'est-à-dire que si un objet a une longueur L_0 mesuré dans E_A, c'est-à-dire en l'absence de gravitation, alors placé dans E_d il a la même longueur L_e=L_0 mesuré par une règle standard situé dans E_d.

Une conséquence de ce Postulat 4 est que toute courbe (fixe) de E_d peut être superposée à une courbe de E_A. De plus toute distance et tout intervalle de temps peuvent être mesurés dans E_d et dans E_A. Un objet ou une horloge quelconque peuvent être placés ou bien dans E_d, ou bien dans E_A c'est-à-dire en l'absence de gravitation.

Puisque E_A ne contient que des horloges et des règles standards virtuelles, et qu'il est superposé à notre Espace, on l'appellera aussi *Espace absolu vide superposé*.
Puisque E_d est l'espace dans lequel on vit contenant notamment l'éther substance défini dans les articles précédents, on l'appellera aussi *Espace éthéré*. Nous justifierons plus loin son appellation « Espace dilaté ».

On appellera donc *variables éthérées* les variables mesurées dans E_d et *variables absolues* les variables mesurées dans E_A.
E_A étant un Espace absolu définit comme dans le 1ier article [(6)] une simultanéité absolue.

Le Postulat 4B donne la relation entre les variables absolues et les variables éthérées. Cette relation utilise une interprétation du tenseur métrique d'Einstein.
On rappelle que l'expression du tenseur métrique d'Einstein est :

$$c^2\, d\tau^2 = c^2\, g_{00}\, dt^2 + \Sigma\, g_{ij}\, dx_i\, dx_j \qquad (1)$$

Avec (g_{ij}) est une matrice symétrique. (On supposera classiquement que i,j peuvent représenter les naturels 1,2,3)

On a alors le Postulat suivant, définissant le tenseur de la T.E.G :

POSTULAT 4Ba :

-En tout point fixe P de E_d, on peut définir le tenseur de la T.E.G relativement à une base orthonormée ($\mathbf{i}_A$,$\mathbf{j}_A$,$\mathbf{k}_A$) de E_A par:

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt_e^2 - ds_e^2 \qquad (2)$$

Avec dt_e est un intervalle de temps mesuré dans E_d, ds_e est une longueur mesurée dans E_d et :

$$dt_e^2 = g_{00}\, dt_A^{\ 2}$$

$$ds_e^2 = - \Sigma\, g_{ij}\, dx_{iA}\, dx_{jA} \qquad (3)$$

-Si le tenseur métrique de la T.E.G relativement à une base ($\mathbf{i}_A$,$\mathbf{j}_A$,$\mathbf{k}_A$) a l'expression précédente (3), alors si d$\mathbf{M}_A$ est un vecteur élémentaire dans E_A situé en P de coordonnées absolues (dx_{1A},dx_{2A},dx_{3A}) dans la base ($\mathbf{i}_A$,$\mathbf{j}_A$,$\mathbf{k}_A$), alors ds_e (donné par l'équation (3)) est la longueur de d$\mathbf{M}_A$ en P mesuré dans E_d (c'est-à-dire d'après le Postulat 4A mesurée par une règle standard en P mais dans E_d).
Si dt_A est un intervalle de temps absolu entre 2 évènements se produisant en P, alors dt_e (donné par l'équation (3)) est la mesure de dt_A en P dans E_d (C'est-à-dire mesuré par une horloge standard en P mais dans E_d.)

Dans le cas où le potentiel est crée par une masse sphérique au repos dans E_A, on peut s'attendre à ce que (g_{ij}) est la forme proche de celle obtenue en R.G ,c'est-à-dire soit diagonale pour une certaine base. Considérons donc le cas où (g_{ij}) est diagonale. Dans ce cas, on peut définir de la façon suivante une base propre de dilatation:

2.2.2 Définition d'une base propre de dilatation ou de contraction .

On considère donc au point P fixe (par rapport à E_A ou E_d) un vecteur élémentaire d$\mathbf{M}_A$, et un intervalle de temps dt_A, tous 2 mesurés dans E_A.
On suppose que ($\mathbf{i}_A$,$\mathbf{j}_A$,$\mathbf{k}_A$) est une base orthonormée de E_A.

On dira que ($\mathbf{i}_A$,$\mathbf{j}_A$,$\mathbf{k}_A$) est une *base propre de dilatation de* E_A (en P) *associée à* (A_x,A_y,A_z,A_t) A_x,A_y,A_z,A_t étant 4 réels, si on a toujours, pour d$\mathbf{M}_A$ vecteur élémentaire mesuré dans E_A en P tel que :

$$d\mathbf{M}_A = dx_A\, \mathbf{i}_A + dy_A\, \mathbf{j}_A + dz_A\, \mathbf{k}_A \qquad (4)$$

Alors $d\mathbf{M}_A$ correspond au vecteur élémentaire $d\mathbf{M}_e$ mesuré dans E_d tel que:

$$d\mathbf{M}_e = dx_A A_x \mathbf{i}_e + dy_A A_y\, \mathbf{j}_e + dz_A A_z\, \mathbf{k}_e \qquad (5)$$

$(\mathbf{i}_e,\mathbf{j}_e,\mathbf{k}_e)$ étant une base orthonormée locale de E_d en P telle que $\mathbf{i}_e,\mathbf{j}_e,\mathbf{k}_e$ sont respectivement de même sens et de même direction que $\mathbf{i}_A,\mathbf{j}_A$ et $\mathbf{k}_A$.

et dt_A correspond à l'intervalle de temps dt_e mesuré dans E_d (en P) :

$$dt_e = A_t\, dt_A \qquad (6)$$

Donc $d\mathbf{M}_e$ a pour coordonnées (dx_e,dy_e,dz_e) dans la base locale orthonormée de E_d en P $(\mathbf{i}_e,\mathbf{j}_e,\mathbf{k}_e)$, avec $dx_e=A_x dx_A$, $dy_e=A_y dy_A$,$dz_e=A_z dz_A$.

On remarque qu'on a aussi l'expression :

$$d\mathbf{M}_e = dx_A A_x \mathbf{i}_A + dy_A A_y\, \mathbf{j}_A + dz_A A_z\, \mathbf{k}_A \qquad (6aX)$$

Avec dans l'expression précédente les vecteurs du terme de gauche exprimés dans la base $(\mathbf{i}_e,\mathbf{j}_e,\mathbf{k}_e)$ et ceux du terme de droite dans la base $(\mathbf{i}_A,\mathbf{j}_A,\mathbf{k}_A)$.

On dira que ($\mathbf{i}_e$, $\mathbf{j}_e$, $\mathbf{k}_e$) est une *base propre de contraction de* E_d en P associée à (C_x,C_y,C_z,C_t) avec $C_i=1/A_i$, pour i =x,y,z,t.

Le Référentiel local (P, $\mathbf{i}_e$, $\mathbf{j}_e$, $\mathbf{k}_e$,t_e) dont le temps est le temps éthéré local et donne la simultanéité absolue, sera noté $R_e(P)$ et appelé *Référentiel local propre* de E_d(ou *Référentiel local éthéré propre*)

De même le Référentiel local (P, $\mathbf{i}_A$, $\mathbf{j}_A$, $\mathbf{k}_A$, t_A) dont le temps est le temps absolu, sera noté $R_A(P)$ et appelé *Référentiel local absolu propre*.

Si on a en P un vecteur élémentaire mesuré dans E_d $d\mathbf{M}_e= dx_e\mathbf{i}_e+dy_e\, \mathbf{j}_e +dz_e\mathbf{k}_e$, alors $d\mathbf{M}_e$ correspond au vecteur $d\mathbf{M}_A$ mesuré dans E_A : $d\mathbf{M}_A= C_x dx_e\mathbf{i}_A + C_y\, dy_e\mathbf{j}_A +C_z\, dz_e\, \mathbf{k}_A$

On dira que E_d est alors *localement Euclidien* en P.

On remarque que d'après ce qui précède, on a avec les mêmes notations si ds_e est la longueur de $d\mathbf{M}_e$ mesurée dans E_d :

$$ds_e^2 = dx_A^2(A_x)^2 + dy_A^2 (A_y)^2 + dz_A^2(A_z)^2 \qquad (7)$$

et:

$$dt_e^2 = (A_t)^2 dt_A^2 \qquad (8)$$

Et donc l'expression du tenseur métrique de la T.E.G en P relativement à une base propre de dilatation est très simple.

On remarque que si on a une base propre de dilatation, on peut généraliser le Postulat 4Ac : Si un objet rigide a une volume V_0 mesuré dans E_A placé dans E_A,(C'est-à-dire en l'abscence de gravitation) alors placé en E_d en un point P où il y a une base propre de dilatation, il a un volume V_0 mesuré dans E_d.

Le Postulat 4Bb permet réciproquement d'obtenir une base propre de dilatation à partir du tenseur métrique de la T.E.G :

2.2.3 Le Postulat 4Bb.

POSTULAT 4Bb :

Si en un point P, le tenseur métrique de la T.E.G a l'expression donnée dans le Postulat 4Ba, avec (g_{ij}) diagonale dans une base $(\mathbf{i}_A,\mathbf{j}_A,\mathbf{k}_A)$ de E_A, avec g_{ii} négatif pour i=1,2,3 et g_{00} positif, alors en P $(\mathbf{i}_A,\mathbf{j}_A,\mathbf{k}_A)$ est une base propre de dilatation associée à (A_x,A_y,A_z,A_t) A_x,A_y,A_z,A_t étant des réels positifs définis par :

$$A_x^2 = -g_{11},\ A_y^2 = -g_{22},\ A_z^2 = -g_{33} \qquad (9)$$
$$A_t^2 = g_{00}$$

Par exemple si en P le tenseur métrique de la T.E.G a une expression identique au tenseur métrique d'Einstein obtenu en R.G dans le cas d'une masse sphérique, appelé solution de Scwartzchild, (C'est à dire comme on l' a admis qu'on obtient dans l'hypothèse $V/c^2<<1$ le tenseur de la T.E.G par les mêmes équations que celles permettant d'obtenir le tenseur métrique d'Einstein), alors (g_{ij}) est de la forme :

$$g_{11} = \frac{-1}{1-2GM/R_A c^2},\ g_{22} = g_{33} = -1,\ g_{00} = 1 - 2GM/R_A c^2 \qquad (10)$$

dans la base (**i** , **j** , **k**), avec **i** est dans la direction du rayon de la masse sphérique. Si d'après le Principe 2ième de la T.E.G on admet que ce tenseur est le tenseur de la T.E.G avec l'approximation $V/c^2<<1$, on obtient le Postulat 4Bc de la T.E.G qui est le plus simple concernant l'existence d'une base propre de dilatation dans le cas d'une masse sphérique au repos dans E_d, en utilisant la Postulat 4Bb :

POSTULAT4Bc :

Dans le cas d'une masse sphérique au repos dans E_d, tel que le potentiel gravitationnel est créé seulement par cette masse, alors si $(\mathbf{i}_A, \mathbf{j}_A, \mathbf{k}_A)$ est une base dans E_A en un point P telle que $\mathbf{i}_A$ est dans la direction du rayon de la masse sphérique, $(\mathbf{i}_A, \mathbf{j}_A, \mathbf{k}_A)$ est alors une base propre de dilatation (en P) associée à (A_x, A_y, A_z, A_t) avec, V étant le Potentiel gravitationnel en P:

$$A_x = \frac{1}{1-V/c^2},\ A_y = A_z = 1,\ A_t = 1 - V/c^2 \qquad (11)$$

On prendra dans cet article pour « potentiel gravitationnel », (représenté par « V »), une convention différente de la convention habituelle : V est le potentiel gravitationnel en P signifiera dans cet article qu'en P, un objet de masse m a une énergie potentielle gravitationnelle en P $E_p=-mV$. Cette convention permet d'avoir toujours un potentiel gravitationnel V positif. Nous verrons plus loin que d'après la T.E.G, une masse ponctuelle M génère en P à une distance R_A (mesurée dans E_A) de M, un potentiel gravitationnel $V(P)=GM/R_A$. On utilisera la lettre U pour représenter le potentiel gravitationnel avec sa signification conventionelle, avec donc $U=-V$ négatif.

On voit que le tenseur de la T.E.G obtenu par les dilatations définies dans l'équation (11) n'est pas identique au tenseur métrique de l'équation (10) obtenu en

utilisant les équations du tenseur d'Einstein de la R.G lorsque V/c^2 n'est pas négligeable devant l'unité.

On verra plus loin que le Postulat 4Bc, obtenu dans le cas d'une masse sphérique statique créant le Potentiel peut se généraliser dans le cas de plusieurs masses statiques et de forme quelconque. On verra cependant plus loin que dans le cas de masses générant le potentiel gravitationnel non statiques, on devra utiliser cependant les equations de la R.G pour obtenir les ondes gravitationelles (Section 4.8), l'existence de celles-ci étant compatibles avec la T.E.G.

On appellera A_t, introduit dans la définition d'une base propre de dilatation en P *amplification temporelle* locale en P.
On remarque que si on a une base propre de dilatation en P avec les notations de 2.2.3, si on considère un volume dV_A absolu mesuré dans E_A (par exemple un volume parallélépipédique de cotés de longueurs absolues dx_A,dy_A,dz_A suivant $\mathbf{i}_A$,$\mathbf{j}_A$,k_A), il correspond à un volume parallélépipédique de cotés de longueurs dx_e,dy_e,dz_e mesurées dans E_d suivant $\mathbf{i}_A$,$\mathbf{j}_A$,$\mathbf{k}_A$, et donc dV_A correspond au volume dV_e mesuré dans E_d avec :

$$dV_e = dx_e\, dy_e\, dz_e = A_x\, A_y\, A_z\, dx_A\, dy_A\, dz_A = A(e)\, dV_A \qquad (12)$$

On appellera donc aussi $A(e)=A_xA_yA_z$ *l'amplification spatiale* (relativement à E_A) locale en P. D'après l'expression (11), on a A(e) est supérieure à 1 et ceci est l'origine du fait qu'on a appelé E_d « Espace dilaté ».
Ainsi, si un objet rigide a un volume absolu V_0 lorsqu'il est placé dans E_A. S'il est placé dans E_d en un point P où il y a une base propre de dilatation, on a vu qu'il a un volume $V_e=V_0$ mesuré dans E_d . De plus si A(e) est l'amplification spatiale en P, son volume absolu V_A est alors d'après l'équation (12) $V_A=V_e/A(e)=V_0/A(e)$. Son volume absolu est donc contracté d'un facteur 1/A(e) par rapport à un objet identique placé dans E_A c'est-à-dire en absence de gravitation.

On remarque que dans le cas de l'équation (11), on a :

$$A(e) = \frac{1}{A_t} \qquad (13)$$

Ceci sera établi plus loin dans le cas d'une base propre de dilatation quelconque, et sera interprété comme la conséquence de la nature fluidique du temps introduite dans le Postulat 2 du premier article [(6)].

De la même façon qu'on définit l'amplification précédente A(e), on peut définir une contraction spatiale (relativement à E_d) $C(e)=1/A(e)=C_xC_yC_z=1/C_t$

(C_x,C_y ,C_z étant définis dans la section 2.2.3).

2.2.4 Remarques concernant le Postulat 4.

2.2.4 (a)Analogie.

Pour représenter une analogie entre les relations entre E_A et E_d, on peut considérer une feuille de papier calque légèrement courbée au dessus d'une feuille blanche plane.

La feuille blanche plane peut être considérée comme un plan Euclidien,tout point de la feuille courbée est superposé à un point sur la feuille blanche qui est sa projection orthogonale sur celle-ci. On obtient donc entre les distances et les courbes sur les 2 feuilles des relations analogues entre les distances et les courbes de E_A et de E_d.

De même, on peut considérer que sur la feuille pliée, des horloges placées en chaque point ne donnent pas le même temps que les horloges sur la feuille blanche.

2.2.4(b)Cas où (g_{ij}) n'est pas diagonal.

Dans le cas où (g_{ij}), défini dans l'équation (3) n'est pas diagonale, on peut prouver qu'en général, une base propre de dilatation existe.

En effet, utilisant la propriétés qu'une matrice symétrique est diagonalisable, il existe une base orthonormée ($\mathbf{i}_A$',$\mathbf{j}_A$',$\mathbf{k}_A$') de E_A, et des réels g'_{11},g'_{22},g'_{33} tels que l'on ait , (dx'_A,dy'_A,dz'_A) étant les coordonnées d'un intervalle $d\mathbf{M}_A$ en P mesuré dans E_A:

$$ds_e^2 = -\Sigma g_{ij}\, dx_i dx_j = - g'_{ii}\, dx'^2_i \qquad (14)$$

Dans le cas où les g'_{ii} sont négatifs, ce qui sera toujours le cas puisque ds_e^2 doit toujours être positif, on obtient donc que ($\mathbf{i}'_A$,$\mathbf{j}'_A$,$\mathbf{k}'_A$) est une base propre de dilatation associée à (A'_x,A'_y,A'_z,A'_t) définis dans le Postulat 4Bb.

2.2.4(c) Fluidité du temps.

On a vu qu'on a dans le premier article (6) associé au temps un fluide temporel, une horloge standard mesurant le temps s'écoulant sur elle, ce temps étant proportionnel à la quantité de fluide temporel l'ayant traversée. On a vu que cette

interprétation justifiait l'égalité entre les contractions spatiales et temporelles observées dans le cas sans gravitation du Postulat 2 de l'article (6).

On peut généraliser cette interprétation du temps dans la T.E.G :
Considérons donc, E_A et E_d ayant été définis comme dans le Postulat 4A un point fixe P dans lequel on a une amplification d'espace A(e), définie dans l'équation (12). On considère que dans E_A, le fluide temporel s'écoule comme dans l'espace absolu dans le cas sans gravitation, c'est-à-dire avec un débit constant (mesuré entre des temps absolus), proportionnel au volume absolu dans lequel il s'écoule.
On suppose comme dans le 1ier article [6] qu'une horloge standard indique un temps proportionnel au fluide temporel ayant traversé les particules lourdes qui la composent (noyaux).
Si une horloge standard est située en P mais dans E_d, les particules lourdes qui la composent sont aussi fixes dans E_d, et on a vu que leur volume absolu, c'est-à-dire mesuré dans E_A est réduit d'un facteur 1/A(e) par rapport aux particules lourdes d'une horloge identique et fixe mais située dans E_A.
Il en résulte que si dt_A est un intervalle de temps mesuré par une horloge standard dans E_A fixe dans E_A, et si dt_e est cet intervalle de temps mesuré par une horloge standard dans E_d en un point P d'amplification spatiale A(e), on a à cause de la contraction du volume absolu de l'horloge dans E_d :

$$dt_e = \frac{dt_A}{A(e)} \qquad (15)$$

Et donc

$$A_t = \frac{1}{A(e)} \qquad (16)$$

On voit donc que l'interprétation de l'aspect fluidique du temps par la T.EG interprète la forme générale des tenseurs de la T.E.G relativement à une base propre en un point P, notamment celui du tenseur d'Einstein dans le cas d'une masse sphérique statique. On a en effet la relation :

$$g_{00} = \frac{-1}{g_{11}} \qquad (17)$$

On voit donc que le Postulat 4 définit les relations entre les longueurs et les temps de 2 espaces fondamentaux,l'Espace absolu (vide superposé) sans gravitation E_A et l'espace éthéré avec gravitation E_d, dans lequel on vit.

2.3 Contractions et lois de la mécanique dans la T.E.G.

2.3.1 Le Postulat 5A.

On voit qu'on a introduit dans le Postulat 4A deux espaces fondamentaux E_A et E_d. Si on veut généraliser les lois en l'absence de gravitation exposées dans les 3 premiers Postulats du 1ier article (Théorie de l'Ether [(6)]), il est clair que leur généralisation la plus simple serait qu'on puisse les transposer à l'identique dans l'un ou l'autre espace. Le problème est cependant de savoir dans quel espace on doit les généraliser. Nous verrons que parfois il est beaucoup plus naturel et plus simple de les transposer à l'identique dans un des 2 espaces plutôt que l'autre. Parfois il est impossible de les transposer à l'identique dans l'un des 2, et parfois on doit les transposer partiellement dans l'un ou l'autre. Enfin, c'est souvent les expériences réalisées qui confirment ou infirment la validité de ces généralisations. De façon générale cependant, les généralisations de la T.E sans gravitation obtenues dans la T.E.G sont beaucoup plus claires , naturelles et complètes que ne l'est la R.G par rapport à la R.R.

On a vu dans le Postulat 2 qu'un objet animé d'une vitesse v dans un espace absolu sans gravitation E_A se contractait d'un facteur C(v) dans la direction de son mouvement. Introduisant le concept de fluide temporel, on a justifié que le temps propre de cet objet en mouvement (c'est-à-dire mesuré par une horloge coïncidant avec lui) était contracté du même facteur C(v) par rapport au temps propre d' un objet identique mais au repos dans E_A .
Le Postulat 5A généralise ceci, et en particulier le concept de fluidité du temps en présence de gravitation :

POSTULAT 5A :

a)Si un objet placé en un point fixe P dans E_d est animé d'une vitesse éthérée $\mathbf{v}_e$, alors il se contracte d'un facteur $C(v_e)=(1-v_e^2/c^2)^{1/2}$ par rapport à E_d dans la direction de son mouvement (c'est-à-dire celle de $\mathbf{v}_e$).

b)De plus, le temps propre de l'objet animé de la vitesse éthérée $\mathbf{v}_e$ (c'est-à-dire mesurée par une horloge dans E_d coïncidant avec l'objet) se contracte du même

facteur $C(v_e)$ par rapport au temps propre d'un objet en P dans E_d mais au repos dans E_d.

Le Postulat 5A généralise donc le Postulat 2a) et b) ainsi que le concept de fluide temporel.
Considérons un objet matériel O. Si cet objet O est en un point P dans E_d (c'est-à-dire en présence de gravitation) où il y a une base propre de dilatation et que O est animé de plus d'une certaine vitesse par rapport à E_d , O est donc soumis à des contractions temporelles et spatiales par rapport au même objet immobile et situé dans E_A (c'est-à-dire en l'absence de gravitation) provenant de 2 origines : L'une est due à l'effet de la gravitation exprimée dans le Postulat 4Bb, et l'autre à la vitesse éthérée exprimée dans le Postulat 5A .
Le choix d'obtenir une contraction $C(v_e)$ en fonction de $\mathbf{v}_e$ et non de $\mathbf{v}_A$ permet de conserver un Espace localement Euclidien. Il s'ensuit une grande simplicité mathématique.

On suppose qu'on a une base propre de contraction($\mathbf{i}_e$,$\mathbf{j}_e$, $\mathbf{k}_e$) associée aux contractions (C_x, C_y ,C_z , C_t) en un point fixe P de E_d. On considère alors une règle BC en un point P de E_d , telle que mesurée dans E_d au point P, le vecteur $\mathbf{BC}_e$ ait l'expression :

$$\mathbf{BC}_e = a\,\mathbf{i}_e + b\,\mathbf{j}_e + c\,\mathbf{k}_e \qquad (18)$$

Si on anime cette règle d'une vitesse éthérée v_e suivant $\mathbf{i}_e$, alors elle devient d'aprés le Postulat 5A, mesurée dans ($\mathbf{i}_e$,$\mathbf{j}_e$,$\mathbf{k}_e$):

$$\mathbf{BC}_e(v_e)= aC(v_e)\,\mathbf{i}_e + b\,\mathbf{j}_e + c\,\mathbf{k}_e \qquad (19X)$$

De plus d'aprés le Postulat 5A si une horloge dans E_d est animée d'une vitesse éthérée $\mathbf{v}_e$, son temps propre, c'est à dire celui mesurée par une horloge dans E_d coincidant avec elle, devient $T(v_e)=C(v_e)T_e$, T_e étant le temps indiquée par les horloges immobiles dans E_d.

2.3.2 Le Postulat 5.B

On définit les *coordonnées éthérées* localement en un point P fixe de E_d où il y a une base propre de dilatation, comme les coordonnées dans le Référentiel local éthéré (Euclidien) $R_e(P)$, défini en 2.2.2. Et donc, $R_e(P)$ étant tel que la simultanéité dans $R_e(P)$ est équivalente à la simultanéité dans l'espace absolu E_A si

on choisit une origine des temps communes à $R_e(P)$ et $R_A(P)$, si T_A est le temps de $R_A(P)$ et T_e le temps de $R_e(P)$, on a, d'après le Postulat 4Bb :

$$T_e=A_tT_A \qquad (26aX)$$

D'après la définition d'une base propre de dilatation, $R_e(P)$ existe toujours si en P il y a une base propre de dilatation.

Le Postulat 5B généralise les lois mécaniques de la T.E exposées dans le 1ier article en présence de gravitation. D'après la définition des variables éthérées qu'on a donnée plus haut, la vitesse éthérée d'une particule, mesurée dans son Référentiel local éthéré $R_e(P)$ est :

$$\mathbf{v}_e = \frac{d\mathbf{M}_e}{dt_e} \qquad (27)$$

On pourrait se demander pourquoi l'expression de la contraction du Postulat 5A est de la forme $C(v_A)$ au lieu de $C(v_e)$. Nous verrons dans l'article suivant « Suite de la Théorie de l'Ether » que ceci simplifie beaucoup le cas d'une masse créant le Potentiel qui n'est pas statique. Cependant avec les amplifications exprimées dans le Postulat 4Bb, on obtient $(C(v_e)/C(v_A))-1$ est de l'ordre de $(V/c^2)(v_e^2/c^2)/(1-v_e^2/c^2)$, avec un Potentiel V sur la terre de l'ordre de 10^{-10}, ce qui correspond à une incertitude de l'ordre de 10^{-10} sur la vitesse. Plus généralement cela signifie que si on a une prédiction théorique d'un temps avec un facteur $C(v_e)/C(v_A)$ (ou d'une longueur), on ne pourra observer cet effet (de différence entre $C(v_e)$ et $C(v_A)$) que si on a une précision du temps (ou de la longueur) supérieure à $(V/c^2)(v_e^2/c^2)/(1-v_e^2/c^2)$, c'est-à-dire à $(V/c^2)(v_e^2/c^2)$ dans le cas où $v_e/c<<1$. Or on n'a jamais obtenu expérimentalement avec une telle précision à la fois une vitesse aussi précise et une mesure du temps aussi précise.

On a alors le Postulat suivant, généralisant les lois sans gravitation :

POSTULAT 5.B

a)L'énergie de mouvement d'une particule est définie par:

$$E = \frac{mc^2}{C(v_e)} \text{ avec } C(v_e) = \sqrt{1 - v_e^2 / c^2} \qquad (28)$$

b)L'énergie potentielle en un point P induite par une masse M sphérique au repos dans E_A est, V étant défini comme le potentiel gravitationnel en P induit par M :

$$U = E_P = \frac{-GMm}{r_A} = -mV \qquad (29)$$

r_A est la distance entre P et le centre de la masse M mesurée dans E_A.

c) Localement dans un Référentiel local $R_e(P)$, les équations de Lagrange en coordonnées éthérées sont valides avec le Lagrangien d'une particule de charge q :

$$L = \frac{-mc^2}{\gamma} - U + q\mathbf{v}_e.\mathbf{A}_e \text{ , avec } \gamma = \frac{1}{C(v_e)} \text{ et } U = qV_e - mV_G \qquad (30)$$

Dans l'expression précédente ($\mathbf{A}_e$,V_e) est le quadrivecteur Potentiel qu'on peut obtenir d'après le Postulat 6 suivant. V_G est le potentiel gravitationnel.

d)Dans les interactions dans $R_e(P)$, l'énergie se conserve, et aussi la quantité de mouvement P_m dans le cas d'un système isolé ou d'une collision élastique, celle-ci, exprimée dans Re(P), étant liée à l'énergie de mouvement E_m par $E_m^2-P_m^2c^2=m^2c^2$, m étant la masse inerte d'une particule.

De plus, l'énergie totale d'un objet ponctuel (Somme des énergie de mouvement (Eq.(28)), gravitationnelle (Eq.(29) et électromagnétique (Eq.(30) se conserve non seulement dans les Référentiels locaux $R_e(P)$ mais aussi dans E_d . (Par exemple dans le cas d'une planète).

On remarque qu'on obtient le Postulat 5Bb en généralisant à l'identique les équations classiques donnant le Potentiel gravitationnel dans l'Espace absolu E_A. Il n'est pas possible de généraliser ces équations à l'identique dans E_d car E_d n'est pas Euclidien.

Au contraire E_A est Euclidien, et donc il est possible de transposer à l'identique les équations précédentes dans E_A. On obtient alors facilement le Potentiel gravitationnel en tout point, et on peut alors généraliser dans le cas statique le Postulat 4Bb : En un point P de Potentiel gravitationnel V, il existe une base de dilatation ($\mathbf{i}_A$,$\mathbf{j}_A$,$\mathbf{k}_A$), avec $\mathbf{i}_A$ orthogonal aux équipotentielles, associées aux amplifications (A_x,A_y,A_z,A_t) ayant les mêmes expressions en fonction du Potentiel que dans le Postulat 4Bb.

On peut justifier que les lois de l'interaction gravitationnelle ne se transposent pas à l'identique dans E_d contrairement aux lois des autres interactions,

comme l'électromagnétisme, comme on le verra dans le Postulat 6 par le fait que l'interaction gravitationnelle est fondamentalement différente des autres interactions. En particulier, c'est la seule à agir sur le temps et l'espace, mais aussi, c'est la seule à agir sur de très grandes distances De plus, on verra qu'elle n'agit pas sur la masse des particules contrairement aux austres interactions.
On obtient localement les équations de Lagrange en coordonnées éthérées du Postulat 5Bc exactement comme dans le cas classique puisque E_d est localement Euclidien et localement les équations de Maxwell et l'expression de l'énergie en coordonnées éthérées sont identiques aux équations de Maxwell et l'expression de l'énergie classiques.

On voit que les équations précédentes du Postulat 5B sont extrêmement simples, généralisant la Théorie de l'Ether sans gravitation présentée dans le 1^{ier} article. On verra qu'elles permettent d'obtenir certains résultats (déviation du périhélie de Mercure et de la lumière par une masse), de façon complètement analogue à la méthode classique pré-relativiste. Elles expliquent aussi, avec le Postulat 6 suivant, pourquoi la prédiction théorique des expériences réalisées en laboratoire en physique des particules ne nécessite pas de faire intervenir des corrections dues à la T.E.G : Les équations prévoyant le résultat de ces expériences sont avec une très bonne approximation identiques exprimées en coordonnées éthérées à leur expression en l'absence de gravitation.

2.4 La lumière et les photons dans la T.E.G-Postulat 6

Le Postulat 6 exprime les lois de la T.E.G concernant la lumière et les photons.

2.4.1 Le Postulat 6.A

Ce Postulat généralise les équations de Maxwell dans la T.E.G :

POSTULAT 6.A :

Les équations de Maxwell sont valides exprimées dans un Référentiel local $R_{e(}P)$ en coordonnées éthérées, en tout point P où il y a une base propre de dilatation.

Une conséquence de ce Postulat 6A est que la vitesse éthérée de la lumière et des photons se propageant dans E_d est constante et est égale à c. On voit que ceci est en accord avec le Postulat 5Ba.

2.4.2 Le Postulat 6.B :

On conserve notre modèle de photon introduit dans le 1[ier] article [(6)]. Selon ce modèle, un photon est constitué de 2 points matériels se déplaçant à la vitesse c. Ici d'après ce qui précède c est la vitesse éthérée des photons. La période absolue T_A d'un photon est l'intervalle de temps mesuré dans E_A en un point fixe P de E_A, (C'est-à-dire par une horloge standard dans E_A coïncidant avec P) entre l'arrivée des 2 points matériels. La période éthérée T_e mesurée en P de ce photon est l'intervalle de temps entre l'arrivée des 2 points matériels mesurée par une horloge standard en P mais dans E_d et non dans E_A.
On a donc la relation si on a une amplification temporelle A_t en P, d'après l'équation (6) :

$$T_e=A_tT_A \qquad (31X)$$

La fréquence absolue ν_A et la fréquence éthérée ν_e du photon en P sont respectivement l'inverse de T_A et de T_e.
On a vu dans le 1[ier] article que d'après le Postulat 1, l'énergie d'un photon sans gravitation était $E=h\nu_A$, ν_A fréquence absolue du photon. Ceci est généralisé dans le Postulat suivant :

POSTULAT 6B :

a) L'énergie d'un photon de fréquence absolue ν_A est :

$$E=h\nu_A \qquad (32)$$

b)L'impulsion (mesurée dans $R_e(P)$) d'un photon de fréquence éthérée ν_e se déplaçant dans la direction d'un vecteur unitaire **u** est :

$$P_m=(h\nu_e/c)\mathbf{u} \qquad (33X)$$

On rappelle que d'après l'équation (31X) en un point P d'amplification temporelle A_t :

$$\nu_e =\nu_A /A_t = \nu_AC_t \qquad (34)$$

On peut interpréter le Postulat 6B par le fait qu'un photon de fréquence éthérée ν_e a une masse inerte nulle mais une masse grave de $h\nu_e/c^2$. On suppose que son énergie de mouvement est $E_m=h\nu_e$.

Il en résulte que son énergie totale est $E=h\nu_e-h\nu_e V/c^2=h\nu_e(1-V/c^2)$. Et donc supposant que comme dans le Postulat 4Bb et sa généralisation l'amplification temporelle en P est $A_t=1-V/c^2$, on obtient que l'énergie du photon est d'après l'équation (34) $E=h\nu_e A_t=h\nu_A$.

Utilisant la relation entre l'énergie de mouvement E_m et l'impulsion P_m on obtient l'équation (33X).

Nous verrons dans l'article suivant « Suite de la Théorie de l'Ether » une 2ième interprétation utilisant les équations de la mécanique quantique dans la T.E.G .

On remarque que d'après la conservation de l'énergie, la fréquence absolue du photon se conserve mais non sa fréquence éthérée.

2.4.3 Le Postulat 6.C :

Ce Postulat généralise le Postulat 3 du 1ier article (6) :

POSTULAT 6C :

Si une particule placée dans E_A (C'est-à-dire en absence de gravitation) émet au repos par rapport à E_A un photon ayant une période absolue T_0 par un processus Φ, (désintégration ou désexcitation) alors une particule identique placée dans E_d émettra par un processus identique Φ un photon de période T_p, T_p temps entre l'émission des 2 points matériels mesuré par une horloge dans E_d coïncidant avec la particule avec :

$$T_p=T_0 \qquad (35)$$

D'après l'équation (26aX) et le Postulat 5A, si T_A est le temps absolu correspondant à T_p et si v_e est la vitesse éthérée de la particule, on a si C_t est la contraction temporelle là où est la particule :

$$T_p = T_0 = C(v_e)T_e = \frac{C(v_e)T_A}{C_t} \qquad (36X)$$

Et donc :

$$\nu_p = \nu_0 = \frac{\nu_A C_t}{C(v_e)} \qquad (37X)$$

Dans le cas où $v_e=0$:

$\nu_p = \nu_0 = \nu_A C_t$ (38)

2.4.4 Remarque sur les équations de Maxwell.

On remarque que dans l'expression des équations de Maxwell dans E_d en un point P où on a une base de dilatation on doit utiliser les coordonnées éthérées en particulier pour la densité de charge ρ_e et le vecteur densité de courant $\mathbf{j}_e = \rho_e \mathbf{v}_e$.

Supposons qu'on ait un élément uniformément chargé de charge q et de volume absolu V_0 placé dans E_A (c'est-à-dire en l'absence de gravitation) et au repos . Dans ses conditions sa densité de charge est $\rho_0 = q/V_0$ .On a vu que placé dans E_d et au repos, son volume V_e mesuré dans E_d était égal à V_0, et donc sa densité de charge mesurée dans E_d est ρ_e avec :

$\rho_e = q/V_e = q/V_0 = \rho_0$. (39)

Si V_A est son volume absolu (toujours immobile et placé dans E_d), sa densité de charge mesurée dans E_A est alors ρ_A avec :

$$\rho_A = \frac{q}{V_A} \quad (40)$$

Mais on a vu que si C(e) était la contraction spatiale en P, on avait la relation entre V_A et V_e :

$V_A = C(e)\, V_e$ (41)

Et donc :

$$\rho_A = \frac{\rho_0}{C(e)} \quad (42)$$

Si l'élément chargé est dans E_d et est mais est animée de la vitesse éthérée $\mathbf{v}_e$, alors son volume se contracte de $C(v_e)$, et donc sa densité de charge s'accroît d'un facteur $1/C(v_e)$, et donc :

$$\mathbf{j}_e = \frac{\rho_0}{C(v_e)} \mathbf{v}_e = \rho_0 \frac{d\mathbf{M}_e}{dt_e C(v_e)} \quad (43X)$$

$$\mathbf{j}_e = \rho_0 \frac{d\mathbf{M}_e}{dt_p} \qquad (44X)$$

dt_p étant le temps propre de l'élément chargé (cf l'équation (26)), on retrouve une expression très simple et complètement analogue au cas sans gravitation de $\mathbf{j}_e$ pour un élément chargé en mouvement et de ρ_e pour un élément chargé immobile.

2.4.3 Généralisation de la loi de Newton.

En un point P fixe de E_d où il y a une base propre de dilatation, on a généralisé toutes les lois sans gravitation à l'identique localement, dans les Postulats 5B et 6A. Il en résulte que la loi relativiste généralisant la loi de Newton est valide en coordonnées éthérées pour un objet de masse m, c'est-à-dire qu'on a:

$$\sum \mathbf{F}_e = \frac{d}{dt_e}\left(\frac{m\mathbf{v}_e}{\sqrt{1-v_e^2/c^2}}\right) \qquad (53)$$

Puisque les équations de Maxwell sont vraies en coordonnées éthérées, on obtient par ces équations en P des champs électrostatiques et magnétiques $\mathbf{E}_e$ et $\mathbf{B}_e$, la force $\mathbf{F}_{em}$ s'exerçant sur une particule de charge q étant :

$$\mathbf{F}_{em} = q(\mathbf{E}_e + \mathbf{v}_e \wedge \mathbf{B}_e) \qquad (54X)$$

2.5 Cas d'un Référentiel Galiléen.

Jusqu'ici on a considéré seulement le cas d'une ou plusieurs masses statiques c'est-à-dire immobiles dans E_A et dans E_d, et seulement l'expression des lois dans l'Espace éthéré E_d, qui est fixe par rapport à E_A.

Les Postulats qu'on a donnés concernant les lois mécaniques ainsi que les contractions spatiales et temporelles permettent de traiter le cas où la masse créant le Potentiel est au repos dans E_d, mais où l'observateur est dans E_d mais dans un Référentiel en mouvement $R_{eG}(P)$ (animé d'une vitesse constante éthérée constante en direction et norme par rapport à $R_e(P)$, et avec des axes parallèles à ceux de $R_e(P)$). On dira que $R_{eG}(P)$ est un *Référentiel Galiléen (éthéré) local*). On obtient que utilisant $R_{eG}(P)$, de façon totalement analogue à la Théorie de l'Ether sans gravitation, on peut définir un *Référentiel de Lorentz (éthéré) local* $R_{eL}(P)$, et qu'on

peut appliquer dans $R_{eL}(P)$ les mêmes lois physiques que dans $R_{e}(P)$. On utilise alors les transformations entre $R_{eL}(P)$ et $R_{eG}(P)$, qui sont identiques à celles établies dans la Théorie de l'Ether sans gravitation

Concernant le cas non-statique, c'est-à-dire le cas où la masse générant le Potentiel est en mouvement dans l'Espace absolu E_A, nous traiterons ce cas dans l'article suivant Suite de la Théorie de l'Ether. On verra que là aussi, on peut appliquer les mêmes lois que dans E_d dans le cas statique. Tout ceci apparaîtra comme étant la conséquence du 1ier Principe b) de la T.E qu'on a rappelé dans la section 2.1, et qui est aussi fondamental dans l'interprétation de la T.E.G qu'il l'est dans la T.E sans gravitation.

Nous verrons qu'il sera utile d'utiliser un *Référentiel Galiléen absolu* (local ou non) R'_A qui est défini par rapport à E_A exactement comme Référentiel Galiléen par rapport à l'Ether, Espace fixe absolu, en l'absence de gravitation. Les transformations entre E_A et R'_A sont alors, avec les mêmes hypothèses concernant les relations entre E_A et R'_A que celles concernant les relations entre R et R' dans le 1ier article [(6)]:

$$X'_A = \frac{X_A - v_A T_A}{C(v_A)} \quad , \; Y'_A = Y_A, \; Z'_A = Z_A$$

$$T'_A = T_A C(v_A) \qquad (58)$$

De même on associe un *Référentiel de Lorentz absolu* R''_A à R'_A, retardant les horloges de R'_A de $v_A X'_A/c^2$:

$$X''_A = X'_A ,\; Y''_A = Y'_A ,\; Z''_A = Z'_A$$
$$T''_A = T'_A - v_A X'_A/c^2 \qquad (59)$$

Les équations exposées dans les 3 Postulats précédents apparaissent aussi comme une conséquence partielle du 1ier Principe de la T.E : A cause de leur forme, il est très difficile à un observateur en mouvement de détecter son mouvement par rapport à l'Espace absolu E_A en utilisant les lois de la T.E.G c'est-à-dire celles présentées dans les Postulats 4,5,6. Nous verrons aussi dans l'article suivant que ce Principe permet d'obtenir les lois lorsque la masse créant le Potentiel gravitationnel est en mouvement, mais au repos dans un Référentiel Galiléen, au moyen d'une seule nouvelle loi fondamentale.

3. APPLICATIONS

Utilisant les Postulats 4,5,6 de la T.E.G exposés dans la section précédente, on interprète les phénomènes classiques liés à la R.G, mais de façon beaucoup plus simple et compréhensible que la R.G. Ces phénomènes principaux sont le décalage vers le rouge par effet gravitationnel, le ralentissement des horloges dû à la gravitation, la déviation du périhélie de Mercure et celle de la lumière par une masse. Nous explicitons aussi la base propre de dilatation dans un cas non-statique.

Comme on l'a remarqué dans la section précédente, on se limitera, sauf si on indique explicitement le contraire, au cas où on a une masse statique dans E_d et un observateur au repos dans E_d. Ces phénomènes se généralisent cependant au cas général d'une masse non statique (au repos dans un Référentiel Galiléen) et d'un observateur en mouvement en utilisant aussi les lois présentées dans les Postulats de la T.E.G 4,5,6 et en utilisant une loi, qu'on donnera dans l'article suivant Suite de la Théorie de l'Ether, permettant de généraliser le cas d'une masse créant le Potentiel qui est statique au cas d'une masse créant le Potentiel gravitationnel qui est non statique.

3.1 Décalage vers le rouge par effet gravitationnel.

On considère une source située à la surface d'une masse sphérique M en un point fixe H à la verticale et à une hauteur h (très petite devant le rayon de la masse M) par rapport à un point O, qui émet un photon vers O. On note $\nu_e(h)$ et $\nu_e(0)$ les fréquences éthérées (c'est-à-dire mesurées en H et en O dans E_d) du photon en H et en O, et ν_A la fréquence absolue du photon (On rappelle que celle-ci est identique en H et en O à cause de la conservation de l'énergie exprimée dans le Postulat 5B).

On suppose qu'on a des bases propres de contraction (et donc de dilatation) en P et en O, on note C(h) et C(0) les contractions spatiales en H et en O (définies dans la section 2.2.4). D'après cette définition et l'équation (34), on a

$$\nu_e(h) = \frac{\nu_A}{C(h)} \qquad (60aX)$$

Puisque la fréquence absolue ν_A du photon se conserve, on a :

$$\nu_e(0) = \frac{\nu_A}{C(0)} \qquad (60bX)$$

Et donc :

$$\frac{\nu_e(0)}{\nu_e(h)} = \frac{C(h)}{C(0)} \quad (61aX)$$

$$\nu_e(0) = \nu_e(h)\frac{C(h)}{C(0)} = \nu_e(h)\frac{A_t(h)}{A_t(0)} \quad (61bX)$$

$$\nu_e(0) = \nu_e(h)\frac{1 - V(h)/c^2}{1 - V(0)/c^2} \quad (61cX)$$

Avec V(h) et V(0) sont les potentiels gravitationnels en H et en O, en utilisant que C(h) et C(0) sont respectivement égales à 1/A(h) et à 1/A(0), avec A(h) et A(0) amplification spatiale en H et en O. On rappelle qu'on a $A(h)=1/A_t(h)$ et $A(0)=1/A_t(0)$, $A_t(h)$ et $A_t(0)$ amplifications temporelles en H et en O. On utilise aussi l'expression de l'amplification temporelle At donnée dans le Postulat 4Bb (Equation (11)) . Et donc avec l'approximation $V(h)/c^2 \ll 1$ et $V(0)/c^2 \ll 1$:

$$\nu_e(0) = \nu_e(h)(1 - V(h)/c^2 + V(0)/c^2) \quad (62aX)$$

De plus si on connaît la fréquence absolue ν_0 d'un photon émis par un processus identique par une source au repos dans l'Espace E_A, c'est-à-dire sans gravitation, on a d'après le Postulat 6C :

$$\nu_e(h)=\nu_0 \quad (62bX)$$

Et donc on obtient :

$$\nu_e(0) = \nu_0(1 - \frac{V(h)}{c^2} + \frac{V(0)}{c^2}) \quad (62cX)$$

Cet effet a été vérifié expérimentalement sur la terre, avec les approximations précédentes concernant V et h, qui conduisent à obtenir, utilisant le Postulat 5Bb, les expressions classiques de V(h) et V(0) (C'est-à-dire $V(0)-V(h) \approx gh$)

3.2 Décalage vers le rouge des photons émis par le soleil.

Cette observation est de même nature que la précédente. On suppose que des photons sont émis par une source par un certain processus au repos à la surface d'une masse sphérique S (identique au soleil) et qu'on mesure leur fréquence lorsqu'ils atteignent la surface d'une masse sphérique T au repos.

Connaissant le potentiel gravitationnel V(S) et V(T) à la surface de S et T, on obtient de la même façon que l'équation (62cX) et avec des notations évidentes, que la fréquence des photons reçus $\nu_e(T)$ mesurés à la surface de T est :

$$\nu_e(T) = \nu_0(1 - \frac{V(S)}{c^2} + \frac{V(T)}{c^2}) \qquad (63X)$$

De plus on sait que si des photons sont émis par une source et un processus identique à la surface de T, leur fréquence mesurée à la surface de T est alors $\nu_{Te0}=\nu_0$.

On obtient donc :

$$\frac{\nu_e(T)}{\nu_{Te0}} = 1 - \frac{V(S)}{c^2} + \frac{V(T)}{c^2} \qquad (64X)$$

Cet effet a effectivement été observé prenant pour S et T le soleil et la terre, avec les approximations $V(T)/c^2<<1$ et $V(S)/c^2<<1$, prenant donc alors V(S) et V(T) approximativement identique à leur expression classique, d'après le Postulat 5Bb.

3.3 Décalage des horloges par effet gravitationnel.

On suppose qu'on a une masse sphérique M créant le Potentiel, M étant au repos dans E_d, et on considère à la surface de M une horloge située en un point fixe H à la verticale et à une altitude h (avec h très petite devant le rayon de la sphère) par rapport à un point O. On suppose qu'on a des bases propres de dilatation et de contraction en H et en O, et on utilise les notations analogues à celles de la section 3.1.

On suppose que l'horloge en H mesure un temps T(H).

A cause de l'amplification temporelle $A_t(H)$ en H, le temps T(H) correspond à un temps absolu T avec d'après l'équation (6), A(H) amplification d'espace en H et C(H) contraction spatiale en H :

$$T(H) = TA_t(H) = \frac{T}{A(H)} = TC(H) \qquad (68)$$

Si T(O) est le temps mesuré par une horloge fixe en O pendant le temps absolu T, on a alors de la même façon que l'équation (68) et avec C(O) contraction spatiale en O :

$$T(O)=TC(O) \qquad (69)$$

Utilisant alors comme dans la section 3.1 les expressions de C(O) et C(H), on obtient:

$$\frac{T(H)}{T(0)} = \frac{C(H)}{C(0)} = 1 - \frac{V(H)}{c^2} + \frac{V(0)}{c^2} \qquad (70)$$

Avec $V(H)<V(0)$, (car $h>0$)

Et donc l'horloge en O est ralentie par rapport à l'horloge en H à cause de l'effet de la gravitation sur le temps. Cet effet théorique est en accord avec l'expérience, prenant pour M la terre, avec les mêmes approximations que dans la section 3.1.

Nous allons dans les 2 applications suivantes obtenir dans la T.E.G la déviation du périhélie de Mercure et d'un rayon lumineux d'une façon nouvelle, généralisant une méthode qu'on peut utiliser pour obtenir la trajectoire d'une planète dans la théorie de Newton, c'est à dire sans utiliser le concept de géodésique utilisé dans la R.G, mais en utilisant l'expression de l'énergie et le Lagrangien classique associé à une énergie.

3.4 Déviation du périhélie de Mercure.

Pour obtenir la trajectoire de planètes, on rappelle qu'on ne peut pas utiliser l'équation des forces (53) ni les équations de Lagrange en coordonnées éthérées du Postulat 5Bc car l'Espace E_d n'est pas Euclidien. Cependant, on a l'expression de l'énergie totale obtenue dans le Postulat 5B. L'espace absolu E_A étant Euclidien, on admettra cependant dans cette section que si on utilise des coordonnées absolues q_{iA}, on peut appliquer les équations de Lagrange exprimées avec des coordonnées absolues c'est à dire:

$$\frac{d}{dt_A}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{iA}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_{iA}}=0 \qquad (70aX)$$

Dans l'expression précédente, L est obtenu classiquement à partir de l'énergie, et a donc l'expression donnée dans le Postulat 5Bc. On admettra l'équation précédente (70aX) avec la condition qu'en tout point $P(q_{1A},q_{2A},q_{3A})$ il existe une base propre de dilatation $(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3)$, avec $\partial \mathbf{P}/\partial q_{iA}$ // $\mathbf{x}_i$ (pour i=1,2,3).

Nous donnerons une justification simple de cette équation (70aX) avec les conditions précédentes dans la section 4.7.

On utilisera les coordonnées sphériques absolues (r,θ,φ) , dans le cas d'une masse M générant le Potentiel fixe et sphérique de centre O. On a donc bien la condition : $\partial \mathbf{P}/\partial r // \mathbf{u}_r$, $\partial \mathbf{P}/\partial \theta // \mathbf{u}_\theta$, $\partial \mathbf{P}/\partial \varphi // \mathbf{u}_\varphi$, avec $(\mathbf{u}_r,\mathbf{u}_\theta,\mathbf{u}_\varphi)$ base propre de dilatation d'après le Postulat4Bb.

D'après le Postulat 5B, l'énergie d'une planète est :

$$E=\gamma mc^2-\frac{GMm}{r_A} \qquad (71)$$

m étant la masse de la planète, r_A étant sa distance au centre du soleil, M étant la masse du soleil,(On rappelle qu'on considère qu'on peut supposer pour obtenir la trajectoire de la planète que le soleil est fixe dans E_d). γ est définie par :

$$\gamma=\frac{1}{C(v_e)} \text{ et } C(v_e)=(1-v_e^2/c^2)^{1/2} \qquad (72)$$

$\mathbf{v}_e$ étant la vitesse éthérée de la planète, définie dans le Postulat 5B.
f étant une fonction du temps absolu t_A, on définit f' par :

$$f'=\frac{df}{dt_A} \qquad (73)$$

Pour $v_e/c<<1$, on a l'approximation :

$$E=mc^2+\frac{mv_e^2}{2}-\frac{GMm}{r_A} \qquad (74)$$

On suppose qu'on utilise les coordonnées sphériques absolues (r_A,θ_A,φ_A), ($\mathbf{u}_r,\mathbf{u}_\theta,\mathbf{u}_\varphi$) étant la base orthonormée de E_A définie en tout point P naturellement associée aux coordonnées (r_A,θ_A,φ_A). D'après le Postulat 4B, ($\mathbf{u}_r,\mathbf{u}_\theta,\mathbf{u}_\varphi$) est une base propre de dilatation associée à ($A_r,A_\theta,A_\varphi,A_t$) avec $A_\varphi=A_\theta=1$ et, V étant le Potentiel gravitationnel en P:

$$A_t = \frac{1}{A_r} = 1 - \frac{V}{c^2} \qquad (75)$$

Avec l'approximation $V/c^2 << 1$ et utilisant le Postulat 5Bb:

$$A_r = 1 + V/c^2 = 1 + \frac{GM}{r_A c^2} \qquad (76)$$

On obtient alors d'après le Postulat 4Ba et la définition d'une base propre de dilatation (Equation (7)) :

$$v_e^2 = \frac{ds_e^2}{dt_e^2} = \frac{dr_A^2 A_r^{\,2}}{dt_A^2 A_t^2} + \frac{r_A^2 d\varphi_A^{\,2}}{dt_A^2 A_t^2} \qquad (77X)$$

Avec la relation $A_t = 1/A_r$, l'expression de l'énergie devient :

$$E = \frac{1}{2} m\left(\frac{dr_A^2}{dt_A^2} A_r^{\,4} + r_A^2 A_r^{\,2} \frac{d\varphi_A^{\,2}}{dt_A^2}\right) - \frac{GMm}{r_A} \qquad (78X)$$

Et, en omettant le suffixe "A" :

$$E = \frac{1}{2} m(r'^2 (1 + 4GM/rc^2) + r^2 \varphi'^2 (1 + 2GM/rc^2)) - \frac{GM}{r}$$
(79)

Utilisant alors l'équation de Lagrange (70aX) pour la coordonnée absolue φ:

$$\varphi' r^2 (1 + 2GM/rc^2) = ch \qquad (80)$$

Exprimant l'énergie en fonction de φ:

$$E = \frac{1}{2}\varphi'^2 \left(\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 (1 + 4GM/rc^2) + r^2(1 + 2GM/rc^2)\right) - \frac{GMm}{r}$$

(81)

Remplaçant φ' par son expression d'après l'équation (80):

$$\frac{E}{m} = \frac{1}{2}\frac{c^2h^2}{r^4(1+2GM/rc^2)^2}\left(\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 (1 + 4GM/rc^2) + r^2(1 + 2GM/rc^2)\right) - \frac{GM}{r}$$

(82)

On obtient alors :

$$\frac{E}{m} = \frac{1}{2}c^2h^2\left(\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2}(1 - 2GM/rc^2)\right) - \frac{GM}{r} \qquad (83)$$

Posant u=1/r :

$$\frac{E}{m} = \frac{1}{2}c^2h^2\left(\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2(1 - 2GMu/c^2)\right) - GMu \qquad (84)$$

Différentiant par rapport à φ:

$$c^2h^2\left(\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u - 3GMu^2/c^2\right) - GM = 0 \qquad (85)$$

On retrouve donc l'équation de Schwartzchild, identique à celle obtenue en R.G, donnant la trajectoire de Mercure et la déviation de son périhélie.

On a obtenu l'équation de la trajectoire de Mercure non dans E_d, qui n'est pas Euclidien, mais dans E_A qui est Euclidien. Si on considère le modèle où la terre est immobile dans E_d, un observateur étant dans E_d sur la terre en un point fixe P, on connaît les relations entre les coordonnées d'un vecteur dans une base propre de dilatation ($\mathbf{i}_A$,$\mathbf{j}_A$,$\mathbf{k}_A$) en P et ses coordonnées dans la base de contraction ($\mathbf{i}_e$,$\mathbf{j}_e$,$\mathbf{k}_e$) associée. On sait que, d'après le Postulat 4Bb, celles-ci sont approximativement identiques avec une précision de l'ordre de V/c^2 c'est-à-dire 10^{-9} si V est le

potentiel à la surface de la terre. Il en résulte qu'on observe la trajectoire de Mercure depuis la terre comme si on était dans E_A et donc l'angle de déviation du périhélie de Mercure mesuré depuis la terre est celui obtenu par l'équation de Schwartzchild dans E_A.

Si on veut tenir compte de la vitesse de la terre autour du soleil, il intervient alors d'après le Postulat 5A un facteur $C(v_A)$ supplémentaire par rapport aux transformations précédentes entre les coordonnées d'un Référentiel lié à un observateur dans E_d sur la terre (et donc animé de la vitesse absolue v_A) et E_A, et donc aussi on peut négliger cet effet sur l'observation de l'angle de déviation car v_A^2/c^2 est de l'ordre de 10^{-8}. On devrait aussi tenir compte de cet effet en Relativité s'il n'était pas négligeable.

3.5 Déviation de la lumière par une masse.

On a vu que d'après le Postulat 5B, et aussi d'après le Postulat 6A, la vitesse éthérée de la lumière était constante et égale à c. On a donc, $\mathbf{v}_e$ étant la vitesse éthérée d'un photon :

$$v_e^2 = c^2 \qquad (86)$$

Considérant la même masse sphérique que dans l'exemple précédent, et les mêmes coordonnées sphériques absolues, omettant le suffixe A pour représenter les coordonnées absolues, on obtient de la même façon que l'équation (79) :

$$v_e^2 = r'^2 \,(1 + 4GM/rc^2) + r^2 \varphi'^2 \,(1+2GM/rc^2) = c^2 \qquad (87)$$

Généralisant l'équation de Lagrange (70aX), on obtient de la même façon que l'équation (80) :

$$\varphi' \, r^2 \,(1+2GM/rc^2) = ch \qquad (88)$$

Procédant comme dans la section précédente, on obtient à nouveau l'équation de Scwartzchild:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u - 3GMu^2 / c^2 = 0 \qquad (89a)$$

Cette équation donnant la déviation d'un rayon lumineux par une masse, est identique à celle obtenue en R.G et a été vérifiée expérimentalement.

Comme dans l'application précédente, l'équation (89a) donne l'équation de la trajectoire du rayon lumineux dans E_A, mais c'est aussi la trajectoire observée par un observateur dans Ed sur la terre, même en tenant compte de la vitesse de rotation de celle-ci.

On rappelle qu'on pourra généraliser toutes les applications précédentes au cas où la masse créant le Potentiel n'est pas au repos dans E_A, mais est au repos dans un Référentiel Galiléen R'_A quelconque, défini dans la section 2.5.

On remarque que dans nos exemples concernant le système solaire, on n'a pas tenu compte du potentiel (gravitationnel) V_{MW} généré par la galaxie (Voie Lactée) qui est très important. Cependant, on peut faire l'hypothèse que dans le système solaire, V_{MW} est à peu prés constant et égal à $V_{MW}(S)$. Alors en tenant compte de ce potentiel, en un point P du système solaire, $V_S(P)$ étant le potentiel généré en P par le soleil et $V_T(P)$ le potentiel total en P :

$$V_T(P)=V_S(P)+V_{MW}(S) \qquad (89b)$$

Et donc dans le Référentiel R_S lié au soleil (supposé au repos dans l'Ether), les équipotentielles sont celles définies par $V_T(P)$=constante, donc $V_S(P)$=constante. Et donc on a les mêmes bases de dilatation en P que sans tenir compte du potentiel généré par la voie lactée, d'après la remarque suivant le Postulat 5B) permettant d'obtenir les bases de dilatation à partir des équipotentielles. D'après le Postulat 4Bc) (Equation (11)), on a l'amplification temporelle en P $A_t(P)$:

$$A_t(P)=1-V_S(P)/c^2-V_{MW}(S)/c^2 \qquad (89c)$$

On peut donc écrire, t_{eS} étant le temps éthéré dans le Référentiel lié au soleil (On considère que le Référentiel lié au soleil est au repos dans l'Ether, comme dans toute la section. On montrera dans l'article suivant Suite de la Théorie de l'Ether comment on peut généraliser ceci dans le cas où on tient compte du mouvement du soleil par rapport à l'Ether) :

$$dt_{eS}(P)=A_t(P)dt_A=(1-V_S(P)/c^2)dt_{AS} \qquad (89d)$$

Avec $dt_{AS}=(1-V_{MW}(S)/c^2)dt_A$.

De même :

$$dr_{eS}=dr_{AS}/(1-V_S(P)/c^2 \qquad (89e)$$

Avec $dr_{AS}=dr_A/(1-V_{MW}(S)/c^2)$ (89f)

De plus :

$r_A^2 d\varphi_A^2=(r_A/(1-V_{MW}(S)/c^2)^2(d\varphi_A(1-V_{MW}(S)/c^2)^2$ (89g)

$r_A^2 d\varphi_A^2=r_{AS}^2 d\varphi_{AS}^2$ (89h)

Avec $\varphi_{AS}=\varphi_A(1-V_{MW}/c^2)$ (89i)

Et donc, remplaçant $t_A(1-V_{MW}/c^2)$ par t_{AS}, $r_A/(1-V_{MW}/c^2)$ par r_{AS}, $\varphi_A(1-V_{MW}/c^2)$ par φ_{AS} et θ_A par θ_{AS}, on voit que tout se passe comme si le Référentiel dilaté E_d lié au soleil était superposé non pas au Référentiel R_A qu'on a utilisé sans tenir compte du potentiel généré par la Voie Lactée, mais à un Référentiel absolu R_{AS} défini précédemment en fonction de R_A. Et donc on retrouve les mêmes résultats concernant la déviation du périhélie de Mercure et de la lumière au voisinage du soleil que sans tenir compte du potentiel généré par la Voie Lactée V_{MW}.

Notons que dans l'équation (71), on doit remplacer GM/r_A par GM_{AS}/r_{AS}, c'est-à-dire M par $M_{AS}=Mr_{AS}/r_A=M/(1-V_{MW}(S)/c^2)$.

On a donc vu que la T.E.G prévoyait très simplement la même déviation du périhélie de Mercure en tenant compte du potentiel gravitationnel généré par la Voie Lactée que sans en tenir compte. De même, on verra que la R.G doit tenir compte de la masse de la Voie Lactée dans ses équations pour obtenir la déviation du périhélie de Mercure ce qui n'a pas été fait. Ceci sera précisé dans la section 4.3.

3.6 Cas non statique

Le cas de masse non statique a été observé dans l'étude d'étoiles binaires. D'après l'expression du tenseur d'Einstein, elles émettent des ondes gravitationnelles et donc perdent de l'énergie, perte d'énergie qui peut être évaluée en observant leur distance et leur vitesse de rotation. D'après la T.E.G, une interaction instantanée à distance est possible, et donc contrairement à la R.G il est possible dans la T.E.G que l'interaction gravitationnelle soit instantanée. Cependant ceci n'est qu'une possibilité : L'existence d'ondes gravitationnelles est totalement en accord avec la T.E.G, et donc on peut aussi considérer que l'observation apparente d'ondes gravitationnelles peut être interprétée par la T.E.G de la même façon que la R.G, utilisant le tenseur de la T.E.G interprétant le tenseur

métrique d'Einstein à la place de ce dernier. On rappelle que les ondes gravitationnelles généralisent les ondes électromagnétiques, et celles-ci existent aussi dans la T.E.G, comme les équations de Maxwell. La T.E.G permet même de proposer un milieu dans lequel peuvent se propager les ondes gravitationnelles ,l'éther substance, qui n'existe pas dans la R.G. Ce cas non-statique est très exceptionnel, et dans la quasi-totalité des phénomènes physiques liés à la R.G, la masse est immobile dans un Référentiel Galiléen et on peut se ramener au cas d'une masse statique c'est à dire utiliser seulement les Postulats 4,5,6 de la T.E.G qu'on a exposé dans la section 2.

A partir du tenseur métrique d'Einstein pour le cas non-statique, nous allons proposer le tenseur de la T.E.G interprétant celui-ci, et obtenir une base propre de dilatation en tout point à partir du tenseur de la T.E.G utilisant le Postulat 4Bb.

D'après la R.G, le tenseur métrique d'Einstein induit par une densité ρ à une distance r contient le tenseur (voir J.Foster, J.P Nightingale, A short course in general Relativity, Springer Verlag, New-York (1994)):

$$h_{ij}(\mathbf{x}, ct) = \frac{-2G}{c^4 r} \frac{d^2}{dt^2} \int (\rho . x_i x_j dV)_{ret} \qquad (90X)$$

L'indication « ret » indique que les variables xν doivent être considérées au temps de l'émission de l'onde gravitationnelle, c'est-à-dire au temps t-r/c.

D'après le 2ième Principe de la T.E, on considère, puisqu'on est dans l'approximation $V/c^2 << 1$, qu'on a en tout point P un tenseur de la T.E.G, défini dans le Postulat 4Ba ayant la même expression mathématique que le tenseur métrique d'Einstein défini dans l'équation (90X) . C'est-à-dire que si P est un point fixe de E_d situé à une distance absolue r_A d'un point O origine d'un Référentiel fixe de E_A $(O, \mathbf{i}_A, \mathbf{j}_A, \mathbf{k}_A)$, $(\mathbf{i}_A, \mathbf{j}_A, \mathbf{k}_A)$ étant une base orthonormée de E_A.

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt_e^2 - (h_{ij}(r_A, ct_A) + \eta_{ij}) dx_{Ai} dx_{Aj} \qquad (91X)$$

avec $\eta_{ij} = \delta_{ij}$.

Et :

$$h_{ij}(r_A, ct_A) = \frac{-2G}{c^4 r_A} \frac{d^2}{dt_A^2} \int (\rho_A x_{Ai} x_{Aj} dV_A)_{ret} \qquad (91aX)$$

D'après le 2ième Principe de la T.E, les expressions précédentes sont valides seulement dans l'expression des faibles Potentiels, c'est-à-dire $V/c^2 << 1$, et de plus avec les mêmes hypothèses qu'en R.G, c'est-à-dire que la distance entre les masses créant le Potentiel et O doit être négligeable devant r_A.

De plus en R.G, on considère que le temps où les ondes gravitationnelles sont émises de O est t-r/c, si elles sont reçues au temps t à un point situé à une distance r de O. Dans la T.E.G, on a vu que la vitesse de la lumière était constante mesurée dans E_d et non dans E_A. Cependant avec l'approximation $V/c^2 << 1$, on obtient facilement que la vitesse de la lumière est égale à c dans E_A avec une approximation de l'ordre de V/c^2. Il en résulte que dans la T.E.G aussi on considèrera qu'une onde gravitationnelle venant de O et arrivant en un point situé à une distance absolue r_A de O au temps absolu t_A, a été émise approximativement de O au temps t_A-r_A/c.

On voit donc que le tenseur de la T.E.G, d'expression identique au tenseur d'Einstein d'après le 2ième Principe de la T.E qu'on a justifié, permet d'interpréter l'existence d'ondes gravitationnelles et leur effet sur des systèmes mobiles comme les étoiles binaires, de la même façon qu'en R.G et avec la même prédiction théorique. Le tenseur de la T.E.G a la même expression que le tenseur d'Einstein parce qu'on a $V/c^2 << 1$.

Dans la T.E.G, les équations précédentes sont établies dans le cas où O est un point fixe de E_d, mais on verra dans l'article suivant Suite de la Théorie de l'Ether, qu'elles demeurent valables dans le cas où O est immobile dans un Référentiel Galiléen.

Dans l'article Theory of Ether with Gravitation (10), on a explicité une base propre de dilatation pour le tenseur de la T.E.G défini dans les équations (91X,91aX).

4. DISCUSSION

Comme on l'a vu d'après le Postulat 4Bb, l'expression du tenseur métrique d'Einstein diffère de l'expression du tenseur de la T.E.G dès qu'on n'a plus l'approximation $V/c^2 << 1$. Nous verrons qu'il en résulte que les points critiques apparaissant dans la T.E.G ont une signification physique très particulière qu'ils n'ont pas dans la R.G. Nous allons voir aussi que d'après la T.E.G, de la matière peut s'échapper des trous noirs, qui existent aussi dans la T.E.G. Nous verrons aussi comment traiter le cas de plusieurs effets de dilatation d'espace, et l'analogie entre la contraction C(v) due au mouvement et l'amplification d'espace A(e). Enfin, nous justifierons l'équation de Lagrange utilisée dans les applications de la

T.E.G concernant la trajectoire de Mercure et celle d'un rayon lumineux dévié par une masse.

4.1 Remarque concernant les points critiques dans la T.E.G et dans la R.G

Dans le tenseur métrique d'Einstein correspondant à la solution de Schwartzchild c'est-à-dire pour une masse sphérique M, il y a un point critique pour:

$$1-2\frac{GM}{rc^2}=0 \qquad (108)$$

Dans la T.E.G, pour une masse sphérique M au repos dans E_d, il y a un point critique pour $A_t=0$, c'est-à-dire (voir Postulat 4.Bb), V étant le Potentiel gravitationnel:

$$1-V/c^2=0 \qquad (109)$$

Et donc dans la T.E.G, si un objet de masse m au repos dans E_d est placé en un point critique défini précédemment, son énergie totale $E=mc^2-mV$ est nulle.

Et donc les points critiques ont dans la T.E.G une signification physique qu'ils n'ont pas dans la R.G. De plus, ceci justifie que d'après le point b) du 2ième Principe de la T.E, le tenseur de la T.E.G a la même expression que le tenseur métrique d'Einstein seulement dans le cas $V/c^2<<1$.

4.2 Trous noirs.

Les trous noirs sont simplement interprétés dans la T.E.G : On a vu ainsi qu'en un point P de E_d où il y avait une contraction d'espace C(e), un objet rigide ayant au repos dans E_A un volume absolu V_0, avait un volume $V_e=V_0$ placé en P dans E_d et mesuré dans E_d, correspondant à un volume absolu $V_A=C(e)V_0$. Et donc un objet de densité absolu ρ_0 placé dans E_A, a la même densité $\rho_e=\rho_0$ mesuré dans E_d s'il est placé dans E_d en P, correspondant à une densité absolue $\rho_A=\rho_0/C(e)$.

Et donc, par exemple avec la valeur $C(e)=1-V/c^2$ du Postulat 4Bb, si $C(e)=1/100$, la densité absolue est égale à 100 fois la densité ρ_0. C'est donc ce phénomène de contraction du volume qui est à l'origine des trous noirs dans la T.E.G. On a donc dans un trou noir, pour avoir $C(e)<<1$, V est très proche de c^2.

4.2.1 Les jets superluminiques.

D'après le Postulat 5Ba, l'expression de l'énergie d'un objet de masse m est :

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v_e^2 / c^2}} - mV \qquad (115a)$$

D'après l'expression précédente, si v_e est suffisamment proche de c, il sera toujours possible qu'un objet s'échappe de l'attraction gravitationnelle, et donc dans la T.E.G, de la matière peut s'échapper des trous noirs ce qui n'était pas la cas dans la R.G. Cela se produit si l'énergie E de l'équation précédente est supérieure à mc^2 (avec $V \approx c^2$), ce qui est évidemment possible si v_e est suffisament proche de c. Et on a effectivement observé des jets de matières provenant de trous noirs, animés d'une vitesse proche de celle de la lumière et appelés *jets superluminiques*. Dans la R.G, il est impossible que ces jets proviennent du trou noir de laquelle d'après cette théorie aucune matière ne peut s'échapper, et ces jets n'ont pas d'interprétation satisfaisante d'après la R.G. Au contraire dans la T.E.G, l'expulsion de matière de trous noirs à de grandes énergies sont donc théoriquement possible. L'énergie de compression d'un trou noir, définie plus loin, pourrait être celle utilisée par l'émission de jets superluminiques. Et donc la T.E.G interprète très bien les jets superluminiques provenant des trous noirs.

4.2.2 Energie d'un trou noir.

On a vu dans la section précédente qu'un trou noir était un astre tel que, R étant le rayon de l'astre, -V (R) étant le potentiel gravitationnel en R, on avait $V(R) \approx c^2$, et donc la contraction d'espace était :

$C(e)(R)=1-V(R)/c^2<<1$ (115b)

Soit T un trou noir au repos, M_T sa masse et E_T son énergie totale. Si E_T était la somme de son énergie de repos et de son énergie gravitationnelle, on aurait $E_T=M_T(1-V(R)/c^2)$ (la matière baryionique du trou noir étant supposée concentrée au voisinage du rayon du trou noir) . Et donc E_T serait quasi nulle. Or les observations d'ondes gravitationnelles émises par la fusion de trous noirs ont montré que l'énergie des trous noirs est très importante. Il est donc intéressant d'introduire pour un trou noir T une énergie de compression E_{CT}, variable.

L'énergie totale d'un trou noir au repos est alors :

$E_T=M_T(1-V(R)/c^2)+E_{CT}$ (115c)

Lors de la formation d'un trou noir, le trou noir transforme de l'énergie de repos en énergie de compression. Et donc on obtient par conservation de l'énergie $E_{CT} \approx M_T c^2$. Mais E_{CT} peut diminuer notamment dans l'émission d'ondes gravitationnelles.

On peut définir $-V_T(r)$ comme étant le potentiel gravitationnel créé par T lui-même à une distance r de son centre et $-V_{U/T}(r)$ le potentiel gravitationnel créé par le reste de l'Univers. On a alors :

$$V(r)=V_T(r)+V_{U/T}(r) \quad (115d)$$

La vitesse vT(x,y,z) du trou noir dans un potentiel VU/T(x,y,z) obéit à l'équation de conservation de l'énergie:

$$(1/2)v_T(x,y,z)^2+V_{U/T}(x,y,z)=\text{Constante.} \quad (115e)$$

Nous verrons plus loin dans cet article exposant las bases de la T.E.G que cette théorie est en accord avec l'existence des ondes gravitationnelles et que de plus celles-ci sont décrites mathématiquement comme dans la R.G. Supposons que 2 trous noirs T_1 et T_2 fusionnent en donnant un trou noir T_3. D'après la conservation de l'énergie, négligeant l'énergie cinétique de chaque trou noir et aussi la somme de l'énergie de repos et de l'énergie gravitationnelle de chaque trou noir (avec des notations évidentes $E_{RGTi} = M_{Ti}c^2(1-V_i/c^2)$, avec $V_i \approx c^2$), ΔE étant l'énergie libérée sous forme d'ondes gravitationnelles :

$$\Delta E=E_{CT1}+E_{CT2}-E_{CT3} \quad (115f)$$

Dans l'interprétation de la fusion de ces trous noirs par la R.G on avait :

$$\Delta E=M_{T1}c^2+M_{T2}c^2-M_{CT3}c^2 \quad (115g)$$

Mais ceci n'est pas possible car on sait que la masse baryonique total se conserve (aucun baryon ne peut disparaître) et donc on aurait $\Delta E=0$ ce qui est impossible car alors il n'y aurait pas d'ondes gravitationnelles émises.

Notons que l'énorme énergie de compression des trous noirs pourrait être à l'origine de l'énorme énergie nécessaire pour l'émission de jets superluminiques, où la matière est éjectée du trou noir avec une vitesse proche de celle de la lumière.

Cependant, il est possible que l'énergie du trou noir soit constituée en partie ou en totalité d'énergie de mouvement. En supposant que l'énergie initiale d'une particule du trou noir, avant que le trou noir soit créé est mc^2, et que cette

énergie se conserve, on a l'égalité, v_e étant la vitesse éthérée de la particule après que le trou noir soit créé:

$$mc^2/\sqrt{(1-v_e^2/c^2)}-mc^2=mc^2 \qquad (115h)$$

On obtient $v_e \approx 0{,}8c$. Ceci n'est cependant qu'une approximation car toutes les particules du trou noir n'ont pas la même vitesse éthérée et de plus l'énergie du trou noir décroit. Cependant, ceci expliquerait la très grande vitesse de rotation des trous noirs qu'on a observée, et de plus 0,8c est l'ordre de grandeur de la vitesse observée. L'énergie d'un trou noir pourrait être constituée des 2 formes d'énergie précédente, énergie de compression et énergie de mouvement.

4.2.3 Structure d'un trou noir.

Etudions maintenant la structure d'un trou noir T de masse M_T. Soit $-V(r)$ le potentiel gravitationnel à une distance r du centre du trou noir (r mesuré dans E_A). On pourrait faire l'hypothèse que le rayon R du trou noir est celui pour lequel on a $V(R)=c^2$.

Alors d'après les équations de la T.E.G, l'amplification A(e)(R) à une distance R du centre O_T de T serait infinie, et toute la masse du trou noir serait concentrée à la distance R de O_T. Mais alors l'énergie de compression E_{CT} du trou noir serait nulle. Pour qu'elle ne soit pas nulle, on doit admettre que T a un rayon interne R_{IT} et un rayon externe R_{ET} (mesurés dans E_A). Si on neglige la substance sombre (substance emplissant tout l'espace et définie dans notre article Théorie de la matière sombre et de l'énergie sombre), R_{IT} est défini par $V(R_{IT})/c^2=1$, et R_{ET} est défini par $V(R_{ET})/c^2$ est très proche de 1 mais la longueur dans E_d entre R_{IT} et R_{ET} est la longueur correspondant à l'énergie de compression E_{CT} du trou noir. Toute la matière baryonique du trou noir est entre R_{IT} et R_{ET}. Dans le cas où E_{CT} est nulle, $R_{IT}=R_{ET}$. A cause de l'équation de Poisson $\Delta V(r)=0$, on a pour $r<R_{IT}$ $V(r)=V(R_{IT})=0$.

Si on veut tenir compte de la masse de la substance sombre, on prend $V(0)=0$. On a toujours un rayon externe et un rayon interne de trou noir entre lesquels est concentrée la matière baryonique du trou noir. Entre 0 et R_{IT}, V(r) est alors donné par l'équation de Poisson $\Delta V(r)=\rho_0/\varepsilon_0$, ρ_0 étant la densité de la substance sombre mesurée dans E_A à l'emplacement du trou noir.

4.2.4 Rayonnement d'un trou noir.

Les observations astronomiques ont montré que les trous noirs émettaient un rayonnement infra-rouge, qui était celui d'un corps noir de très faible

température. Dans son interprétation actuelle, ce rayonnement est d'origine quantique.

La T.E.G en donne une interprétation beaucoup plus simple et attractive qui est la suivante : On a vu dans la T.E.G que si λ_A était la longueur d'onde absolue, c'est-à-dire mesurée dans E_A, d'un photon ($\lambda_A=cT_A$), cette longueur d'onde se conservait. De même si des photons sont émis avec la fréquence absolue f_A, alors à cause de la conservation de la matière f_A se conserve mensurée dans E_A en un point fixe de E_A auquels arrivent les photons.

Supposons qu'en un point P situé sur le rayon externe R_{ET} d'un trou noir immobile dans E_A, des photons sont émis avec une longueur d'onde $\lambda_e(P)$ et une fréquence $f_e(P)$ mesurés dans E_d en P. Soit A(T) l'amplification d'espace en P, on a vu que A(T) était très grand mais pas infini. ($A(T)=1/(1-V(P)/c^2)$).

D'après la T.E.G, si $\lambda_A(P)$ est la longueur d'onde absolue du photon en P et $f_A(P)$ la fréquence absolue d'émission des photons en P, on a :

$$\lambda_A(P)=\lambda_e(P)A(T)$$
$$f_A(P)=f_e(P)/A(T) \qquad (115i)$$

Soit Q un point fixe de E_A où arrivent ces photons, Q étant suffisamment loin du trou noir pour que l'amplification d'espace en Q A(Q) soit proche de 1, mais suffisamment près du trou noir pour qu'on puisse négliger l'aumentation de la longueur d'onde due à l'expansion de l'Univers.

Avec des notations analogues à celles utilisées pour P, on obtient :

$$\lambda_e(Q)=\lambda_A(Q)/A(Q)\approx\lambda_A(Q)=\lambda_A(P)=\lambda_e(P)A(T)$$

$$f_e(Q)=f_A(Q)A(Q)\approx f_A(Q)=f_A(P)=f_e(P)/A(T) \qquad (115j)$$

Et donc à cause des expressions précédentes, si en P on a une émission d'un rayonnement électromagnétique qui mesuré dans E_d est celui d'un corps noir à la température Temp(T), on mesure en Q un rayonnement électromagnétique d'un corps noir à la température Temp(T)/A(T).

Si on veut tenir compte de l'expansion de l'Univers, 1+z étant le facteur d'expansion de l'Univers entre l'émission d'un photon en P et son arrivée en Q, on obtient mesuré en Q le rayonnement d'un corps noir à la température Temp(T)/(A(T)(1+z)).

4.2.5 Observation d'un trou noir.

On a admis une contaction d'espace en $1\text{-}V/c^2$. Ceci conduit immédiatement à obtenir comme rayon d'un trou noir un rayon 2 fois plus petit que le rayon de Schwartzchild. Cependant, on peut conserver l'ensemble de la théorie en changeant seulement la contraction d'espace qu'on prend alors en $\sqrt{(1\text{-}2V/c^2)}$. Alors on obtient le rayon de Schwartzchild comme rayon de trou noir. Cepndant, la limite inférieure du potentiel V est alors de $c_2/2$ et non plus de c^2.

Lors de la première photo d'un trou noire (galaxie M87, Avril 2019), on a observé un disque sombre entourée d'une couronne de lumière (photosphère). Le rayon du disque sombre est égal à 2,6 fois le rayon de Schwartzchild, et donc 5,2 fois le rayon du trou noir prévu avec une contraction en $1\text{-}V/c^2$.

La photo du trou noir est donc en accord avec la modélisation d'un trou noir par la T.E.G. Il est naturel de penser que le jets super-luminiques émis par les trous noirs ont comme direction l'acte de rotation du trou noir. On rappelle que l'émission de ces jets par les trous noirs eux-mêmes est impossible d'après la modélisation d'un trou noir dans la R.G.

4.3 Cas de plusieurs dilatations simultanées.

Il est possible que dans certains cas, on ait des dilatations ayant plusieurs origines. Dans le cas statique, si par exemple on a plusieurs masses sphériques, la généralisation du Postulat 4Bb ainsi que l'expression très simple du Potentiel gravitationnel donné dans le Postulat 5B permet d'obtenir très simplement en tout point la base propre de dilatation due à ces masses. Ceci était beaucoup plus compliqué dans la R.G. En effet, on a vu dans la remarque suivant le Postulat 5B que d'après la T.E.G on avait les dilatations exprimées dans le Postulat 4Bc (Equation (11)) en prenant une base propre de dilatation locale $(\mathbf{i}_A,\mathbf{j}_A,\mathbf{k}_A)$ telle que $\mathbf{i}_A$ est orthogonal aux équipotentielles. A priori, ceci donne le même tenseur métrique que dans la Relativité Générale seulement dans le cas où on a une seule masse statique sphérique générant le potentiel.

En général, les masses générant le potentiel ont une vitesse petite devant c dans l'Ether, identifié au Référentiel local Cosmologique [(11)]. Et donc la perturbation sur les distances dans E_d (obtenues en considérant que les masse sont statiques) due au mouvement des masses générant le potentiel est négligeable. Et donc on peut en général avec une excellente approximation ne pas tenir compte du mouvement des masses générant le potentiel pour obtenir les distances dans E_d. Cependant dans certains cas, notamment pour les phénomènes liées aux ondes gravitationnelles, c'est seulement le mouvement des masses générant le potentiel qui est à l'origine de ces phénomènes, et on doit donc utiliser les équations de la Relativité Générale pour décrire ces phénomènes (Voir section 4.8).

Il est cependant possible, dans le cas non-statique, qu'on obtienne plusieurs bases propres de dilatations dues à plusieurs sources, et qu'on veuille obtenir approximativement en tout point P de E_A le tenseur de la T.E.G dû à l'ensemble de ses sources.

Par exemple, considérons 2 sources de dilatation dues au mouvement de masses, telle que on ait pour la 1^{ière} source en P point fixe de E_A une base propre de dilatation (**i** ,**j**,**k**) associée aux amplifications (A_x ,A_y ,A_z, A_t) ,et pour la seconde on ait au même point fixe de E_A P une base propre de dilatation (**i**', **j**', **k**') associée aux amplifications (A'_x ,A'_y, A'_z, A'_t).

On suppose qu'on a l'approximation que les amplifications A_i et A'_i sont très proches de 1. On introduit alors les notations :

$$A_x = 1 + \frac{\beta_1}{2}, A_y = 1 + \frac{\beta_2}{2}, A_z = 1 + \frac{\beta_3}{2}$$

$$A'_x = 1 + \frac{\beta'_1}{2}, A'_y = 1 + \frac{\beta'_2}{2}, A'_z = 1 + \frac{\beta'_3}{2} \qquad (116)$$

Avec β_i , β'_i <<1

D'après notre interprétation des amplifications basée sur le concept de fluide temporel, on a l'équation (13), c'est-à-dire :

$$A_t = \frac{1}{A(e)} = \frac{1}{A_x A_y A_z} = 1 - (\frac{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3}{2})$$

$$A'_t = 1 - (\frac{\beta'_1 + \beta'_2 + \beta'_3}{2}) \qquad (117)$$

On fait alors l'hypothèse que l'amplification totale temporelle (ou volumique) est obtenue en multipliant les 2 amplifications.

On obtient alors dt_{e12} intervalle élémentaire de temps éthéré en tenant compte des 2 amplifications :

$$dt_{e12} = A_t A'_t \, dt_A = dt_A \left(1 - \sum(\frac{\beta_i}{2}) - \sum(\frac{\beta'_i}{2}) \right) \qquad (122)$$

On peut généraliser ce qui précède au cas de plus de 2 origines de dilatation. On remarque que l' expression trouvée (122) coïncide avec le cas statique de 2 masses sphériques M_1 et M_2 au repos dans E_d dès qu'on a l'approximation $V_1/c^2<<1$ et $V_2/c^2<<1$.

On rappelle que dans la section 3.5 on a montré que notre obtention de la déviation du périhélie de Mercure demeurait valide si on tenait compte du potentiel gravitationnel généré par la Voie Lactée dans le système solaire. Ce potentiel était de l'ordre de $V(R_S)=GM_{M.W}(R_S)/R_S$, avec R_S distance du système solaire au centre $O_{M.S}$ de la Voie Lactée et $M_{M.W}(R_S)$ masse de la sphère de centre $O_{M.W}$ et de rayon R_S, sphère qu'on a vue pouvant être modélisée par une sphère présentant une symétrie sphérique et composée principalement de substance sombre [11]. De plus on a l'approximation $GM_{M.W}(R_S)/R_S \approx v_{M.W}^2$, $v_{M.W}$ étant la vitesse orbitale des étoiles dans la Voie Lactée, $v_{M.W} \approx 210$ km/s.

Or dans la R.G, pour obtenir la déviation du périhélie de Mercure, on ne considère pas l'effet de la masse de la Voie Lactée prévue par les équations de la R.G ou on considère que cet effet est négligeable. Or cette hypothèse est fausse puisqu'on obtient que $GM_{M.W}/R_S$ est très grand devant $GM_S/r \approx v_{Me}^2$ avec M_S masse du soleil, r distance de Mercure au centre du soleil et v_{ME} vitesse de Mercure dans le système solaire. On doit donc tenir compte de la masse de la Voie Lactée dans les équations de la R.G pour obtenir la déviation du périhélie de Mercure dans la R.G, et à priori, rien n'indique que ceci donne le même résultat que si on ne tient compte de la masse de la Voie Lactée.

4.4 Comparaison des expressions de la contraction C(v) due au mouvement et l'amplification d'espace A(e).

On remarque qu'en absence de gravitation, d'après le Postulat 5A, un objet animé de la vitesse absolue v (égale à la vitesse éthérée en absence de gravitation) subit une contraction de C(v) par rapport à l'Espace E_A. On remarque alors que si l'objet a une masse m, et si E est son énergie de mouvement, on a, d'après le Postulat 5Ba :

$$C(v) = \sqrt{1 - v^2 / c^2} = \frac{mc^2}{E} \qquad (124X)$$

Si on considère maintenant un objet au repos dans E_d en un point P et une masse générant le Potentiel au repos dans E_d, alors $E=mc^2-mV$ étant l'énergie totale de l'objet, on a une amplification d'espace A(e) en P qui est d'après le Postulat 4Bb :

$$A(e) = \frac{1}{1 - V/c^2} = \frac{mc^2}{mc^2 - mV} = \frac{mc^2}{E} \qquad (128X)$$

On voit donc que A(e) et C(v) ont des expressions analogues (et simples) en fonction de l'énergie.

4.5 Relations intéressantes dans la T.E.G.

On a exprimé l'énergie d'un photon dans le Postulat 6B par :

$$E = h\nu_e - \frac{h\nu_e}{c^2}V = h\nu_e(1 - V/c^2) = h\nu_A \qquad (130aX)$$

Supposons maintenant que par un processus défini (désexcitation ou désintégration), une particule de masse m émette un photon d'énergie absolue ν_0 lorsqu'elle est immobile dans E_A, c'est-à-dire en l'absence de gravitation.
Supposons maintenant que la particule est immobile placé dans E_d en un point P de potentiel gravitationnel V.
D'après le Postulat 6C, elle émet par un processus identique un photon de fréquence $\nu_e=\nu_0$ mesurée dans E_d, et donc si on peut négliger l'énergie de recul, l'énergie perdue par la particule lors de l'émission est ΔE avec :

$$\Delta E = h\nu_e(1 - V/c^2) = h\nu_0(1 - V/c^2) \qquad (130bX)$$

Or l'énergie de la particule était dans le Potentiel V :

$$E=mc^2-mV=mc^2(1-V/c^2) \qquad (130cX)$$

Et donc on a

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{h\nu_0(1 - V/c^2)}{mc^2 - mV} = \frac{h\nu_0}{mc^2} = \text{constant} \qquad (133X)$$

L'équation précédente, obtenue dans la T.E.G, indique donc que ΔE/E est le même quelque soit le Potentiel V, et est donc très intéressante

On n'obtient pas l'expression précédente en prenant le tenseur métrique d'Einstein dans le cas où on n'a pas $V/c^2 << 1$, car ce tenseur fait intervenir un terme $(1-2V/c^2)$ au lieu du terme $(1-V/c^2)^2$ dans le tenseur de la T.E.G exprimé dans le Postulat 4B. Ceci est donc un nouvel argument sur le fait que d'après le 2ième Principe de la T.E, le tenseur de la T.E.G coïncide avec le tenseur métrique d'Einstein seulement dans le cas ou on a $V/c^2 << 1$.
On rappelle qu'on a justifié l'expression de l'énergie d'un photon $E=h\nu_A$, en considérant qu'un photon de fréquence νe mesurée en un point fixe de E_d avait une masse grave égale à $h\nu_e/c^2$. Nous donnerons, dans l'article suivant Suite de la Théorie de l'Ether, une 2ème justification plus générale utilisant l'expression des équations de la physique quantique dans la T.E.G.

4.6 Obtention des équations de Lagrange dans E_A.

Dans les applications de la T.E.G concernant la déviation du périhélie de Mercure ou d'un rayon lumineux par une masse, on a utilisé les équations de Lagrange classique exprimées avec les coordonnées de l'Espace Euclidien E_A. Cela n'était pas possible de les exprimer dans E_d car E_d n'est pas euclidien. Cependant, on a vu que E_d était localement Euclidien, et donc, puisque d'après les Postulat 5 et 6, localement toutes les lois classiques sont vraies exprimées en coordonnées éthérées, il en résulte que localement, les équations de Lagrange exprimées en coordonnées éthérées sont vraies, comme on l'a admis dans le Postulat 5Bc. Or on peut montrer qu'une conséquence de ceci est que localement en un point P, les équations de Lagrange exprimées avec des coordonnées absolues sont vraies, à condition que si (q_{1A},q_{2A},q_{3A}) sont ces coordonnées absolues, on ait en P une base propre de dilatation $(\mathbf{x}_{1A},\mathbf{x}_{2A},\mathbf{x}_{3A})$ telle que $\partial\mathbf{P}/\partial q_{iA} // x_{iA}$ (pour i=1,2,3).
En généralisant ceci dans E_A, avec la condition précédente, on obtient les équations de Lagrange exprimées avec des coordonnées absolues qu'on a utilisées dans l'application de la T.E.G concernant la déviation du périhélie de Mercure.
Montrons donc la validité locale des équations de Lagrange exprimées dans E_A dans un cas particulier. On suppose qu'en un point P fixe de E_d, on a une base propre de dilatation $(\mathbf{x}_{1A},\mathbf{x}_{2A},\mathbf{x}_{3A})$ associée aux amplifications (A_1,A_2,A_3,A_t), et on considère le cas de coordonnées cartésiennes (q_{1A},q_{2A},q_{3A}) dans la base $(\mathbf{x}_{1A},\mathbf{x}_{2A},\mathbf{x}_{3A})$.
On a bien la condition $\dfrac{\partial \mathbf{P_A}}{\partial q_{iA}} // \mathbf{x}_{iA}$ pour i=1,2,3.

D'après la définition d'une base propre de dilatation donnée dans la section 2.2.3, si en P on a un vecteur $d\mathbf{M}_A(dq_{1A},dq_{2A},dq_{3A})$ mesuré dans E_A, il correspond à un

vecteur $d\mathbf{M}_e(A_1dq_{1A},A_2dq_{2A},A_3dq_{3A})$ mesuré dans E_d, c'est-à-dire que si $(dq_{1e},dq_{2e},dq_{3e})$ sont ses coordonnées dans la base de contraction $(\mathbf{x}_{1e},\mathbf{x}_{2e},\mathbf{x}_{3e})$ définie dans la section 2.2.3, on a toujours :

$$dq_{ie}=A_idq_{iA} \qquad (152X)$$

Les équations de Lagrange locales exprimées en cordonnées éthérées sont :

$$\frac{d}{dt_e}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{ie}})-\frac{\partial L}{\partial q_{ie}}=0 \qquad (153a)$$

Mais on a la relation, dt_A étant l'intervalle de temps dans E_A correspondant à dt_e mesuré dans E_d au point P :

$$dt_e=A_tdt_A \qquad (153bX)$$

Donc, d'après l'équation (152X):

$$\dot{q}_{ie}=\frac{dq_{ie}}{dt_e}=\frac{A_i}{A_t}\frac{dq_{iA}}{dt_A}=\frac{A_i}{A_t}\dot{q}_{iA} \qquad (153bX)$$

Remplaçant dans l'équation (153a), on obtient bien :

$$\frac{d}{dt_A}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{iA}})-\frac{\partial L}{\partial q_{iA}}=0 \qquad (154a)$$

On a montré ce qui précède dans le cas des coordonnées cartésiennes (q_{iA}), mais on peut le généraliser de façon analogue avec seulement la condition sur les coordonnées (q_{iA}): $\frac{\partial \mathbf{P_A}}{\partial q_{iA}} // \mathbf{x}_{iA}$.

4.7 Cosmologie dans la T.E.G.

On a proposé dans l'article [(11)] un modèle d'Univers sphérique en expansion de centre O. Dans ce modèle d'Univers, on a défini un Référentiel Universel Cosmologique R_C de centre O dont les axes allaient jusqu'aux frontières de l'Univers, et en tout point de l'Univers un Référentiel local particulier, appelé

Référentiel local Cosmologique, identifié au Référentiel de Repos du Cosmic Microwave Background (RRC).

Notre modèle ne tenait pas compte de l'effet de la gravitation sur le temps et les longueurs. On identifie localement le RRC avec l'espace dilaté E_d, superposé à E_A, E_d et E_A étant définis dans cet article(Postulat 4.A). Et donc l'Ether local (identifié à E_A, l'espace absolu utilisé dans cet article) est défini en tout point de l'Univers, puisqu'on a vu dans l'article [11] que le RRC était défini en tout point de l'Univers. On définit alors le Référentiel Universel Cosmologique absolu R_{CA} de façon analoque à R_C : R_{CA} , dont l'origine est O centre de l'Univers, a ses axes parallèles à ceux des ethers locaux E_A, son temps est le temps donnés par les ethers locaux E_A, et localement, les distances données par R_{CA} sont identiques à celles données par E_A. On a vu dans le 2nd modèle mathématique d'expansion de l'Univers, que, t étant le temps Cosmologique (âge de l'Univers), si R(t) était le rayon de l'Univers sphérique au temps Cosmologique t, on avait R(t)=Ct. Etant donné l'Universalité du temps t_A, la solution la plus simple (qu'on adoptera) est d'identifier l'âge de l'Univers avec t_A (temps absolu), avec donc $R_A(t_A)=Ct_A$, $R_A(t_A)$ étant le rayon de l'Univers mesuré dans le Référentiel Cosmologique Universel absolu R_{CA} .

Cependant, t_{eO} étant le temps indiqué par une horloge fixe située en O centre de l'Univers (ou un n'importe quelle origine du RRC qu'on a définie dans l'article [11]), on peut montrer, prenant comme origine de t_{eO} le Big-Bang avec $t_{eO}=t_A=0$, qu'on a toujours $t_{eO}\approx t_A$.

Soit Q l'origine d'un RRC (on a appelé aussi Q *point comobile* de la sphère en expansion constituant l'Univers), on a vu, puisque Q est au repos dans l'ether local E_A (Equations (8)(10)), $V(Q)(t_A)$ étant le potentiel gravitationnel en Q au temps absolu t_A (Rappelons qu'on a pris dans cet article contrairement aux conventions V(Q) positif, et donc l'énergie potentielle gravitationnelle d'une masse m en Q, avec cette convention est égale à-mV(Q)).

$$dt_{eQ}=dt_A(1-V(Q)(t_A)/c^2) \qquad (155)$$

Or on a exposé dans l'article [11] comment calculer $V(Q)(t_A)$:
Au début de l'Univers, avant l'apparition des galaxies, on a vu que l'Univers était empli de substance sombre homogène en densité et en température, qui devenait aussi un mélange homogène de substance sombre et de matière baryonique après l'apparition des particules baryoniques. On a vu dans l'article [11] qu'à cause de l'expansion cette substance sombre et ce mélange homogène se comportaient comme le vide absolu du point de vue gravitationnel (C'est-à-dire que dans les équations de la mécanique Newtonienne on prend $\rho(P)=0$ en tout point de ce mélange homogène). On a donc durant cette période $V(Q)(t_A)=0$, et donc $dt_{eQ}=dt_A$.

Puis apparaissent les galaxies et les amas, mais alors on sait qu'on a en général (sauf si Q est prés d'un trou noir) $V(Q)(t_A)/c^2<<1$ er donc $dt_{eQ}\approx dt_A$.

On a donc toujours en général $t_{eQ} \approx t_A$, ce qui fait qu'on peut aussi identifier l'âge de l'Univers avec t_{eQ}, et qu'on a le rayon de l'Univers $R(t_{eQ})\approx R(t_A)=Ct_A\approx Ct_{eQ}$.

4.8 Ondes gravitationelles.

On remarque que l'existence des ondes gravitationelles est compatible avec la Théorie de l'Ether avec gravitation. Elles sont analogues aux ondes électromagnétiques mais agissent sur l'espace-temps. On doit les utiliser dans le cas d'un système d'étoiles binaires (Section 3.6), pour obtenir la perte d'énergie de ce système. Et donc dans la Théorie de l'Ether avec gravitation, les ondes gravitationnelles sont définies mathématiquement de façon analogue à leur définition dans la Relativité Générale. On doit utiliser les équations pour prédire les ondes gravitionnelles issues par exemle de la fusion de 2 trous noirs. La vitesse de ces ondes est à priori comme pour les ondes électromagnétiques égale à c mesurée dans l'espace dilaté E_d. Les équations de la R.G définissant mathématiquement les ondes gravitationnelles sont parmi les seules à être utilisées dans la T.E.G.

5. CONCLUSION

Nous avons donc exposé dans cet article une Théorie de l'Ether avec gravitation généralisant la Théorie de l'Ether sans gravitation exposée dans l'article Théorie de l'Ether (6). On a généralisé tous les concepts de cette 1ière théorie, en particulier celui d'un Espace absolu, de contractions temporelle et spatiale, de simultanéité absolue ainsi que l' interprétation de ces contractions par l'existence d'un fluide temporel.

On a aussi généralisé le concept de Référentiel Galiléen. Nous développerons ce concept dans l'article suivant, Suite de la Théorie de l'Ether, afin de pouvoir considérer le cas où une masse créant le Potentiel gravitationnel n'est pas au repos dans l'Espace absolu E_A, mais est au repos dans un Référentiel Galiléen absolu R_A'. Les Postulats 4,5,6 qu'on a donnés permettent cependant de considérer les cas où la masse créant le Potentiel est immobile dans E_A, mais où un observateur est immobile dans un Référentiel Galiléen éthéré local $R_{eG}(P)$ animé d'une vitesse éthérée $\mathbf{v}_e$ constante par rapport au Référentiel local éthéré $R_e(P)$.

On a justifié que dans la T.E.G, d'après le 2ième Principe de la T.E, les équations donnant le tenseur métrique de la T.E.G étaient identiques à celles donnant le tenseur métrique d'Einstein, mais seulement dans l'approximation $V/c^2<<1$. On a interprété les phénomènes liés à la R.G d'une façon nouvelle, propre à une Théorie moderne de l'Ether. On a vu aussi comment la plupart des lois

usuelles, comme les équations de Maxwell, mais aussi les lois de la dynamique d'expressions identique dans la T.E sans gravitation, et la R.R, étaient généralisées de façon extrêmement simple dans la T.E.G ce qui n'était pas le cas dans la R.G. On a donc présenté une nouvelle interprétation des phénomènes liés à la R.G, dans une Théorie moderne de l'Ether, et cette conception semble beaucoup plus claire que la conception d'après la R.G.

Et donc la T.E.G est une théorie de l'Ether fondamentale permettant d'interpréter les phénomènes jusqu'ici seulement interprétés par la R.G. Cependant comme on l'a vu dans l' article précédent (11), la Cosmologie de la T.E comporte 2 modèles mathématiques d'expansion de l'Univers, le premier basé sur les équations de la R.G et le 2nd étant beaucoup plus simple.

Dans l'article suivant Suite de la Théorie de l'Ether, on exposera aussi l'interprétation de la physique quantique par la T.E.G.

References

1)Max Born,Einstein's Theory of Relativity (Dover Publication,New-York 1965)
2)J.Foster, J.P Nightingale, A short course in General Relativity (Springer-Verlag,New-York 1994)
3)A.French,Einstein,Le livre du centenaire, (Hier et Demain,France,1979)
4)J.Ph Perez,N.Saint-Cricq Chery,Relativité et quantification (Masson Paris 1986)
5)T.Delort, Theory of Ether, Physics Essays, 13 (2000)
6)T.Delort, Théorie de l'Ether , Extrait du livre Théories d'or 8ième édition, Books on Demand, Paris (2015)).(Cet article est la version en Français réactualisée de (5).
7)T.Delort, Applications of Theory of Ether,Phys.Ess, 17,3 (2004).
8)T.Delort,Applications de la Théorie de l'Ether (2015), Extrait du livre Théories d'or 8ième édition, Books on Demand, Paris (2015))(Cet article est la version en Français réactualisée de (7).
9)T.Delort, Complements of the Theory of Ether, Physics Essays 18 (2005)
10)T.Delort, Theory of Ether with Gravitation, Physics Essays, 18 (2005)
11)T.Delort, Matière sombre et énergie sombre dans l'Univers, Théories d'or 8ième édition, Books on Demand, Paris (2016)).

Article: SUITE DE LA THEORIE DE L'ETHER
Auteur:Thierry DELORT
Date:Juin 2015
Extrait du livre: Théories d'or 9e édition, Editions Books on Demand, Paris (2015).
6ième article (Théorie de l'Ether)

Résumé:

Dans 4 articles précédents (Théorie de l'Ether, Eléments de la Théorie de l'Ether, Compléments de la Théorie de l'Ether, Théorie de l'Ether avec Gravitation [9] [10] [11] [12] (Extraits du livre Théories d'or), on a exposé les fondations d'une Théorie moderne de l'Ether. Dans cet article, nous développons la Théorie de l'Ether avec Gravitation (T.E.G) exposée dans le dernier article. En particulier, nous étudions le cas d'une masse générant le Potentiel en mouvement en utilisant le concept généralisé de Référentiel Galiléen (Dans le 1^{ier} article, on avait seulement considéré le cas d'une masse immobile dans l'espace absolu E_A ou au voisinage d'un point fixe de E_A), nous interprétons la physique quantique dans le cadre de la T.E.G, et étudions certaines variables fondamentales dans l'électromagnétisme d'après la T.E.G. Nous complétons aussi l'étude des trous noirs initialisée dans l'article précédent.

Mots clés : Théorie de l'Ether avec Gravitation, trous noirs, Référentiels Galiléens.

1.INTRODUCTION

Dans 4 articles précédents [9-12], on a exposé les bases d'une Théorie moderne de l'Ether, couvrant tous les phénomènes liés à la Relativité Restreinte ou Générale. Dans cet article, nous apportons certains éléments nouveaux relatifs à la T.E.G (Théorie de l'Ether avec Gravitation) exposée dans l'article précédent [12].
On rappelle que d'après le 2ième Principe de la T.E exposé dans l'article précédent, notre Univers est représenté comme un Espace dilaté E_d, qui est superposé à un Espace absolu sans gravitation E_A. Les longueurs et les temps de chaque espace sont reliées par un tenseur de la T.E.G. E_A est un espace Euclidien, alors que E_d est seulement localement Euclidien. Localement en un point P de E_d, un élément de vecteur $d\mathbf{M}_A$ mesuré dans E_A correspond à un élément de vecteur $d\mathbf{M}_e$ mesuré localement dans E_d. On obtient $d\mathbf{M}_e$ à partir de $d\mathbf{M}_A$ (ou l'inverse), en utilisant une base propre de dilatation en P. D'après les Postulats 4,5,6 présentés dans l'article

précédent, la plupart des équations classiques sont vraies localement exprimées dans E_d, c'est-à-dire avec des coordonnées éthérées. Cependant, dans l'article précédent, on a seulement considéré le cas d'une masse générant le Potentiel immobile dans E_A ou demeurant près d'un point fixe de E_A.

Dans cet article, on étudiera le cas de masses en mouvement par rapport à E_A mais au repos dans un Référentiel Galiléen absolu R_A'(Dont on a généralisé la définition dans le cadre de la T.E.G dans l'article précédent). Puis on étudiera les variables fondamentales en électromagnétisme d'après les lois de la T.E.G. Enfin nous donnerons l'interprétation de la Physique Quantique (C'est-à-dire des équations fondamentales propres à la Physique quantique) par la T.E.G, et nous complèterons l'étude des trous noirs par la T.E.G.

2.REFERENTIELS GALILEENS.

On a vu dans l'article précédent que si on avait un point fixe P de E_d dans lequel il y avait une base propre de dilatation, un objet animé d'une vitesse éthéré v_e mesurée dans le Référentiel local éthéré R_e(P) se contractait d'un facteur $C(v_e)$ dans la direction de son mouvement par rapport à un objet identique mais immobile en P. On a vu qu'à priori, une contraction $C(v_A)$ obtenue en remplaçant dans $C(v_e)$ la vitesse éthérée v_e par la vitesse absolue v_A était elle aussi possible, mais qu'une contraction $C(v_e)$ était préférable dans la théorie. On a cependant remarqué qu'en général, $C(v_e)$ et $C(v_A)$ étaient identiques avec une extrême précision.

On rappelle qu'on a défini dans l'article précédent un Référentiel Galiléen R_A', comme un Référentiel totalement analogue aux Référentiels Galiléen définis en l'absence de gravitation dans le 1ier article Théorie de l'Ether [(9)]. Pour le définir, on peut donc considérer des règles et des horloges standard placées non dans E_d mais dans E_A, de façon totalement analogue au 1ier article. Avec les mêmes hypothèses que pour les transformations obtenues dans le 1ier article, on obtient que les transformations entre R_A' et E_A sont,v_A étant la vitesse absolue de R_A' par rapport à R_A : (supposant donc que les origines des temps coïncident (C'est-à-dire qu'à T_A=0 on a T_A'=0), de même que les origines O et O' T_A=T_A'=0, et que les axes OX et O'X' coïncident :

$$X_A' = \frac{X_A - v_A T_A}{\sqrt{1 - v_A^2 / c^2}}, Y_A' = Y_A, Z_A = Z_A', T_A' = T_A \sqrt{1 - v_A^2 / c^2} \qquad \text{(4aX)}$$

En décalant les horloges de R'_A de X'_A/c^2, on obtient un Référentiel de Lorentz associé R''_A associé au Référentiel Galiléen R'_A exactement de la même façon que dans le 1ier article. On a donc :

$$X_A" = X_A', Y_A" = Y_A', Z_A" = Z_A', \quad T_A" = T_A' - v_A X_A'/c^2 \qquad (4bX)$$

D'où on déduit :

$$X_A" = \frac{X_A - v_A T_A}{\sqrt{1 - v_A^2/c^2}}, Y_A" = Y_A, Z_A" = Z_A, T_A" = \frac{T_A - v_A X_A/c^2}{\sqrt{1 - v_A^2/c^2}} \qquad (4cX)$$

Jusqu'ici, dans l'article précédent Théorie de l'Ether avec Gravitation [12], on a seulement considéré le cas de masses générant le Potentiel immobiles dans E_A ou au voisinage d'un point fixe de E_A.

Or on a vu qu'en absence de gravitation, on pouvait appliquer les mêmes lois physiques dans le Référentiel de Lorentz R_A'' que dans E_A. Ceci était la conséquence des Postulats 1,2,3 de la T.E sans gravitation, eux-mêmes étant la conséquence du 1ier Principe de la T.E selon lequel les lois dans l'Univers étaient telles qu'elles tendaient à empêcher un observateur fixe par rapport à un Référentiel Galiléen de détecter son mouvement par rapport à l'espace absolu E_A.

On a vu dans l'article précédent ***Théorie de l'Ether avec gravitation*** que si on avait une masse unique générant le Potentiel, celle-ci étant fixe dans E_A, on pouvait obtenir des relations entre les temps et les distances absolues (c'est-à-dire mesurées dans E_A) et les temps et les distances mesurées localement dans E_d, c'est-à-dire l'espace où nous vivons, superposé à E_A.

Nous allons maintenant étudier le cas où cetaines masses générant le potentiel sont en mouvement dans E_A.

R_A étant un Référentiel Galiléen fixe dans E_A, on dira qu'un système virtuel S fixe dans E_A génère les équipotentielles dans un volume $Vol_{eq}(S)$ de R_A si, S étant fixe dans R_A son centre d'inertie G_S coincidant avec l'origine de R_A on a les propriétés suivantes :

$Vol_{eq}(S)$ est un volume fixe de R_A et pour P point quelconque de $Vol_{eq}(S)$:

-($-V_S(P)$) étant le potentiel gravitationnel généré en P par S.

-($-V_T(P)$) étant le potentiel gravitationnel généré par tout l'Univers en P à l'exception des satellites de S.

-($-V_{T/S}(P)$) étant le potentiel gravitationnel généré en P par tout l'Univers à l'exception de S et des satellites de S :

Les variations de $V_{T/S}(P)$ sont négligeables devant celles de $V_S(P)$ c'est-à-dire :

$|\mathbf{grad}(V_{T/S})(P)|<<|\mathbf{grad}(V_S)(P)|$, ce qui entraîne (puisque $V_T(P)=V_S(P)+V_{T/S}(P)$) $\mathbf{grad}(V_T)(P)\approx\mathbf{grad}(V_S)(P)$, ce qui entraîne que les bases de dilatations en P peuvent être obtenues en considérant seulement le potentiel gravitationnel généré par S, puisqu'en P les équipotentielles sont orthogonales à $\mathbf{grad}(V_T)(P)$.

Si S est un système virtuel en équilibre statique et fixe dans E_A (C'est-à-dire avec toutes les particules constituant S fixes dans E_A), R_A étant un Référentiel Galiléen fixe par rapport à E_A et dont l'origine coincide avec le centre d'inertie G_S de S, alors la fonction $\rho_S(P)$ donnant la densité en P point fixe de R_A sera constante dans le temps et appelée *fonction de densité* de S. On remarque que $Vol_{eq}(S)$ dépend de la fonction de densité ρ_S de S. ρ_S est définie sur le volume (fixe dans R_A) occupé par S dans R_A noté V(S), et inclus dans $Vol_{eq}(S)$. Pour décrire S on doit aussi introduire la *fonction nature locale* n_S, définie sur V(S). Par exemple, on aura $n_S(P)$ est « du sable », « de l'eau », « du fer liquide »…On dira que (ρ_S,n_S) est la *fonction descriptive* de S, en équilibre statique dans R_A. (Plusieurs fonctions descriptives peuvent décrire le même système S, notamment celles obtenues par des rotations de centre O_S).

On remarque qu'on n'a pas donné de méthodes permettant de déterminer $V_{T/S}(P)$ défini précédemment lorsque certaines masses générant le potentiel n'appartenant pas à S sont en mouvement. Or on verra qu'en général, les vitesses de ces masses dans E_A sont très petites devant c et on admettra que dans ce cas le potentiel gravitationnel $V_{T/S}(P)$ qu'elles génèrent en un point P est avec une très bonne approximation le même qu'elles génèreraient en étant au repos, de même que $\mathbf{grad}(V_{T/S})(P)$.

Dans le cas où un système virtuel S génère les équipotentielles en un point O_S dans un volume $Vol_{eq}(S)$, mais que S est immobile non dans R_A mais dans un Référentiel Galiléen R'_A, on a le Postulat 7 suivant, qui apparaît comme étant la conséquence du premier Principe de la Théorie de l'Ether (Voir le 1[ier] article ***Théorie de l'Ether***) :

POSTULAT 7 :

On considère un système virtuel S fixe dans E_A génèrant les équipotentielles dans un volume $Vol_{eq}(S)$ d'un Référentiel Galiléen R_A fixe dans E_A . Soit V(S) le volume occupé par S, et (ρ_S,n_S) la fonction descriptive de S en équilibre statique dans R_A.

Soit alors un Référentiel Galiléen R_A' de E_A ,(par rapport à R_A), et R_A'' le Référentiel de Lorentz associé, l'origine de R_A'' demeurant au voisinage de

l'origine de R_A. On définit V(S)'' le volume fixe dans R_A'' tel que « V(S)'' contient P'' point fixe de R_A'' » est équivalent à V(S) contient P point fixe de R_A ayant les mêmes coordonnées dans R_A que P'' dans R_A''. On définit de même Vol_{eq}(S)'', volume fixe de R_A'' correspondant au volume Vol_{eq}(S) de R_A.

a)Si ρ_S'' et n_S'' sont des fonctions définies sur V(S)'' et coincidant avec ρ_S et n_S sur V(S), elles définissent un système en équilibre statique dans R_A''. On dira que (ρ_S'',n_S'') est la fonction descriptive du système S statique dans R_A''. (ρ_S'',n_S'') et (ρ_S,n_S) définissent le même système, le premier immobile dans R_A et le second immobile dans R_A''. On dira que (ρ_S'',n_S'') est une fonction descriptive de S en équilibre statique dans R_A'', S générant les équipotentielles dans Vol_{eq}(S)'' .

Considérons un système S est en équilibre statique dans un Référentiel de Lorente R_A'', générant les équipotentielles dans un volume Vol_{eq}(S)'' de R_A'' :

b) On peut dans le volume Vol_{eq}(S)'' superposer à R''$_A$ un espace dilaté Ed'' tel que les relations entre ρ'' (fonction de la densité de S dans R''$_A$), R''$_A$ et Ed'' soient identiques à celles entre ρ (fonction de densité coincidant avec ρ''), R_A et Ed dans le cas où S est fixe dans R_A.

c) Les équations physiques exprimées dans R''$_A$ et Ed'' dans le volume Vol_{eq}(S)'' de R''$_A$ sont identiques aux équations physiques dans R_A et Ed dans Vol_{eq}(S) dans le cas où S est fixe dans R_A.

Une conséquence immédiate de ce Postulat 7b) est que si on a un système S en équilibre statique dans un Référentiel de Lorentz R_A'' génèrant les équipotentielles dans un volume Vol_{eq}(S)'', on peut définir en tout point P'' du volume Vol_{eq}(S)'' un potentiel –V_S''(P''), calculé exactement comme dans le cas où S est fixe dans R_A. De même on peut définir une base de dilatation en P'' de façon complètement analogue au cas où S est fixe dans R_A. Enfin d'après le Postulat 7c), si on a un satellite de S, on calcule la trajectoire de ce satellite comme dans le cas où S est fixe dans R_A. On remplace avec des notations évidentes dans les équations de l'énergie r_A par r_A'', t_A par t_A'', x_e par x_e'' et t_e par t_e''.

Si un système S en équilibre statique dans un Référentiel de Lorentz R_A''génère les équipotentielles dans un volume Vol_{eq}(S)'', il est intéressant de considérer le Référentiel Galiléen R'$_A$ associé à R''$_A$, car la simultanéité dans E_A est alors équivalente à la simultanéité dans le Référentiel Galiléen R_A' ce qui n'est pas le cas de la simultanéité dans le Référentiel de Lorentz R_A''.

On sait que ni le soleil, contenant de nombreuses particules en mouvement, ni la terre, en rotation sur elle-même, ne peuvent être identifiés à des systèmes en équilibre statique dans des Référentiels de Lorentz. Cependant, on pourra les modéliser par des systèmes S_T et S_S, chacun en équilibre statique dans des Référentiels de Lorentz R_{AT}'' et R_{AS}'',avec respectivement des fonctions descriptives (ρ_{ST}'',n_{ST}'') et (ρ_{SS}'',n_{SS}'') telles que:

Le volume $V(S_T)$''(resp. $V(S_S$'')) occupé par S_T(resp. par S_S) est une sphère dont le rayon est le rayon moyen de la terre (resp.du soleil).

ρ_{ST}'' (resp. ρ_{SM}'') est une fonction constante sur $V(S_T)$'' (resp. sur $V(S_S)$'') égale à la densité moyenne de la terre (resp.du soleil.)

n_{ST} et n_{SS} sont des fonctions constantes, par exemple identiques à un solide incompressible (de nature non précisée).

Appliquant alors le Postulat 7, on obtient alors des prédictions théoriques en très bon accord avec l'observation.

3. VARIABLES FONDAMENTALES EN ELECTROMAGNETISME.

On a vu dans le 1ier article que dans le cas sans gravitation, R_A' étant un Référentiel Galiléen défini comme dans la section précédente et R_A'' étant le Référentiel de Lorentz associé, alors si un élément chargé avait une densité ρ_0 au repos, il avait aussi un densité égale à ρ_0 mesuré dans R_A'et dans R_A'' lorsqu'il était au repos dans R_A' ou R_A''.
Les vecteurs densités de courant dans R_A' et R_A''sont définis classiquement par :

$$\mathbf{j}_A' = \rho_A' \mathbf{v}_A' \text{ et } \mathbf{j}''_A = \rho_A'' \mathbf{v}_A'' \qquad (10X)$$

Avec $\mathbf{v}_A$' (resp. $\mathbf{v}_A$") la vitesse de l'élément chargé mesuré dans R_A' (resp. R_A"), et ρ_A' (resp ρ_A") sa densité électrique mesurée dans R_A' (resp. R_A").

On a admis dans le 1ier article qu' on avait les égalités :

$$\mathbf{j}_A' = \mathbf{j}_A'' = \rho_0 \frac{d\mathbf{M}_A'}{dt_p} = \rho_0 \frac{d\mathbf{M}_A''}{dt_p} \qquad (11)$$

dt_p étant le temps propre de l'élément chargé lorsqu'il parcourait $d\mathbf{M}_A$', ou $d\mathbf{M}_A$''.

Les relations précédentes étaient utiles, car comme conséquence elles avaient que l'intensité du courant pouvait être mesurée indifféremment dans R_A' ou dans R_A''.
On les obtient de la façon suivante :

Puisque R_A' et R_A'' ont des coordonnées spatiales identiques, et que de plus le temps propre d'un objet est identique calculé dans R_A' et R_A'', on a bien l'égalité :

$$\rho_0 \frac{d\mathbf{M}_A'}{dt_p} = \rho_0 \frac{d\mathbf{M}_A''}{dt_p} \qquad (12aX)$$

De plus puisque les transformations entre E_A et R_A'' sont les transformations de Lorentz, d'après les propriétés mathématiques de ces transformations et le fait que l'élément chargé se comporte dans E_A exactement comme dans un Référentiel de Lorentz en Relativité, on a :

$$\mathbf{j}_A'' = \rho_0 \frac{d\mathbf{M}_A''}{dt_p} \qquad (12bX)$$

On rappelle que v_A est la vitesse absolue de R_A' par rapport à E_A. Si V_A est la vitesse absolue de l'élément chargé, on a, d'après les transformations (4aX) entre E_A et R_A':

$$\rho'_A = \rho_0 \frac{\sqrt{1 - v_A^2 / c^2}}{\sqrt{1 - V_A^2 / c^2}} \text{ et } dt'_A = dt_A \sqrt{1 - v_A^2 / c^2} \qquad (12cX)$$

Il en résulte :

$$\mathbf{j}'_A = \rho'_A \frac{d\mathbf{M}'_A}{dt'_A} = \rho_0 \frac{\sqrt{1 - v_A^2 / c^2}}{\sqrt{1 - V_A^2 / c^2}} \times \frac{d\mathbf{M}'_A}{dt_A \sqrt{1 - v_A^2 / c^2}} \qquad (12dX)$$

et donc puisque d'après la définition de dt_p on a :

$$dt_p = dt_A \sqrt{1 - V_A^2 / c^2} \qquad (13X)$$

On obtient donc :

$$\mathbf{j}'_A = \rho_0 \frac{d\mathbf{M}_A'}{dt_p} \qquad (14X)$$

On obtient donc l'équation (11).

4. OBSERVATEUR EN MOUVEMENT PAR RAPPORT A UNE MASSE STATIQUE.

On a présenté dans la section 2 le cas où la masse créant le Potentiel n'était pas fixe dans E_A ou au voisinage d'un point fixe de E_A.
Cependant on n'a pas étudié le cas où la masse créant le Potentiel est au repos dans E_A, mais où l'observateur est lui-même en mouvement par rapport à cette masse. Nous allons traiter ce cas dans ce qui suit.
Le cas général où la masse générant le Potentiel est en mouvement, et où l'observateur est lui aussi en mouvement par rapport à cette masse se déduit alors du cas précédent en utilisant le Postulat 7 présenté dans la section 2.

Considérons pour commencer le cas où la masse est immobile dans E_A, et où l'observateur est immobile dans un Référentiel local éthéré $R_e(P)$.
Considérons une expérience classique de physique des particules : Localement où se trouve l'observateur, on a une collision entre une particule 1 et une particule 2 de masse m_1 et m_2 qui produisent des particules 3 et 4, la 3ième particule ayant une masse m_3 et la particule 4 étant un photon.
Nous verrons que notre exemple se généralise immédiatement au cas général d'un nombre quelconque de particules, parmi lesquelles certaines peuvent être des photons.
On suppose la collision élastique.
D'après les Postulats 5 et 6 de la T.E.G présenté dans l'article Théorie de l'Ether avec Gravitation [12], il y a conservation de l'impulsion et de l'énergie, c'est-à-dire qu'on a :

$$\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2=\mathbf{P}_3+\mathbf{P}_4 \qquad (15X)$$

$$E_1+E_2=E_3+E_4 \qquad (16X)$$

De plus, d'après les Postulats 5,6 l'expression de $\mathbf{P}_1$,$\mathbf{P}_2$,$\mathbf{P}_3$ et $\mathbf{P}_4$ en coordonnées éthérées est celle des impulsions en Relativité dans un Référentiel de Lorentz. C'est-à-dire que pour i=1,2,3 on a :

$$\mathbf{P}_i = \frac{m_i \mathbf{v}_{ei}}{\sqrt{1-v_{ei}^2/c^2}} \qquad (17X)$$

$\mathbf{v}_{ei}$ étant la vitesse éthérée de la Particule i, et pour le photon, on a :

$$\mathbf{P}_4=h\nu_{e4}/c\ \mathbf{u} \qquad (18X)$$

ν_{e4} étant la fréquence éthérée du photon, et **u** vecteur unitaire de sa direction (en coordonnées éthérées).

De plus, d'après les Postulats 5 et 6, les énergies sont, pour i=1,2,3, V étant le Potentiel gravitationnel local :

$$E_i = \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - v_{ei}^2 / c^2}} - m_i V \qquad (19X)$$

$$E_4 = h\nu_{e4}(1 - V/c^2) \qquad (20X)$$

On rappelle que V/c^2 est de l'ordre de 10^{-9} à la surface de la terre. Et donc, si l'observateur est localement dans un Potentiel de cet ordre, soit on peut négliger V (ce qui est toujours fait en physique des particules classiques), soit dans le cas où $v_{ei}^2/c^2 \ll 1$ on peut faire l'approximation :

$$E_i \cong \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - v_{ei}^2 / c^2}} (1 - V / c^2) \qquad (21X)$$

Dans le 2ième cas, l'approximation est de l'ordre de $[1-(1-v_{ei}^2/c^2)^{1/2}]V/c^2$, c'est-à-dire de l'ordre de $(V/c^2)(v_{ei}^2/c^2)$ lorsqu'on a $v_{ei}/c \ll 1$.
Cependant, dans les 2 approximations, la conservation de l'énergie (16X) devient :

$$\frac{m_1 c^2}{\sqrt{1 - v_{e1}^2 / c^2}} + \frac{m_2 c^2}{\sqrt{1 - v_{e2}^2 / c^2}} = \frac{m_3 c^2}{\sqrt{1 - v_{e3}^2 / c^2}} + h\nu_{e4} \quad (22X)$$

On voit donc qu'avec les approximations précédentes les équations obtenues (22X) et (15X),(17X) sont identiques exprimées en coordonnées éthérées aux équations de la conservation de l'énergie et de l'impulsion en Relativité dans un Référentiel de Lorentz.

Concernant les équations de Maxwell, d'après le Postulat 6 on sait qu'elles sont vraies appliquées localement dans E_d. Cependant, la densité de charge ρ_e et la densité de courant $\mathbf{j}_e = \rho_e \mathbf{v}_e$ utilisées dans ces équations doivent être mesurées dans E_d.
De plus on a vu que si un élément chargé avait au repos dans E_A (donc en absence de gravitation) une densité absolue ρ_0, alors dans E_d et fixe par rapport à E_d, sa densité mesurée dans E_d ρ_e demeurait inchangée, et on avait $\rho_e = \rho_0$.

D'après le Postulat 5A sur la contraction des longueurs et des temps dues au mouvement en présence de gravitation, si l'élément chargé a une vitesse éthérée V_e, sa densité ρ_e mesurée dans E_d devient :

$$\rho_e = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - V_e^2 / c^2}} \qquad (23X)$$

Et donc on a l'expression très simple de $\mathbf{j}_e$:

$$\mathbf{j}_e = \rho_e \mathbf{v}_e = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - V_e^2 / c^2}} \mathbf{v}_e \qquad (26X)$$

Et donc les équations de Maxwell sont vraies localement lorsqu'elles sont exprimées en coordonnées éthérées et en fonction de la densité ρ_0 des éléments chargé définie précédemment et de leur vitesse éthérée.

Supposons maintenant, toujours dans le cas d'une masse immobile dans E_d, qu'un observateur est animé localement d'une vitesse éthérée $\mathbf{v}_e$ par rapport à E_d, en un point P où il y a une base propre de dilatation.
On suppose donc qu'on a localement en P un Référentiel R_e Euclidien fixe dans E_d, les temps et les longueurs de R_e étant mesurés par des horloges et des règles standards immobiles dans E_d, la simultanéité dans R_e étant équivalente à la simultanéité dans E_A, et qu'on a un localement au voisinage de P un Référentiel R_{e1}' animé d'une vitesse éthérée $\mathbf{v}_e$ par rapport à R_e dans la direction de l'axe O_eX_e de R_e, $\mathbf{v}_e$ correspondant à une vitesse absolue $\mathbf{v}_A$, dont les temps et les longueurs sont mesurés par des horloges et des règles standards dans E_d mais immobiles par rapport à R_{e1}'. On suppose de plus que l'axe O_eX_e de R_e coïncide avec l'axe O_{e1}'X_{e1}' de R_{e1}', et que leurs autres axes demeurent parallèles, et que la simultanéité dans R_{e1}' est équivalente à la simultanéité dans R_e.(et donc à la simultanéité dans E_A).

D'après le Postulat 5A de la contraction des longueurs et des temps dues au mouvement dans la T.E.G, on voit que le cas précédent est totalement analogue au cas en l'absence de gravitation qu'on a exposé dans le 1ier article Théorie de l'Ether [6] des 2 Référentiels R_A et R'_A, R_A' étant un Référentiel Galiléen et R_A étant un Référentiel absolu.

On a donc les transformations entre R_e et R_{e1}' :

$$X_{e1}' = \frac{X_e - v_e T_e}{\sqrt{1 - v_e^2 / c^2}}, Y_{e1}' = Y_e, Z_{e1}' = Z_e$$

$$T_{e1}' = T_e\sqrt{1 - v_e^2 / c^2} \qquad (28X)$$

On est donc exactement dans le même cas localement que dans le cas sans gravitation, et donc on obtient dans R_{e1}', les trajectoires, les intervalles de temps (permettant de mesurer la période et la fréquence des photons dans R_{e1}'), les champs magnétiques et électrostatiques, de la même façon qu'on les obtient dans le cas sans gravitation, introduisant un Référentiel de Lorentz R_{e1}'' associé à R_{e1}', défini de la même façon qu'on a défini un Référentiel de Lorentz associé à un Référentiel Galiléen dans le cas sans gravitation.

5.INTERPRETATION DE LA PHYSIQUE QUANTIQUE PAR LA T.E.G.

Dans cette section, nous étudions l'émission de photons par une source au repos dans un Référentiel éthéré local $R_e(P)$, dans le cas d'une masse générant le Potentiel au repos dans E_d. On peut traiter le cas général en utilisant les sections précédentes et notamment le Postulat 7.

On a admis dans le Postulat 6 de la T.E.G que l'énergie d'un photon était :

$$E=h\nu_e(1-V/c^2) \qquad (30X)$$

ν_e étant sa fréquence éthérée (c'est-à-dire mesurée par une horloge standard fixe dans E_d), et V étant le Potentiel gravitationnel où on mesure la fréquence éthérée.

Ceci nous a permis d'interpréter de façon nouvelle les expériences liées à la R.G concernant le décalage vers le rouge par effet gravitationnel.
On peut à partir de l'expression précédente (30X) de l'énergie d'un photon justifier théoriquement un point qu'on a admis dans le Postulat 6, qui était que si une source fixe dans E_A émettait par un certain processus un photon de fréquence absolue ν_0, alors si cette source était placée dans E_d en un point fixe de E_d, elle émettait par un processus identique un photon de fréquence éthérée, c'est-à-dire mesurée dans E_d $\nu_e=\nu_0$.

En effet, on peut exprimer l'énergie totale d'une particule (atome, baryon, méson, lepton..) au repos dans E_A et sans gravitation avec l'équation :

$$E(0) =Mc^2=\Sigma m_i c^2 +E_W+E_E+E_S \qquad (31X)$$

Les m_i étant la masse des constituants élémentaires du système, E_w,E_S, et E_E étant les énergies dues à l'interaction électromagnétique, faible ou forte entre les constituants élémentaires du système, pas forcément indépendantes.

On sait que dans un Potentiel V, L'énergie devient $E(V)=Mc^2(1-V/c^2)$, et donc :

$$E(V)=Mc^2(1-V/c^2)=\Sigma m_i c^2(1-V/c^2)+E_W(1-V/c^2)+E_E(1-V/c^2)+E_S(1-V/c^2). \quad (32X)$$

Et donc tout se passe comme si chaque forme d'énergie était multipliée par le facteur $(1-V/c^2)$.
De plus dans le cas d'un potentiel V où une particule de masse M_1 devient une particule de masse M_2 en émettant un photon, si on néglige l'énergie de recul où si on fait en sorte de l'annuler, alors l'énergie E du photon émis est, à cause de la conservation de l'énergie :

$$E=\Delta M(1-V/c^2)=(M_1-M_2)(1-V/c^2) \qquad (33X)$$

Et donc d'après l'équation (30X) :

$$h\nu_e=\Delta M \qquad (34X)$$

Et donc on retrouve que ν_e est une constante indépendante du Potentiel V.
Il est possible dans le cas précédent que les particules 1 et 2 soient constituées des mêmes particules élémentaires, par exemple si la particule 1 est un atome excité.

On verra dans l'article Théorie quantique des variables absolues (2ième théorie du livre Théories d'or, qu'on distingue les particules indépendantes (electron libre, proton libre..) des particules liées, c'est-à-dire qui sont liées à d'autres particules pour en constituer d'autres (électron dans un atome, proton dans un noyau, atome dans une molécule..).

Si on obtient par une équation d'onde (du type Schrodinger) exprimée dans l'ether, l'énergie E_i d'une particule liée p_i, ou la masse M d'une particule indépendante p, alors si la masse générant le potentiel est au repos dans l'ether, l'énergie totale de p_i et de p seront en accord avec ce qui précède $E_i(1-V/c^2)$ et $Mc^2(1-V/c^2)$.
Dans le cas général d'une particule de masse M en mouvement , on utilise la conservation de l'énergie E et de l'impulsion **P** localement dans E_d, avec :

$$E = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - v_e^2 / c^2}} - MV \qquad (37X)$$

$$\mathbf{P} = M\mathbf{v}_e \qquad (38X)$$

On utilise alors les résultats de la section précédente.

Toutes les équations classiques de la physique quantique (Schrodinger, Dirac et celles de la physique des particules) sont valides dans la Théorie de l'Ether exprimées en coordonnées éthérées.

On voit donc dans cette section que la T.E.G permet une interprétation très intéressante qui n'existait pas dans la R.G. (En réalité, on considère même que la R.G et la physique quantique sont contradictoires).

6.CONCLUSION

Et donc dans cet article, on a ajouté certains éléments théoriques complétant l'article précédent Théorie de l'Ether avec Gravitation [12]. On a vu comment une contraction exprimée par $C(v_A)$, v_A étant la vitesse absolue de la particule, permettait de généraliser très simplement le cas où une masse créant le Potentiel était au repos dans un Référentiel Galiléen. On a exposé un 8ième Postulat permettant de traiter ce cas. On a vu alors comment obtenir les trajectoires de particules et les longueurs d'onde des photons mesurées dans le cas d'un observateur en mouvement par rapport à la masse créant le Potentiel. On a aussi exposé l'interprétation très intéressante et très naturelle des équations de la physique quantique par la T.E.G, interprétation qui conduisait aussi à modifier leur expression classique. Enfin on a justifié plus précisément que d'après la T.E.G, de la matière pouvait être éjectée d'un trou noir, ce qui est impossible dans la R.G.

References:

1. T. Delort, Theory of Ether, Physics Essays, 13,4 (2000)
2. T. Delort, Applications of Theory of ether, Physics Essays 17,3, (2004)
3. T. Delort, Theory of Ether with Gravitation, Physics Essays, 18,1 (2005)
4. T. Delort, Complements of Theory of Ether, Physics Essays,18,2 (2005)
5. Max Born, Einstein's Theory of Relativity, (Dover publication, New-York 1985)
6. J.Foster, J.P Nightingale, A short course in General Relativity,(Springer-Verlag, New-York 1994)
7. A.French, Einstein, le livre du centenaire,Hier et Demain, (Paris, 1979)

8. J.Ph Perez N.Saintcriq Chery, Relativité et Quantification, (Masson, Paris 1984).
9. Thierry Delort, Théorie de l'Ether (2015), extrait du livre Théories d'or 8e édition, Books on Demand, Paris (2015).
10. Thierry Delort, Applications de la Théorie de l'Ether, (2015), extrait du livre Théories d'or 8e édition, Books on Demand, Paris (2015)).
11. Thierry Delort, Compléments de la Théorie de l'Ether (2015), extrait du livre Théories d'or 8e édition, Books on Demand, Paris (2015)).
12. Thierry Delort, Théorie de l'Ether avec Gravitation (2015), extrait du livre Théories d'or 8e édition, Books on Demand, Paris (2015)).
13. T.Delort, Follow up on the Theory of Ether, Physics Essays 20,3 (2007)

2ième THEORIE :

THEORIE QUANTIQUE DES VARIABLES ABSOLUES.

Auteur :Thierry DELORT.
Date : Juin 2015.

TABLES DES MATIERES.

Article : THEORIE QUANTIQUE DES VARIABLES ABSOLUES
Auteur :Thierry DELORT
Date :Juin 2017
Extrait du livre : Théories d'or 9e édition, Editions Books on Demand, Paris (2017)

Résumé :

Dans cet article, nous présentons une Théorie quantique dans laquelle à la fois certaines variables physiques sont indéterminées comme dans la Théorie Quantique Classique (T.Q.C), et certaines autres variables sont absolues, indépendantes de leur observation.
Cette Théorie Quantique des Variables Absolues (T.Q.V.A) permet à la fois d'éviter l'aspect paradoxal de la T.Q.C, mais aussi une compréhension beaucoup plus aisée des phénomènes quantiques notamment en Physique des particules. La T.Q.V.A est basée sur un nouveau concept fondamental, celui de *choc quantique*. Dans cet article, on montrera que cette nouvelle théorie permet d'interpréter l'ensemble de la physique quantique.

Nous verrons que les variables absolues apparaissent de façon naturelle et simple, et que la T.Q.V.A, tout en ayant le même cadre mathématique que la T.Q.C, est fondamentalement différente. Nous donnerons dans la partie 5. Discussion 6 types d'expériences, justifiant le rejet de la T.Q.C en faveur de la T.Q.V.A. En particulier nous donnerons une interprétation par la T.Q.V.A des expériences paradoxales sur l'intrication quantique.

Mots-clés :Chat de Schrödinger- trous d'Young- résonance magnétique -Inégalités d'Heisenberg- variables absolues-intrication quantique.

1.INTRODUCTION

La Théorie Quantique Classique (T.Q.C) présente certains défauts la rendant insatisfaisante.

On sait par exemple que Shrodinger a proposé l'expérience virtuelle connue sous le nom du « Paradoxe du chat de Schrodinger » dans laquelle l'état d'un chat -mort ou vivant- était indéterminé avant qu'on réalise une observation.

Cet éminent physicien et plusieurs autres aussi renommés n'ont jamais admis l'explication de ce paradoxe par Heisenberg basée sur la T.Q.C.

Par ailleurs, l'un des physiciens les plus renommés en physique quantique, Feynmann, disait « Personne ne comprend rien à la physique quantique ». Le fait que certains physiciens parmi les plus grands considèrent la T.Q.C comme paradoxale, et que d'autres la déclarent incompréhensible alors qu'ils en sont les plus grands spécialistes montrent bien que la T.Q.C pose problème et n'est pas satisfaisante. Dans la section 5.Discussion, nous rassemblerons les principales expériences conduisant à rejeter la T.Q.C en faveur de la T.Q.V.A.

La théorie proposée dans cet article, appelée « Théorie Quantique des Variables Absolues » (T.Q.V.A), apparaît comme un intermédiaire entre la T.Q.C, puisqu'elle admet l'existence de variables indéterminées, et la Théorie physique traditionnelle, c'est-à-dire antérieure à la T.Q.C, puisqu'elle admet aussi l'existence de variables absolues ou variables cachées indépendantes de l'observation.
Le premier avantage de cette théorie est qu'elle permet de façon indiscutable d'éviter le Paradoxe du chat de Schrodinger, et aussi de rendre les phénomènes quantiques beaucoup plus compréhensibles que d'après la T.Q.C. Elle conduit aussi à d'importantes simplifications mathématiques par rapport à la T.Q.C, évitant par exemple d'utiliser le concept de paquets d'onde.

La nouvelle théorie (T.Q.V.A) est mathématiquement aussi complète et rigoureuse que la T.Q.C. Cependant, les 2 théories utilisent le même cadre mathématique tout en l'interprétant de façon différente et contradictoire. Ainsi, dans la T.Q.V.A, on admet qu'on peut associer à tout système une équation d'onde du type Schrodinger ou Dirac, qui est exactement la même que dans la T.Q.C. Il sera donc possible d'utiliser les résultats mathématiques de la T.Q.C, en particulier le résolution de l'équation de Schrodinger ou de Dirac dans de nombreux cas, ainsi que l'obtention des sections efficaces et des durées de vie moyenne en physique des particules. Cependant, nous donnerons une nouvelle interprétation par la T.Q.V.A de ces solutions, durées de vie moyennes ainsi que des section efficaces différente, faisant intervenir des variables absolues et indéterminées. Dans la dernière partie nous exposerons 6 types d'expériences inexpliquées ou en désaccord avec la T.Q.C, mais expliquées et en accord avec la T.Q.V.A. On verra que ceci est notamment le cas pour les expériences paradoxales récentes sur l'intrication quantique. On montrera dans cet article que la T.Q.V.A permet d'interpréter l'ensemble de la physique quantique.

2.THEORIE

Supposons par exemple qu'on isole dans une goutte d'eau une molécule d'eau. On sait alors qu'en l'observant, on trouvera qu'elle est constituée de 2

atomes d'Hydrogène et d'un atome d'Oxygène. Mais de plus on sait par avance, avant même de l'observer que chaque atome d'hydrogène observé aura un seul électron. On connaît par avance certaines propriétés quantiques de cet électron, notamment son énergie et son moment angulaire (l=0). On connaît par avance sa masse, et aussi celle du proton, ainsi que l'état quantique du proton (J,B,S,P…).
Il apparaît donc que certaines variables physiques définissant l'état de la molécule d'eau et de ses constituants sont définies avant et indépendamment de toute observation.

La T.Q.V.A que nous allons présenter distingue clairement ces variables absolues des variables indéterminées, ce que ne faisait pas la T.Q.C.

Le premier Principe de la T.Q.V.A est le suivant :

PRINCIPE 1 :
a)Si on considère un système quelconque, il est caractérisé par 2 types de variables : Les *variables absolues* -complètement déterminées et indépendantes de l'observation- et les autres variables, appelées *variables indéterminées*.
b)L'énergie d'un système et la position et la nature physique d'une particule sont des variables absolues.

On verra que le b) du Principe précédent concernant la position d'une particule est particulièrement illustré dans le cas d'une *particule indépendante* (électron libre, particule libre…., et des atomes et molécules. Dans le cas des *particules liées*, par exemple un électron dans un atome, on verra que ces particules se comportent comme si elles étaient délocalisées

D'après le Principe 1a) de la T.Q.V.A, un système est défini partiellement par certaines variables absolues de même que par la nature de certaines variables indéterminées. Nous verrons qu'il est possible d'obtenir d'après la T.Q.V.A la nature de ces variables indéterminées de même que les valeurs possibles des variables absolues en utilisant la fonction d'onde associée au système ainsi que les équations de la mécanique classique. Nous utiliserons aussi le concept d'Opérateur associé à une variable physique qui a le même sens que dans la C.Q.T. Dans la T.Q.V.A, ces variables absolues ou indéterminées dépendent des conditions physiques du système et donc des conditions expérimentales et donc de l'observation puisque celle-ci définit des conditions expérimentales. Cependant elles ne dépendent pas de l'observation par elle-même comme c'est le cas dans la T.Q.C puisqu'elles sont définies même en l'absence d'observation. Donc la notion d'observable est inutile dans la T.Q.V.A qui étudie les variables physiques absolues et indéterminées d'un système.

On remarque aussi que d'après le Principe 1b) de la T.Q.V.A, les variables position, énergie et celles définissant la nature physique d'une particule sont des

variables absolues, alors qu'elles sont des observables indéterminées avant leur observation dans le T.Q.C. (Par exemple dans l'expérience du chat de Schrodinger l'état d'une particule –désintégrée ou non-désintégrée- est indéterminé avant l'observation). La T.Q.C et donc la T.Q.V.A sont donc fondamentalement différentes quant à la nature des variables physiques indéterminées.

Nous verrons que ce Principe 1 permet une compréhension beaucoup plus aisée des phénomènes quantiques, ce qui est un objectif essentiel de la T.Q.V.A.

On sait que la physique classique antérieure à la T.Q.C dans laquelle toutes les variables physiques étaient absolues ne permettait pas d'interpréter le hasard observé dans les phénomènes quantiques. De plus, on sait que ce hasard concernait dans certains cas la position et l'énergie des systèmes. Il est donc nécessaire d'introduire un second Principe dans la T.Q.V.A, permettant d'interpréter le hasard observé dans les phénomènes quantiques :

PRINCIPE 2 :
Certains phénomènes très brefs, de transition existent. Ils introduisent le hasard dans les variables physiques. On appellera *chocs quantiques* de tels phénomènes.

D'après ce Principe, une diffusion de particules (scattering) , une désintégration, , un choc (avec la signification habituelle d'un choc) d'une particule contre un écran d'interférences ou de diffraction ou contre une barrière de potentiel pourront être considérés comme des *chocs quantiques.* Il en est de même si une variable indéterminée devient une variable absolue, à cause d'une modification de l'environnement d'une particule. Nous verrons que ce sont les fonctions d'onde associées aux systèmes qui permettent d'obtenir les propriétés statistiques des chocs quantiques.

Nous verrons aussi que ce Principe permet d'interpréter les inégalités d'Heisenberg spatiales et temporelles dans les cas ou on les observe. Celles-ci n'ont cependant pas du tout la même interprétation dans la T.Q.V.A que dans la T.Q.C.

Le cadre mathématique de la T.Q.V.A est exprimé dans le 3ième Principe :

PRINCIPE 3 :
a)On associe à tout système physique une ou plusieurs fonctions d'onde Φ(t), qui peut définir certaines propriétés statistiques d'un choc auquel est soumis le système et certaines variables absolues caractérisant le système.
b)On obtient Φ(t) par l'équation de Schrodinger :

$$ih_1 \frac{\partial}{\partial t}(\Phi(t)) = H(t)\Phi(t) \quad (\text{avec } h_1 = h/2\pi)$$

ou une équation analogue (Dirac, Klein Gordon..)
c)En particulier si pour toutes les fonctions $\Phi(t)$ associées au système (pour une même équation), $\Phi(t)$ est vecteur propre d'un opérateur O_1 associé à une variable physique V_1 pour la même valeur propre λ_1, alors la variable V_1 est une variable absolue caractérisant le système, et est égale à λ_1.

On rappelle que dans la T.Q.C l'état d'un système est complètement défini par le fonction d'onde $\Phi(t)$. Cela n'est pas vrai dans la T.Q.VA car dans cette théorie $\Phi(t)$ ne permet que d'obtenir certaines propriétés statistiques d'un choc et certaines variables absolues. En particulier dans la T.Q.V.A $\Phi(t)$ ne permet pas d'obtenir la position d'un système.

3.INTERPRETATION DES EXPERIENCES CLASSIQUES DE PHYSIQUE QUANTIQUE PAR LA T.Q.V.A.

Dans cette partie, nous allons donc donner l'interprétation des expériences classiques de physique quantique par la T.Q.V.A. Cette interprétation est en générale nouvelle sous divers aspects. Cependant, nous verrons que pour les interpréter, on utilise comme dans la T.Q.C les fonctions d'onde associées aux systèmes considérés et donc les équations de la T.Q.C (Schrodinger, Dirac…). On utilise aussi le concept classique d'Opérateur associé à une variable physique. D'après le Principe 3 de la T.Q.V.A, les concepts d'Opérateur et de fonctions d'onde permettent à la fois de déterminer les variables absolues, mais aussi les propriétés statistiques des chocs quantiques. Ces concepts sont donc aussi fondamentaux en T.Q.V.A qu'en T.Q.C, même si on les interprète différemment.
On a admis dans le Principe 1 que la position d'une particule était une variable absolue. On admettra aussi dans le T.Q.V.A qu'il en est de même de sa vitesse, puisqu'on peut exprimer celle-ci très simplement en fonction de la position.

Si on considère un atome isolé, on sait qu'il y a des règles de répartition des électrons autour du noyau. Plusieurs d'entre elles déterminent des variables absolues, ainsi le nombre d'électrons d'un atome apparaît donc comme un exemple évident de variable absolue. De plus, on sait que les électrons occupent les niveaux d'énergie les plus bas, et que dans un même niveau d'énergie, il existe des règles de répartition dans les différentes sous-couches. Le nombre d'électrons par couche ou sous-couche apparaît donc aussi comme un exemple de variable absolue.

On peut donc considérer que les règles de répartitions conduisent à des variables absolues concernant ces électrons, notamment la norme de leur moment angulaire (L). Ceci justifie certains exemples de variables absolues concernant la

molécule d'eau qu'on a donnés en introduction pour illustrer l'existence des variables absolues.

3a) **Exemples de chocs quantiques spatiaux.**

Si par exemple, on considère une particule dirigée vers une barrière de potentiel, on peut considérer d'après le Principe 1b) que la position et la vitesse de la particule sont parfaitement déterminées jusqu'à ce que la particule atteigne la barrière de potentiel. Alors d'après la T.Q.V.A, il se produit un choc quantique, et la particule traverse ou rebondit sur la barrière avec des probabilités obtenues comme dans la T.Q.C, utilisant la fonction d'onde associée à la particule. Ceci est en accord avec le Principe 3. Avant et après le choc quantique, position et vitesse de la particule sont parfaitement déterminées :ce sont des variables absolues.

Il se produit un phénomène analogue dans un microscope électronique ou dans la diffraction d'électron par des cristaux : Lorsque l'électron atteint la particule à observer au microscope ou les atomes du cristal, il se produit un choc quantique dont les propriétés statistiques sont obtenues en utilisant la même fonction d'onde que dans la T.Q.C. Mais sa position et sa vitesse avant et après le choc quantique sont parfaitement déterminées.

Si on considère l'expérience des fentes d'Young ou celles de diffraction d'électrons traversant un écran, on interprète cette expérience dans la T.Q.V.A par la présence d'un choc quantique lorsque l'électron atteint l'écran. Appelons « écran choc » l'écran où se trouvent les fentes d'Young ou le trou dans lequel les électrons sont diffractés et « écran image » l'écran où on observe les figures d'interférences et de diffraction. D'après la T.Q.V.A on peut considérer qu'avant et après le choc quantique, position et vitesse des électrons sont des variables absolues déterminées. Mais les propriétés statistiques du choc quantique dépendent de la nature de l'écran choc, (et en particulier si un trou est bouché ou si on a installé un dispositif physique permettant d'observer l'électron), et il est aussi très possible qu'elles dépendent de l'écran image (notamment de sa distance avec l'écran choc et aussi des dispositifs expérimentaux éventuels se trouvant entre les 2 écrans.)

Cependant, on sait que dans ces expériences, si l'écran image est disposé assez loin de l'écran choc, l'intensité obtenue en un point P de l'écran image dépend d'un angle θ, et qu'on calcule cette intensité utilisant la fonction d'onde associée aux électrons. Or θ est toujours le même, quelle que soit la distance entre les 2 écrans, pourvu que celle-ci soit assez grande. On peut donc interpréter la figure observée, d'interférence ou de diffraction,si on considère que lors du choc quantique, la probabilité que l'électron soit émis dans la direction θ après le choc quantique est proportionnelle à l'intensité prévue au point P sur l'écran, c'est-à-dire

obtenue en utilisant la fonction d'onde associée aux électrons, en accord avec le Principe 3.

Il serait donc intéressant de faire varier la distance entre les 2 écrans, afin de voir si les propriétés du choc quantique dépendent de cette distance.

3b)**Exemples de chocs quantiques temporels.**

Considérons maintenant les expériences concernant la résonance magnétique. On sait par exemple que si on considère des atomes d'hydrogène dans leur état fondamental (l=0) dans un champ magnétique **B**($B_1\cos(\omega t)$, $B_1\sin(\omega t)$, B_0), avec $B_1 \ll B_0$, on obtient une oscillation du spin des atomes d'hydrogène si $\omega = \omega_L$, où ω_L est la pulsation de Larmor.

On peut alors considérer dans la T.Q.V.A que la composante du spin de l'électron dans la direction de **B** est une variable absolue, de même que l'énergie de l'électron (Ceci sera justifié en détail dans la section 3c)). D'après la T.Q.V.A, le retournement de spin constitue un choc quantique, dont les propriétés statistiques sont obtenues d'après le Principe 3 en utilisant la fonction d'onde associée aux électrons obtenue comme dans la T.Q.C en résolvant l'équation de Schrodinger. Mais le retournement de spin est indépendant de l'observation dans la T.Q.V.A, contrairement à la T.Q.C.

Si on considère une désintégration A→B→C, alors on peut considérer dans la T.Q.V.A que ces désintégrations sont des chocs quantiques, dont les fonctions d'onde associées à A,B,C donnent certaines propriétés statistiques. Ainsi, supposons que la fonction d'onde Φ soit associée à B. D'après l'interprétation de la désintégration par la T.Q.V.A le temps où la particule B se désintègre (si celle-ci est instable) est une variable absolue et si B existe au temps t=0,alors $\Phi\Phi^* = \exp(-t/\tau)$ représente la probabilité que B existe encore à t. De plus, à partir de Φ et de l'Opérateur Energie, on peut obtenir comme dans la T.Q.C une probabilité p(E)dE , mais dans la T.Q.V.A, cette probabilité est celle que B soit produite avec l'énergie au repos comprise entre E et E+dE, cette énergie étant une variable absolue. On peut justifier que l'instant de désintégration soit une variable absolue par le fait que la nature de B et celle des produits de désintégration de B sont des variables absolues. Nous verrons plus loin que ce qui précède justifie que les inégalités temporelles d'Heisenberg décrivent les propriétés statistiques du choc quantique temporel précédent. On voit donc qu'on évite indiscutablement la Paradoxe du chat de Schrodinger dans la T.Q.V.A, puisque la désintégration de A et de B apparaissent comme étant totalement indépendantes de l'observation.

3c)**Exemples de variables quantiques absolues.**

Si on obtient d'après la solution d'une équation d'onde l'énergie d'une particule et que celle-ci est fonction de certains nombres quantiques correspondant à des Opérateurs commutant entre eux, alors on interprète le fait que l'énergie soit une variable absolue par le fait que les variables physiques correspondant aux Opérateurs précédents ont la valeur de ces nombres quantiques correspondants à l'énergie considérée. Ainsi par exemple, on sait que dans la structure fine de l'hydrogène, les niveaux d'énergie dépendent des nombres quantiques J et de L(lamb shift). D'après la T.Q.V.A, ceci entraîne que les variables physiques correspondants à J et à L sont des variables absolues. Il en est de même pour les nombres quantiques intervenant dans l'effet Zeeman ou dans l'effet Pashen-Back.

Dans de nombreux cas on a un système complet d'Opérateurs commutant entre eux et avec le Hamiltonien, et l'énergie dépend des nombres quantiques correspondant à ces Opérateurs. On a vu précédemment que dans ce cas les variables physiques correspondant à ces nombres quantiques étaient des variables absolues. On peut aussi considérer que ceci est la conséquence du Principe 3c), car alors les fonctions d'onde associées au système sont toutes vecteurs propres des Opérateurs commutant entre eux, pour la même valeur propre égale au nombre quantique caractérisant la particule

Lorsqu'on n'a pas un système complet d'Opérateurs commutant avec le Hamiltonien mais qu'on peut écrire le Hamiltonien comme Hamiltonien $H=H_1+\varepsilon_1$, où ε_1 est une perturbation de H_1, on résout comme dans la T.Q.C l'équation d'onde en utilisant les solutions de l'équation $H_1=E_1\Phi_1$. Alors par analogie avec ce qui précède on peut considérer que si chaque fonction d'onde associée à la particule est une perturbation d'une fonction d'onde qui est un vecteur propre d'un Opérateur O, toujours associé à la même valeur propre, alors la variable physique correspondant à cet Opérateur est une variable absolue égale à la valeur propre commune. On dira dans les cas précédents que la variable physique est *portée par l'onde* car on l'obtient comme une valeur propre des fonctions d'onde associées à la particule. Ce n'est pas le cas de la variable-position. Ce qui précède entraîne que la norme du spin des fermions est une variable absolue car toute fonction d'onde associée à un fermion est un vecteur propre de l'Opérateur s , et toujours associé à la même valeur propre.

On a vu précédemment que si l'énergie d'une particule dépendait explicitement de nombres quantiques Q1,…,Qn, associés aux Opérateurs O1,…,On, (On écrira alors E=E(Q1,…,Qn)), alors Q1,..,Qn étaient la valeur des variables absolues correspondants à O1,..,On.. En général, on aura toujours si (Q1,…,Qn)≠(Q'1,…,Q'n), alors E(Q1,…,Qn)≠E(Q'1,…,Q'n).

Cependant, en cas d'égalité E(Q1,..,Qn)=E(Q'1,…,Q'n), on peut s'attendre à ce que les variables physiques associées aux Opérateurs O1,..,On ne soient plus toutes des variables absolues. En effet, les fonctions d'onde associées à la particule peuvent être de la forme $\alpha\varphi_{Q1,..,Qn} + \beta\varphi_{Q'1,\ldots,Q'n}$, et ne sont donc plus toutes vecteur propre de O1,…,On associées aux valeurs propres Q1,..,Qn. Il en est de même si les fonctions d'onde associées à la particule considérée sont toutes des perturbations de fonction de la forme $\alpha\varphi_{O1,\ldots,Qn} + \beta\varphi_{O'1,\ldots,Q'n}$.

On est dans la même situation en considérant les hadrons. On peut considérer en général que les masses de ceux-ci (où leurs masses complexes m_0-$i\Gamma/2$ lorsqu'elles sont instables) sont les valeurs propres d'Hamiltoniens d'équation de Schodinger ou de Dirac caractérisant les particules, et dépendent de nombres quantiques associés à des Opérateurs commutant entre eux et avec le Hamiltonien (P,J ,L ,B,S….). De la même façon que précédemment, et comme conséquence du Principe 3c), on peut considérer que les variables physiques associées à ces nombres quantiques et la masse complexe sont des variables absolues.

On interprète le fait que ces variables physiques et la masse complexe sont des variables absolues par le fait qu'elles caractérisent la nature de particules, et on a vu que cette nature pouvait être considérée comme une variable absolue.

Considérons une particule dont la nature est définie par les nombres quantiques O1,…,Qn associés aux Opérateurs O1,..,On (Par exemple L,S,J,B,P,I,I_3..). Alors d'après la T.Q.V.A, il doit exister une solution d'une équation (E) :$H\Phi=m\Phi$ qui est associée à la particule et est valeur propre de O1,…,On associée aux valeurs propres Q1,…,Qn. Ceci permet donc d'obtenir la masse complexe de la particule, s'il n'y a qu'une seule solution de (E) ayant la propriété précédente. On justifie l'existence d'une telle solution par le fait que dans un espace contenant la fonction d'onde considérée (correspondant à l'intersection des espaces propres associés à O1,…,On pour les valeurs Q1,..,Qn), O1,..,On commutent entre eux et avec le Hamiltonien H de (E). Ceci entraîne que les variables physiques correspondant à Q1,..,Qn sont portées par l'onde car on les obtient comme valeurs propres associées aux fonctions d'onde associées à la particule.

On remarque que le fait qu'une particule soit un fermion ou un boson peut aussi être considéré comme une variable absolue, puisque cela caractérise la nature d'une particule.

3d)**Diffusion de particules.**

Si on considère une diffusion de particules , d'après la T.Q.V.A la nature des particules initiales et finales, de même que leur vitesse et leur position, sont des

variables absolues indépendantes de l'observation. La diffusion apparaît donc comme un choc quantique, dont les propriétés statistiques sont obtenues à partir de la vitesse et des fonctions d'onde classiques associées aux particules initiales et finales, en utilisant les mêmes formules mathématiques que dans la T.Q.C. On obtient donc dans la T.Q.V.A, que tout comme la désintégration, la diffusion est un phénomène indépendant de l'observation. Ceci permet une compréhension de la physique des particules, dont Feynmann était spécialiste, beaucoup plus aisée que dans la T.Q.C, dans laquelle les propriétés des particules dépendent de l'observation.

3e)**Interprétation de l'Expérience de Stern et Gerlach par la T.Q.V.A**

Considérons maintenant l'expérience de Stern et Gerlach. L'énergie magnétique des atomes d'argent au repos dans le champ magnétique **B** orienté dans la direction Oz est de la forme :

$$E_{E.M}=2(e/2m)s_Z B_Z \qquad (1)$$

D'après ce qui précède, puisque celle-ci dépend du nombre quantique s_Z, s_Z est donc une variable absolue. Il est donc naturel, puisque la position des atomes d'argent est aussi une variable absolue d'exprimer l'énergie des atomes d'argent animés d'une vitesse v par :

$$E=mv^2/2 +2(e/2m)s_Z B_Z(x,y,z) \qquad (2)$$

Cette expression très simple, de laquelle on obtient la trajectoire des atomes, est beaucoup plus difficilement justifiable dans la T.Q.C puisque dans cette théorie, la position des atomes d'argent est indéterminée tout comme leur vitesse.
Si on fait traverser les atomes d'argent plusieurs appareils de Stern et Gerlach pour lesquels **B** est orienté différemment, alors d'après ce qui précède, le spin des électrons orienté dans la direction de **B** est toujours une variable absolue. On peut interpréter ces expériences par le fait que que s_X et s_Y sont des variables indéterminées lorsque l'atome traverse un appareil pour lequel **B** est orienté sur Oz. On pourra alors considérer dans la T.Q.V.A qu'il se produit un choc quantique lorsque un atome d'argent entre dans un appareil de Stern et Gerlach. D'après le Principe 3a), on obtient les propriétés statistiques de ce choc quantique lorsqu'un atome entre dans un appareil D_n de Stern et Gerlach en utilisant la fonction d'onde associée à l'atome traversant l'appareil précédent D_{n-1} , et l'orientation de **B** dans D_n. On remarque que si **B** est orienté sur Oz, ce sont les règles de répartition des états quantiques qui entraînent de la même façon qu'en T.Q.C que la compsosante

totale du spin S_Z des électrons de l'atome d'argent est égal au s_Z de l'électron externe, que le moment orbital total L^2 des électrons de l'atome d'argent est nul (d'où l'Equation (1).

3f)**Exemple de contradiction entre la T.Q.V.A et la T.Q.C concernant la nature –déterminée ou indéterminée- d'une variable physique**.

Pour obtenir le moment magnétique de hadron, par exemple celui du proton, on considère le moment magnétique comme associé à l'Opérateur $\mu=\mu_1+\mu_2+\mu_3$ (avec les notations classiques.

On obtient expérimentalement alors le moment magnétique μ_P du proton, Φ étant la fonction d'onde associée au proton par :

$$\mu_P=<\Phi, \mu,\Phi> \qquad (3)$$

Or on sait que dans la T.Q.C, si O est un Opérateur associé à une observable, $<\Phi,O,\Phi>$ est utilisé pour donner la valeur moyenne de l'observable, mais les mesures doivent donner des valeurs propres de cet opérateur. Si on considère le moment magnétique comme un observable, ce qui est le cas pour utiliser l'équation (3), en mesurant μ_P, on devrait donc observer d'après la T.Q.C les valeurs propres de l'Opérateur μ, la moyenne de ces mesures donnant $<\Phi, \mu,\Phi>$ ce qui n'est pas le cas.

Au contraire dans la T.Q.V.A, on peut considérer que le moment magnétique des hadrons est une variable absolue, ce qui justifie son obtention par l'Equation (3) précédente.

Ainsi, on a interprété toutes les expériences quantiques précédentes couvrant toute la physique quantique classique d'après la T.Q.V.A, utilisant les concepts de choc quantique et de variable absolue, mais sans utiliser le concept d'Observable qui est fondamental en T.Q.C mais n'est pas nécessaire en T.Q.V.A.

3g)**Interprétation de l'intrication quantique par la T.Q.V.A .**

On a vu, (Chapitre 3a) Exemples de chocs quantiques spatiaux) que lors de l'expérience des fentes d'Young, les propriétés statistiques du choc quantique spatial pouvaient dépendre de la distance entre l'écran-choc et l'écran-image qu'on a définis, ou de tout dispositif expérimental situé entre l'écran-choc et l'écran-image. Ainsi plus généralement dans la T.Q.V.A, les propriétés statistiques d'un choc spatial subi par une particule dépendent des dispositifs expérimentaux placés sur sa trajectoire, même si la particule ne les a pas encore atteint au moment du choc spatial. Ceci permet d'interpréter les expériences d'intrication quantique

(utilisant des particules corrélées) du type ESW (ENGERT,SCULLY,WALTHER)[10] connues sous le nom de « *delayed choice experiment* ». On interprète dans la T.Q.V.A ce type d'expérience par le fait que comme on l'a vu, on peut associer à toute particule une onde plane d'équation $\Phi(x,y,z,t)=A\exp(i(Et-p_x x-p_y y-pz_z)/h_1)$, cette onde emplissant tout l'espace et étant appelée particule-onde. Ainsi, cette particule-onde est en contact avec l'ensemble de l'Univers et donc lors d'un choc est en contact avec les dispositifs expérimentaux avant que la particule-corpuscule, qui elle est localisée, ne les atteigne. Ceci explique que les propriétés statistiques d'un choc peuvent dépendre des dispositifs expérimentaux que la particule-corpuscule n'a pas encore atteint. On appellera *prédiction quantique* ce phénomène.

Dans les expériences d'intrication quantique du type de celles d'Aspect ou de l'expérience de Genève [11], des photons situés à de grandes distances interagissent instantanément. On peut considérer dans la T.Q.V.A que si les particules-corpuscules des photons sont éloignées, les particules-onde sont en contact puisqu'elles emplissent l'Univers. Ceci justifie la possibilité d'interaction instantanée entre 2 photons éloignés. Ainsi dans la T.Q.V.A, on admet la localité de la particule-corpuscule mais la non-localité de la particule-onde, ce qui permet d'interpréter les expériences sur l'intrication quantique. Dans la T.Q.V.A, il existe donc des interactions instantanées à distance c'est-à-dire entre 2 particules-corpuscules éloignées. Ceci est en désaccord avec la Relativité Restreinte mais en accord avec la Théorie de l'Ether [12].

4.INTERPRETATION MATHEMATIQUE DE LA T.Q.V.A-INEGALITES D'HEISENBERG.

Dans les exemples précédents, on a présenté les variables physiques qu'on peut considérer le plus naturellement comme des variables absolues, et comment certaines pouvaient être indéterminées (Par exemple la composante du spin). On a aussi interprété de nombreuses expériences à l'aide de la notion de choc quantique.

Dans tous ces exemples, on utilise une des équations analogues à celle de Schrodinger (Dirac, Klein-Gordon), et sa solution, fonction d'onde associée à une particule. Cette équation et sa solution apparaissent donc aussi fondamentale en T.Q.V.A, car elles permettent d'après le Principe 3 de prévoir des variables absolues, notamment les masses et l'énergie de particules, celles portées par l'onde, et de décrire les propriétés statistique des chocs quantiques. Cependant, dans la T.Q.V.A, contrairement à la T.Q.C, elle ne suffit pas pour décrire complètement l'état de la particule à laquelle elle est associée puisqu'elle ne permet pas de connaître certaines variables absolues comme par exemple la position d'une particule, ou sa nature ou son énergie. Pour obtenir la position d'une particule, dans

la T.Q.V.A, on utilise une équation de l'énergie analogue à l'équation (2) ainsi que l'équation obtenue par la relation fondamentale de la dynamique $\Sigma\mathbf{F}=m\gamma$. Les cas où on peut utiliser ces 2 équations sont déterminés: On peut les utiliser seulement pour des *particules indépendantes*, c'est-à-dire qui n'interagissent pas avec d'autres particules pour constituer d'autres particules ou un solide (atomes indépendants, particules libres..). Ces équations sont valides seulement entre 2 chocs quantiques successifs, appliquées sur le centre d'inertie de la particule indépendante considérée. Si on associe une fonction d'onde à une particule indépendante, par exemple pour obtenir les propriétés statistiques d'un choc, alors l'énergie et l'impulsion de la particule-corpuscule doivent êtres égales à l'énergie et l'impulsion obtenues par la fonction d'onde, c'est à dire celles de la particule-onde.

L'équation de Schrodinger ou le Hamiltonien utilisé pour caractériser les particules ne suffisent pas pour déterminer les particules existantes. Des règles quantiques supplémentaires sont nécessaires. Ainsi, par exemple, le fait que la couleur des particules doit être neutre est utilisé pour obtenir que les hadrons existant sont ou bien des baryons constitués de 3 quarks ou 3 anti-quarks avec B=1 ou B=-1, ou bien des mésons constitué de quarks et d'anti-quarks avec B=0. De même, le fait que la fonction d'onde des baryons doit être anti-symétrique conduit à ne conserver que certaines solutions de l'équation de Schrodinger comme pouvant être associées à des particules existantes. Ceci était aussi le cas dans la T.Q.C.

On remarque que la notion de système d'Opérateurs complets qui commutent est aussi fondamentale en T.Q.V.A qu'en T.Q.C , puisqu'elle permet d'obtenir simplement l'expression énergie de particules, et donc certaines variables absolues.

On peut remarquer que ce n'est que lorsqu' elle décrit les propriétés statistiques d'un choc quantique spatial qu'une fonction d'onde donne la probabilité spatiale de présence d'une particule. On peut considérer par exemple qu'un électron dans un atome est soumis très nombreux chocs quantiques dont les propriétés statistiques sont décrites par la fonction d'onde décrivant son orbitale obtenue en résolvant l'Equation de Schrodinger. Alors dans ce cas la fonction d'onde exprime bien une probabilité de présence. On n'est alors pas dans le cas des particules indépendantes comme pour l'expérience de Stern et Gerlach, puisque l'électron est en interaction avec les autres particules de l'atome pour constituer l'atome. En outre, on remarque que son énergie est quantifiée. Les équations position classiques sont donc incompatibles avec cette quantification de l'énergie. On retrouve, en accord avec le Principe 2, que les chocs quantiques permettent d'interpréter le hasard dans la position de l'électron.

La T.Q.V.A présente d'importantes simplifications mathématiques par rapport à la T.Q.C. En effet, puisque la position des particules est une variable absolue, il devient inutile d'utiliser des paquets d'onde alors que ceci était nécessaire dans la T.Q.C. De plus, dans la T.Q.C, le temps n'était pas une observable, et donc on ne pouvait pas justifier de la même façon les inégalités spatiales et temporelles d'Heisenberg $\Delta p_x \Delta x \geq h_1$ (avec $h_1 = h/2\pi$) et
$\Delta E \Delta t \geq h_1$.

Dans la T.Q.V.A, on a vu que le temps auquel se produit la désintégration (ou la désexcitation) d'une particule est tout comme la position ou l'énergie une variable absolue, et on obtient utilisant la fonction d'onde associée à la particule $\Delta E \Delta t \geq h_1$ et $\Delta p_x \Delta x \geq h_1$, ces inégalités décrivant les propriétés statistiques d'un choc quantique. Ainsi par exemple, l'inégalité temporelle précédente est valable pour décrire une désintégration, donnant une relation entre les propriétés statistiques de l'énergie au repos de la particule créée et celles de son temps de désintégration. Elle peut aussi exprimer les propriétés statistiques d'une excitation ou d'une désexcitation d'une particule dans un Référentiel donné. En général, on exprime le Δt de l'inégalité spatiale d'Heisenberg en fonction de τ durée de vie moyenne des particules. On a en général $\Delta t = \tau$. Cette durée de vie moyenne est une variable absolue, ceci étant la conséquence du fait que la durée de vie de toute particule est une variable absolue d'après la T.Q.V.A. L'inégalité spatiale décrit par exemple un choc quantique spatial comme par exemple dans un choc quantique sur un écran dans une expérience d'interférences ou de diffraction, ou sur la cible dans un microscope électronique, ou dans le cas d'un électron d'un atome, qui on l'a vu pouvait être soumis à des chocs de façon quasi-permanente.

5.DISCUSSION.

Nous allons mettre en évidence qu'il existe au moins 6 types d'expériences qui sont des raisons de rejeter la T.Q.C en faveur de la T.Q.V.A :

5a)**Expérience du chat de Schrodinger :**

Cette expérience virtuelle, proposée par Schrodinger lui-même, montre que la conséquence de la T.Q.C est qu'on peut obtenir un chat dans un état indéterminé mort ou vivant. Ceci est la conséquence du fait que dans la T.Q.C, l'état d'un système est indéterminé si on ne l'observe pas, et dans cette expérience virtuelle l'état du chat est lié à celui d'une particule, désintégrée ou non-désintégrée. Il est évident que la T.Q.V.A évite ce paradoxe, puisqu'on a vu que dans cette théorie, la

nature d'une particule ,désintégrée ou non-désintégrée, était une variable physique absolue.
Si certains physiciens donnent une interprétation par la T.Q.C aux expériences du type précédent, leurs explications sont très complexes, contestables (De nombreux physiciens comme Schrodinger lui-même ne les ont jamais admises), et beaucoup moins simples et attractives que l'interprétation par la T.Q.V.A.

5b)**Contradiction avec la mécanique relativiste classique** :

Un 2ième type d'expérience en faveur de la T.Q.V.A regroupe les expériences dont l'interprétation utilise seulement les équations de la mécanique relativiste classique.

Dans ces expériences, on prévoit exactement la position et la vitesse d'une particule en tout temps, et ceci est vérifie expérimentalement.(Utilisant les équations du type $E=(1-v^2/c^2)^{-1/2} +qV)$. Or, ces prédictions utilisent qu'à tout instant, position et vitesse de la particule sont totalement déterminées. Or dans la T.Q.C, non seulement impulsion et position d'une particule ne peuvent pas être simultanément déterminées, mais aussi seules les équations du type de celle de Schrodinger ou Dirac sont admises. On interprète dans la T.Q.C le fait que position et impulsion sont déterminées quasi simultanément en utilisant la notion complexe de paquets d'onde. Or non seulement cette notion est complexe lorsqu'une particule a une vitesse constante, mais elle l'est beaucoup plus dans le cas général ou elle change au cours du temps comme en mécanique relativiste. Ainsi, la justification des équations de la mécanique classique relativiste à partir des équations de Schrodinger dans la T.Q.C est non seulement très complexe, mais aussi très contestable.
Au contraire, dans la T.Q.V.A, le fait que position et vitesse soient absolues et la notion de particule indépendante donnent une interprétation très simple des équations de la mécanique relativiste classique, et au fait que la prévision de la position d'une particule impose qu'à tout instant sa position et sa vitesse soient totalement déterminées.

On peut aussi considérer que les expériences du type de Stern et Gerlach sont du type précédent. En effet, on a vu que dans cette expérience, on peut aussi prévoir à l'avance la position d'une particule (supposant que son spin s_Z a pour valeur -1 ou 1), en utilisant l'Equation mixte (2) qu'on a proposée, utilisant mécanique classique et quantique. La encore, la précision de la position de la particule suppose qu'à tout instant position et impulsion sont définies et déterminées, ce qui est incompatible avec la T.Q.C mais en accord et simplement interprété par la T.Q.V.A.

5c)**Expériences de diffusion des particules.**

Ce type d'expérience aussi conduit à rejeter la T.Q.C au profit de la T.Q.V.A :
En effet, ces expériences sont interprétées si on suppose qu'à partir du point ou une particule est diffusée, sa position et son impulsion sont parfaitement déterminées. Ceci est totalement en accord avec la T.Q.V.A dans laquelle après le choc quantique correspondant à la diffusion impulsion et position sont parfaitement déterminées, mais est en désaccord avec la T.Q.C. En effet, la T.Q.C prévoit la probabilité que la fonction d'onde soit de la forme d'une onde plane d'équation $\Phi(x,y,z,t)=(A\exp(i(Et-p_xx-p_yy-p_zz)/h_1))$ après la diffusion. D'après cette expression, la particule devrait être délocalisée après la diffusion. Or on voit qu'il n'en est rien, la particule est toujours détectée comme si elle provenait exactement du point où elle a été diffusée. Pour justifier ceci dans la T.Q.C , il faudrait comme dans les expériences précédentes utiliser le concept de paquets d'onde, mais ceci est non seulement très complexe mais aussi très contestable : Pourquoi la fonction d'onde plane d'équation $\Phi(x,y,z,t)= A\exp(i(Et-p_xx-p_yy-p_zz)/h_1)$ devrait-elle se transformer en paquets d'onde ?. De plus, pourquoi dans le calcul de la matrice de transition M_{fi} utilise-t'on des ondes planes et non des paquets d'onde ?

On voit donc que ce type d'expériences concernant la physique des particules conduit aussi à rejeter la T.Q.C au profit de la T.Q.V.A. Ce sont sans doute de tels arguments qui faisaient dire à un des plus grands physiciens de physique des particules (Feynmann) : « Personne ne comprend rien à la physique quantique ».

5d)**Contradictions concernant les variables absolues et indéterminées.**

Un quatrième type d'expérience en faveur de la T.Q.V.A et en désaccord avec la T.Q.C est celui dans lequel d'après la T.Q.C une variable physique d'une particule indépendante est indéterminée et sa mesure doit conduire à plusieurs valeurs, alors qu'on n'en mesure qu'une seule, en désaccord avec toutes celles possibles d'après la T.Q.C. Ceci est le cas si on mesure le moment magnétique d'un proton par exemple. On a décrit ceci dans la partie 3f) :

D'après la T.Q.C, on devrait en mesurant le moment magnétique $\mu=\mu_1+\mu_2+\mu_3$ obtenir la valeur λ avec la probabilité $|\Phi_\lambda|^2$ si Φ_λ est la projection de la fonction d'onde du proton Φ (normalisée) sur le sous-espace propre associé à la valeur λ de l'Opérateur μ. En moyenne, on devrait trouver la valeur moyenne de μ $<\Phi,\mu,\Phi>$. Or en réalité on mesure toujours la valeur $<\Phi,\mu,\Phi>$, ce qui contredit la

T.Q.C, mais est interprété par la T.Q.V.A dans laquelle le moment magnétique μ est une variable absolue.

5e) **Phénomènes quantiques se produisant dans les étoiles.**

Dans la T.Q.C, si on a un phénomène de diffusion ou de désintégration, la nature des produits finaux n'est déterminée que si on les observe. Or on sait que la formation de l'Univers et notamment la formation et la combustion des étoiles sont expliquées par de multiples phénomènes de diffusion et de désintégration, et il est évident que les particules finales de ces phénomènes n'ont en général jamais été observées. Il en résulte que d'après la T.Q.C l'Univers et les étoiles devraient être dans un état indéterminé ce qui n'est pas le cas. Au contraire dans la T.Q.V.A, la nature des particules finales de ces phénomènes est indépendante de leur observation, et on n'a pas ce paradoxe.

5f) **Contradiction des expériences sur l'intrication quantique.**

La T.Q.C est aussi contredite par les expériences connues sous le nom de *delayed choice experiment* qu'on a rappelées au chapitre 3g) sur l'intrication quantique. En effet d'après la T.Q.C l'état d'une particule est déterminé par la dernière observation de la particule ou de sa partcule corrélée lorsqu'elle en a une. Or les expériences du type « delayed choice experiment » [(10)] montrent que l'état d'une particule (sa position sur l'écran) est déterminé par une observation postérieure à son arrivée sur l'écran. Il en résulte que la T.Q.C impose une action du futur sur le passé ce qui est impossible.

Au contraire dans le T.Q.V.A, on a vu que l'état d'une *particule indépendante* qu'on a définie dans la partie 4. comme une particule n'interagissant pas avec d'autres particules pour constituer une autre particule et en absence de choc (atomes indépendants, particules libres..) dépendait du dernier choc qu'elle subissait. Et les propriétés statistiques d'un choc spatial, comme on l' a vu au chapitre 3g) dépendent de tous les dispositifs situés sur la trajectoire de la particule, y compris ceux qu'elle n'a pas encore atteint quand se produit le choc quantique. On a appelé *prédiction quantique* ce phénomène. Ceci est interprété par le fait qu'on associe à toute particule indépendante une particule-onde emplissant tout l'espace. Ainsi dans la T.Q.V.A, les phénomènes liés à l'intrication quantique ou à la prédiction quantique sont dus à des actions physique sur la particule-onde associée à une particule indépendante entraînant une action instantanée sur la particule-corpuscule. On rappelle que ceci est en désaccord avec la Relativité Restreinte mais en accord avec la Théorie de l'Ether [(12)]. Il n'y a donc pas d'action du futur sur le passé dans l'interprétation des expériences d'intrication quantique

par la T.Q.V.A, contrairement à la T.Q.C, ce qui conduit à rejeter la seconde au profit de la première.

On admet donc dans la T.Q.V.A qu'à une particule indépendante on associe une particule-corpuscule localisée et une particule-onde délocalisée, et qu'une action physique sur la particule-onde par des dispositifs non encore atteints par la particule-corpuscule peut entraîner une action instantanée sur la particule-corpuscule.

On voit donc 6 types principaux d'expériences conduisant à rejeter la T.Q.C en faveur de la T.Q.V.A. On rappelle qu'à cause du Principe 3 de la T.Q.V.A le cadre mathématique des 2 théories est identique, en dépit du fait qu'elles sont contradictoires, et que la T.Q.V.A permet d'interpréter rigoureusement et mathématiquement l'ensemble des expériences de physique quantique, que jusque là seule la T.Q.C permettait d'interpréter.

6.CONCLUSION

On voit donc que la T.Q.V.A simplifie beaucoup la compréhension des phénomènes quantiques, tout spécialement en physique des particules. On a vu 6 grands types d'expérience conduisant à rejeter la T.Q.C en faveur de la T.Q.V.A. On a vu dans la partie 3) que d'après la T.Q.V.A, il existait des règles très simples permettant de prévoir que certaines variables physiques sont des variables absolues. Il est clair qu'on doit développer la théorie afin de pouvoir prédire complètement les variables physiques absolues et celles qui sont indéterminées, mais pour cela on doit généraliser les lois exposées dans cet article. D'après ce qui précède le fait qu'une variable soit absolue ou indéterminée peut avoir diverses origines.

Puisqu'à cause du Principe 3b les équations purement quantiques de la T.Q.V.A et de la T.Q.C sont identiques, on ne peut trouver une équation purement quantique existant dans la T.Q.V.A et n'existant pas dans la T.Q.C (ou réciproquement) permettant de comparer leur validité. Cependant on a vu que l'interprétation de ces équations purement quantiques était différente, et c'est donc l'interprétation des équations purement quantiques qui permettent de comparer la validité des 2 théories.

Par contre, on a vu que les équations de la mécanique classique étaient valables dans la T.Q.V.A pour une particule indépendante, alors qu'elles n'étaient pas valides dans la T.Q.C car dans la T.Q.C la position et l'impulsion d'une particule sont indéterminées et ne peuvent être définies simultanément. On a vu que la validité observée expérimentale des équations de la mécanique classique relativiste illustrait la validité de la T.Q.V.A et ne pouvait pas être expliquée par la

T.Q.C. Il en était de même pour les équations mixtes comme celle utilisée dans l'expérience de Stern et Gerlach.

On a vu que les différences entre les 2 théories sont de différentes natures. Ainsi, le concept de choc quantique est fondamental dans la T.Q.V.A alors qu'il n'existe pas dans la T.Q.C. Le concept d'Observable par contre est fondamental dans la T.Q.C, alors qu'il n'est pas utilisé dans la T.Q.V.A. Il en est de même du concept de paquet d'ondes, qui est inutile dans la T.Q.V.A. Les inégalités d'Heisenberg sont analogues dans la T.Q.V.A , mais pas dans la T.Q.C dans laquelle le temps n'est pas une observable. Aussi, l' inégalité spatiale est toujours vraie dans la T.Q.C lors d'une observation de la position ou de l'impulsion d'un système, alors qu'elles ne sont vraies que lors de chocs dans la T.Q.V.A . Enfin, dans la T.Q.V.A, une particule indépendante a 2 natures distinctes, une nature corpuscule et une nature onde, alors qu'on peut considérer qu'elle n'a qu'une nature (onde) dans la T.Q.C car dans cette théorie elle est complètement définie par sa fonction d'onde, la position n'étant qu'une observable ordinaire.

En résumé, la T.Q.V.A est très intéressante car :

a)C'est la seule théorie quantique différente de la T.Q.C permettant d'interpréter tous les phénomènes quantiques.

b)L'interprétation par la T.Q.V.A des équations purement quantiques, de même que les équations de la mécanique relativiste classique et les équations mixtes illustrent la validité de la T.Q.V.A comparée à la T.Q.C. Même si on considère l'interprétation par la T.Q.C des expériences présentées dans la section 4, par exemple celle du chat de Schrodinger, il est évident que l'interprétation de ces expériences par la T.Q.V.A est beaucoup plus simple, claire et naturelle que celle donnée par la T.Q.C.

Références :

1)Ch. Ngo, H.Ngo, *Physique Quantique*, Masson, Paris,(1995)

2)Burckham and Jobes, *Nuclear and Particle Physics*, Ed Longman, Singapore (1997)

3)M.Kaku and J.Thompson, *Beyond Einstein*, Ed Oxford University Press, G.B (1997)

4)Ph.Perez, N.Saint-Cricq-Chery, *Relativité et Quantification*, Ed Masson, Paris (1986)

5)A.S. Tribble, *Princeton Guide to Advanced Physics*, Princeton University Press, New-Jersey.

6)D.Blanc, *Physique Nucléaire, Particules*, Ed Masson, Paris (1995)

7)B.H Brandsen, J.Joachain, *Quantum Mechanics*, Ed Pearson Education, Harlow, England (2000)
8)Alonso, Finn, *Physique Générale 2*, InterEditions, Paris (1992)
9)Franco Selleri, *Le grand débat de la Théorie Quantique*, Ed Flammarion, Paris (1994)
10)Yoon-Ho Kim,R.Yu, S.P Kulik,Y.H Shih,Marlon.O Scully,Phys.Rev.letter, 84,1-5(2000)
11)Weihs,Jennewein,Simon,Weinforter,Anton Zeilinger, *Violation of Bell's inequalities under strict Einstein locality conditions*, Phys.Rev.Letter,81,5039(1998).
12)T.Delort,*Theory of Ether*,Physics Essays,13.4(2000).
13)T.Delort, Théorie moderne de l'Ether (2015) (Extrait du livre Théories d'or, 8e édition, Editions Books on Demand 2015).

3ième THEORIE D'OR.

THEORIE MATHEMATIQUE PLATONISTE.

Auteur :Thierry DELORT.
Date : Mars 2020.

1ier article : **THEORIE MATHEMATIQUE PLATONISTE-THEORIE DES ENSEMBLES.**

2ième article :**LOGIQUE PLATONICIENNE DES PROPOSITIONS**.

TABLE DES MATIERES :

Article : THEORIE MATHEMATIQUE PLATONISTE-THEORIE DES ENSEMBLES
Auteur :Thierry DELORT
Date :13 Septembre 2018
Extrait du livre : Théories d'or 9e édition, Editions Books on Demand, Paris (2017)

RESUME :

Dans cet article, nous présentons une théorie mathématique générale basée sur le Platonisme, appelée TMP (Théorie Mathématique Platoniste), et en particulier la partie de la TMP relative aux fondations des mathématiques et à la Théorie des ensembles. Cette Théorie des ensembles Platoniste, nous conduit à obtenir l'existence au sens Platonicien des concepts de bases en mathématiques, notamment l'ensemble des naturels, l'ensemble de réels, et aussi l'existence d'objets mathématiques identifiés à des corps, des anneaux ou des espaces vectoriels. La TMP est donc fondamentale car elle permet de donner une signification Platoniste à l'ensemble des mathématiques, et donc propose une alternative aux théories mathématiques de logique actuelles basées sur le formalisme.

Nous voyons aussi comment apparaissent naturellement dans cette nouvelle théorie des ensembles Platoniste les paradoxes classiques (de Cantor ou de Russel) et nous exposons comment la TMP résoud ces paradoxes.

A partir des bases de la théorie présentée dans cet article, il est possible de la développer pour obtenir une Théorie Mathématique Platoniste de l'ensemble des mathématiques, et en particulier une Théorie de Logique Platonicienne des propositions, ce qui sera fait dans un second article.

Mots clés :Platonisme -théorie des ensembles- Paradoxes de Cantor et de Russel-fondations des mathématiques.

1.INTRODUCTION

La plupart des mathématiciens ont l'idée d'une existence réelle des mathématiques, mais jusqu'à présent cette conception, le *Platonisme*, était purement philosophique, les théories mathématiques de logique actuelle étant basées sur le formalisme. Le présent article présente une théorie mathématique, et non philosophique, donnant une conception Platoniste des mathématiques. C'est-à-dire qu'elle donne la signification, dans un *Espace Mathématique Platonique* (EMP), des concepts

mathématiques classiques (Ensemble des naturels, des réels, espaces vectoriels…) et des théories mathématiques classiques.

Nous verrons que dans la TMP apparaissent naturellement les paradoxes classiques (de Cantor et de Russel) et comment ils sont résolus par la TMP.

Nous verrons qu'il y a une profonde analogie entre la TMP et la théorie géométrique d'Euclide, celle qui a inspiré Platon, notamment l'existence d'un espace dans lequel existe des objets mathématiques. Mais la TMP est beaucoup plus générale que la théorie d'Euclide, puisqu'elle peut interpréter l'ensemble des mathématiques modernes.

2.AXIOMES DE LA TMP

Le premier Axiome de la TMP est aussi le plus fondamental. Il définit les propriétés principales d'un Espace Mathématique Platonique (EMP) et celles des objets mathématiques.

L' Axiome de base de la TMP est donc :

AXIOME 2.1 :

a) « α est *un objet mathématique* » est équivalent à « α existe dans *l' Espace mathématique Platonique* (EMP) ».

b)Si α est un objet mathématique alors α est *un objet mathématique relationnel* ou (exclusif) *un objet mathématique non-relationnel* ou (exclusif) *un objet mathématique non-relationnel mixte*.

c)Il existe un et un seul objet mathématique non-relationnel α tel que α est l' Espace Mathématique Platonique.

Dans cet article, P1 et P2 étant 2 propositions quelconques, « P1 ou (exclusif) P2 » signifiera : «(P1 ou P2) et Non(P1 et P2) »

En accord avec leur sens intuitif, on verra plus loin que les ensembles et les couples sont par exemple des objets mathématiques non-relationnels, mais que « est élément de » est un objet mathématique relationnel.

Dans l'Axiome précédent « existe » n'est pas un terme propre à la TMP. C'est un concept primitif dont la première signification intuitive est celle qu'il a dans les propositions des théories mathématiques classiques de la forme « Il existe x élément de A » (A étant un ensemble).

Cependant « existe » a une 2ième signification dans la TMP. Ainsi « O_0 existe dans l'EMP » signifie que O_0 *existe dans une réalité abstraite* de la même façon que dans la théorie philosophique du Platonisme, les droites et les cercles *existent dans une réalité abstraite* identifiée avec le plan Euclidien. On verra que la TMP demeure valide même si « existe » a sa signification intuitive classique, mais les Axiomes et la TMP se comprennent avec sa signification dans la TMP.

On définit alors les concepts fondamentaux de la TMP :

AXIOME 2.2 :

a)Si C est *un couple*, alors il existe un et un seul A tel que A est un objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP et il existe un et un seul B tel que B est objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP tels que A *est le premier terme de* C et B *est le deuxième terme de* C.

b)Si A est un objet mathématique non-relationnel différent de l'EMP et B est un objet mathématique non-relationnel différent de l'EMP, alors il existe un et un seul C tel que C est un couple et A est le premier terme de C et B est le deuxième terme de C.

Si C_0 est un couple et A_0 est le premier terme de C_0 et B_0 est le 2ième terme de C_0, on représentera classiquement C_0 par (A_0,B_0).

Une conséquence immédiate de l'Axiome 2.2 est que si C_{01} est un couple et C_{02} est un couple et si le premier terme de C_{01} est identique au 1ier terme de C_{02} et le 2ième terme de C_{01} est identique au 2ième terme de C_{02} alors C_{01} est identique à C_{02}.

L'Axiome précédent est la définition Axiomatique d'un couple.

DEFINITION 2.2A :

Préambule : SEQUENCE FINIE

Par définition, une séquence finie à 2 termes sera un couple. Avant la définition des naturels dans la TMP, « 2 » sera considéré non comme un naturel mais simplement comme un symbole particulier.

Plus généralement, on montrera l'existence (dans l'EMP) d'un objet mathématique non-relationnel identifié avec l'ensemble des naturels **N**, chaque élément de **N** étant identifié avec un objet mathématique.

-Si O_{10},..,O_{n0} sont des objets mathématiques différents de l'EMP (Avec n>2), on montrera aussi l'existence de (O_{10},.,O_{n0}), qui est un objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP et qui sera identifié avec l'ensemble {(1,O_{10}),..,, (n,O_{n0})} et qui sera appelée *séquence finie (à n termes)*.

-Réciproquement on dira qu'un objet mathématique O_0 est une *séquence finie* à n termes s'il existe O_{10},..,O_{n0} objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP tel que O_0=(O_{10},..,O_{n0}).

Cependant, avant d'avoir montré l'existence de **N**, on utilisera seulement des séquences finies à 2 termes.

A)RELATION MIXTE

Par définition, « Un objet mathématique relationnel » aura la même signification qu' *une relation mixte* .

Par définition, si R est *une relation mixte*, pour tout objet mathématique O_0, R(O_0) est vraie ou(exclusif) n'est pas vraie.

-On emploiera la notation R(O_0) pour « La relation mixte R interne de O_0 ».

-Si (O_{01},…O_{0n}) est une séquence finie, on emploiera la notation « R(O_{01},…O_{0n}) » pour « La relation mixte R entre les termes de la séquence finie (O_{01},..,O_{0n}) ».

B)RELATION NON FLOUE.

Une *relation non-floue* est un objet mathématique relationnel (et donc une relation mixte) R défini par les propositions suivantes :

a)Pour tout objet mathématique O_0, R(O_0) est vraie ou n'est pas vraie. On dira que R est *binaire*.

b) Pour tout objet mathématique O_0, R(O_0) n'est pas vraie et non-vraie, on dira que R est *cohérente.*

c)Si un objet mathématique O_0 est tel que R(O_0) est vraie, alors O_0 est un objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP. On dira que R est un objet mathématique relationnel *restreint aux objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP*.

(On admettra Axiomatiquement que toute relation mixte est binaire et cohérente. On dira que toute relation mixte (et donc tout objet mathématique relationnel) est *non-flou*. R(o) étant un objet mathématique relationnel quelconque, on peut définir la *restriction de R(o) aux objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP* R'(o) : « R(o) et o est un objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP »)

d)Si il existe un naturel n, avec n>1, tel que pour tout objet O_0 tel que $R(O_0)$ est vraie, O_0 est une séquence finie de n termes (Ce qui entraine que tout terme de O0 est un objet mathématique non-relationnel), et que de plus il existe un objet mathématique non-relationnel O_0 tel que $R(O_0)$ est vraie, alors on dira que R a pour *ordres de multiplicité* 1 et n. On représentera alors R en utilisant la notation R(o) ou $R(o_1,..,o_n)$.

e)Si R est une relation non-floue, alors « 1 » sera *un ordre de multiplicité* de R qu'on pourra représenter avec la notation R(o).

f)Réciproquement, si R est un objet mathématique relationnel (c'est-à-dire une relation mixte) ayant les propriétés d'un relation non-floue exprimées par les points a),b),c) précédents, alors R est une relation non-floue.

g)On définit la relation non-floue « *relation impossible* » R_{IMP} telle que pour tout objet mathématique O_0, $R_{IMP}(O_0)$ n'est pas vraie. R_{IMP} aura par définition tout n naturel différent de 0 comme ordre de multiplicité.

D'après la définition précédente, toute relation non-floue aura au moins un ordre de multiplicité (« 1 »), et pourra avoir 1,2 ou une infinité d'ordres de multiplicité.

Dans ce premier article, on définira que des relations d'ordres de multiplicité 2 et 1. R étant une relation non-floue d'ordre de multiplicité 2, on écrira en général O_{10} R O_{20} à la place de $R(O_{10},O_{20})$. Par exemple on écrira en accord avec la notation standard « a_0 est élément de A_0 » à la place de « est élément de(a_0,A_0) ».

AXIOME 2.2B :

a) « *est élément de* » est une relation non floue d'ordre de multiplicité 2. (ayant intuitivement le sens de « appartient à »

b)Si A est *un ensemble* et B est *un ensemble*, et si pour tout x tel que x est un objet mathématique « « x est élément de A » est équivalent à « x est élément de B » », alors A est identique à B.

c)Si A est un ensemble et a est élément de A, alors a est un objet mathématique non-relationnel différent de l'EMP.

d)Si A est un ensemble, alors A est un objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP.

L'Axiome précédent est une définition axiomatique partielle d'un ensemble, et de la relation « est élément de ». Elle est partielle car d'autres Axiomes complèteront ces définitions.

AXIOME 2.2C :

a) « *est le premier terme de* » et « *est le* 2ième *terme de* » sont des relations non floues d'ordre de multiplicité 2.

b)Si x est tel que x est un couple, alors x n'est pas un ensemble et x est un objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP.

AXIOME 2.2D :

a)Il existe un et un seul objet mathématique σ tel que (σ est un ensemble et « Pour tout x tel que x est un objet mathématique non-relationnel, x n'est pas élément de σ »).

On dira que σ est *l'ensemble vide* et dans cet article, on le représentera toujours par le symbole σ.

b)Si A est un ensemble et A n'est pas identique à l'ensemble vide, alors il existe x tel que x est un objet mathématique non-relationnel différent de l'EMP et x est élément de A.

L'Axiome précédent est la définition Axiomatique de l'ensemble vide et le b) est une définition axiomatique partielle (complétant les précédentes) d'un ensemble.

REMARQUE 2.2.E :

a)Des propositions vraies peuvent *entraîner* des propositions et à cause de la signification du concept primitif « entraîner », celles-ci sont vraies. On admettra évidemment que les Axiomes et définitions de la TMP sont des propositions vraies.

b)Si une proposition P est entraînée par des propositions $P_1,..,P_n$, on dira que P est *une déduction logique relationnelle* de $P_1,..,P_n$.

c)On verra dans un second article que les Axiomes de la TMP sont équivalents à des relations non-floues et des relations mixtes entre des objets mathématiques. On verra aussi que la quasi-totalité des propositions classiques utilisées en mathématiques (Définitions et Théorèmes) apparaissent comme étant équivalentes à des relations non-floues entre des objets mathématiques non-relationnels et sont des déductions logiques relationnelles des Axiomes de la TMP.

Une conséquence de la Remarque précédente est que des propositions vraies ne peuvent entraîner qu'une relation non-floue n'est pas binaire, ou qu'une relation cohérente n'est pas cohérente. En effet si R est une relation non-floue, alors « R est binaire » et « R est cohérente » sont des propositions vraies.

Nous avons défini plus haut des relations non-floues. On peut généraliser cette définition afin de définir des *définitions non-floues* , des *concepts généraux non-flous* et des *symboles particuliers non-flous*.

DEFINITION 2.3 :

On a les définitions suivantes fondamentales pour la TMP:

a)-Les *symboles particuliers non-flous* et les *concepts généraux non-flous* constituent 2 types (exclusifs) de symboles fondamentaux pouvant être utilisés par une définition ou une proposition et pouvant représenter des objets mathématiques.

-Un *symbole particulier* O est un symbole associé à une proposition du type « O est le symbole particulier associé à une définition $D(o,O_1,..,O_n)$ (ou D(o)) », $O_1,.,O_n$ étant des symboles particuliers pré-définis, O ne pouvant représenter que des objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP.(On emploiera la notation $D(o,O_1,..,O_n)$ pour représenter une définition utilisant les symboles particuliers prédéfinis $O_1,..,O_n$).

-Si une définition n'utilise aucun symbole particulier pré-défini, on dira que c'est une *définition générale* et on la représentera par D(o).
(Par exemple, A et B étant des symboles particuliers prédéfinis on pourra considérer la définition D(o,A,B) : « o est élément de $A \cap B$ ») et les définitions D(o) : « o est un naturel », ou D(o) : « o est un ensemble » seront des définitions générales).

b)D(o) étant une définition générale :
-On dira qu'un objet mathématique O_0 *correspond à la définition* D(o), si on a « D(O_0) est vraie ».

-On dira qu'un objet mathématique O_0 existant dans l'EMP *ne correspond pas à la définition* D(o), si on a Non(« D(O_0) est vraie »).

c)-On dira qu'une définition générale D(o) est *binaire* si pour tout objet mathématique on a ou bien « D(O_0) est vraie » ou bien Non(« D(O_0) est vraie »).
-On dira que la définition générale D(o) *est cohérente* si pour aucun objet mathématique « D(O_0) est vraie » et Non(« D(O_0) est vraie »).
-On dira que D(o) est une définition générale *non-floue* si elle est binaire et cohérente.

d)« O est *un symbole particulier non-flou* associé à D(o) » signifie :

-D(o) est une définition générale non-floue.
-D(o) *est restreinte aux objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP*, c'est-à-dire pour tout objet mathématique O_0, si D(O_0) est vraie alors O_0 est un objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP.

Dans le cas où il existe au moins un objet mathématique O_0 tel que « D(O_0) est vraie » on dira que O est un *concept particulier non-flou*.
On aura alors : « « O *peut représenter* O_0 » est vraie » est équivalent à « D(O_0) est vraie ».

Si O n'est un concept particulier non-flou alors O sera un *symbole particulier non-flou* ne pouvant représenter aucun objet mathématique.

Si O est un *concept particulier non-flou* pouvant représenter un objet O_0, alors on pourra *considérer le cas où il représente* O_0, il représente alors le même objet O_0 partout où il est utilisé.

e)Si D(o) est une définition générale non-floue, on dira que le symbole « un C_1 » est le *concept général non-flou associé* à D(o) si on a :
-D(o) est restreinte aux objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP (définie au d)).
-« « O_0 *appartient au concept général non-flou* « un C_1 » » (On dira aussi « O_0 est un C_1», ou « « un C_1 » *peut représenter* O_0 ») est vraie » est équivalent à « D(O_0) est vraie ».
-Il existe au moins un objet mathématique O_0 tel que O_0 appartient au concept général non-flou « un C_1 ».

Plus généralement on dira que le symbole « un C_1 » est un *concept général non-flou* si :
-Pour tout objet mathématique O_0 « « O_0 appartient au concept général non-flou « un C_1 »est vraie » ou (exclusif » « « O_0 n'appartient pas au concept général « un C_1 »est vraie ».
-Si un objet mathématique O_0 appartient au concept général « un C_1 », alors O_0 est un objet mathématique non-relationnel différent de l'EMP (Sauf si le concept général non-flou « un C_1 » est parmi les 2 concepts généraux non-flous « l'EMP » ou « un objet mathématique non-relationnel).
-Il existe au moins un objet mathématique O_0 tel que O_0 appartient au concept général non-flou « un C_1 ».

D'après sa définition, contrairement aux concepts particuliers non-flous, un *concept général non-flou* pourra toujours représenter les mêmes objets mathématiques quels que soient les objets mathématiques représentés par les concepts particuliers non-flous situés avant son emplacement. De plus on ne pourra pas considérer le cas où il représente un objet mathématique parmi ceux qu'il peut représenter. (Sauf s'il ne peut en représenter qu'un seul).

On verra plus loin que « un ensemble », « **N** » seront identifiés avec des concepts généraux non-flous ».

f)Si « un C_1 » et « un C_2 » sont 2 concepts généraux non-flous on dira que « un C_1 » *est inclus* dans « un C_2 » si tout objet O_0 appartenant au concept général « un C_1 » appartient au concept général « un C_2 ».

g)On définira plus loin dans la TMP des objets mathématiques identifiés aux naturels. Dans toute la partie de l'article antérieure à la définition des naturels dans la TMP , on considérera 1,. ,n non comme des naturels mais comme des signes distinctifs, *un signe distinctif* étant un concept primitif para-mathématique défini

comme étant un symbole permettant de distinguer des propositions, des définitions, des concepts particuliers ou généraux ou des objets mathématiques. Dans certains cas, O_1,.,O_n sont *des concepts particuliers non-flous pouvant représenter simultanément* des objets O_{10},..,O_{n0}:

On rappelle qu'on représente par $D_i(o,O_{i1},.,O_{ik(i)})$ une définition utilisant les symboles particuliers non-flous pré-définis O_{i1},..,$O_{ik(i)}$. En général, on définira successivement les symboles particuliers non-flous O_1,..,O_n par les propositions P_1,..,P_n du type suivant :

P1 : O_1 est le symbole associé à la définition $D_1(o_1)$.
…..
Pout i dans {2,..,n) :
Pi :O_i est le symbole associé à la définition $D_i(o_i,O_{i1},..,O_{ih(i)})$ ou $D_i(o_i)$, avec O_{i1},..,$O_{ih(i)}$ parmi O_1,..,O_{i-1}.

O'_{10},.,O'_{n0} étant des objets mathématiques quelconques, on définit les propositions suivantes $P'1(O'_{10})$,..,$P'n(O'_{n0})$ par :

$P'1(O'_{10})$: $D_1(O'_{10})$
….
Pour i dans {2,..,n} :
$P'i(O'_{i0})$:$D_i(O_{i0},O'_{i10},..,O'_{ih(i)0})$ (ou $D_i(O'_{i0})$).

On dira que O_1,..,O_n sont des concepts particuliers non-flous si on a *:*

O_1 est un concept particulier non-flou (défini précédemment) et :

Pour tout i dans {2,..,n}, pour tous O'_{10},..,O'_{i-10} tels que $P'1(O'_{10})$,..,$P'i-1(O'_{i-10})$ sont vraies :

(i)Pour tout O_0 objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP $D_i(O_0,O'_{i10},..,O'_{ih(i)0})$ est vraie ou(exclusif) n'est pas vraie. (On dira que les définitions $D_i(o_i,.)$ sont *non-floues*).

(ii)Pour tout O_0 objet mathématique si $D_i(O_0,O'_{i10},..,O'_{ih(i)0})$ est vraie alors O_0 est un objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP. (On dira que les définitions $D_i(o_i,.)$ sont *restreintes aux objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP*).

(iii)Il existe O_0 tel que $P'i(O_0)$:$D_i(O_0,O'_{i10},..,O'_{ih(i)0})$ est vraie.

$O_{10},.,O_{n0}$ étant des objets mathématiques, on dira que $O_1,..,O_n$ sont *des concepts particuliers non-flous pouvant représenter simultanément* $O_{10},.,O_{n0}$ si $O_1,..,O_n$ sont des concepts particuliers non-flous et que de plus $P'1(O_{10}),..,P'n(O_{n0})$ sont vraies.

Alors on aura de plus par définition pour {k(1),..,k(s)} inclus dans {1,.,n} $O_{k(1)},..,O_{k(s)}$ pourront représenter simultanément $O_{k(1)0},..,O_{k(s)0}$.

Par définition, réciproquement, k(1),..k(s) étant dans {1,..,n}, {t(1),..,t(n-s)} étant l'ensemble {1..,n}/{k(1),..,k(s)}, $O_{k(1)0},..,O_{k(s)0}$ étant des objets mathématiques, $O_{k(1)},..,O_{k(s)}$ pourront représenter simultanément $O_{k(1)0},..,O_{k(s)0}$ s'il existe des objets $O_{t(1)0},..,O_{t(n-s)0}$ tels que $O_1,..,O_n$ peuvent représenter simultanément $O_{10},.,O_{n0}$.

On rappelle qu'avant la définition de **N**, on considèrera les symboles 1,..,n utilisés précédemment comme indices non comme des naturels mais comme des signes distinctifs. s(1),..,s(p) étant des signes distinctifs, on a employé la notation « s est dans {s(1),..,s(p)} » pour « s est un signe distinctif parmi s(1),..,s(p) ».

h)On a vu précédemment que si O était le symbole particulier non-flou associé à une définition génerale non-floue D(o), et si O pouvait représenter un objet O_0, alors on pouvait considérait le cas où O représente O_0.

De la même façon si $O_1,..,O_n$ sont des concepts particuliers non-flous pouvant représenter simultanément $O_{10},.,O_{n0}$ (définis au g), on pourra considérer le cas où $O_1,..,O_n$ *représentent simultanément* $O_{10},..,O_{n0}$.

On donne alors les définitions suivantes, compatibles avec celles données au point g) précédent :

On rappelle qu'on emploie la notation $D(o,O_1,..,O_n)$ pour représenter une définition utilisant les symboles particuliers (définis en 2.3) prédéfinis $O_1,..,O_n$.

- $O_1,.,O_n$ étant des concepts particuliers non-flous ,on dira que $D(o,O_1,..,O_n)$ est une *définition non-floue* si pour tous $O_{10},..,O_{n0}$ pouvant être représentés simultanément par $O_1,.,O_n$ et pour tout objet mathématique O_0, $D(O_0,O_{10},.,O_{n0})$ est vraie ou (exclusif) n'est pas vraie.

-$O_1,.,O_n$ étant des concepts particuliers non-flous, on dira que $D(o,O_1,..,O_n)$ est *restreinte* aux objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP, si pour tous $O_{10},..,O_{n0}$ pouvant être représentés simultanément par $O_1,..,O_n$, si

$D(O_0,O_{10},..,O_{n0})$ est vraie alors O_0 est un objet mathématique relationnel et différent de l'EMP.
- $O_1,.,O_n$ étant des concepts particuliers non-flous $D(o,O_1,..,O_n)$ étant une définition non-floue restreinte aux objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP, on poura définir un *symbole particulier non-flou* par la proposition :

« $O(O_1,..,O_n)$ (noté aussi « O ») est le symbole particulier associé à $D(o,O_1,..,O_n)$ ».

-Alors, si pour tous $O_{10},..,O_{n0}$ pouvant être représentés simultanément par $O_1,..,O_n$, il existe au moins un objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP O_0 tel que $O(O_{10},..,O_{n0})$ peut représenter O_0, alors on dira que $O(O_1,.,O_n)$ est un *symbole particulier non-flou* qui est *un concept particulier non-flou*. On a alors, pour tous $O_{10},..,O_{n0}$ pouvant être représentés simultanément par $O_1,..,O_n$, dans le cas où $O_1,..,O_n$ *représentent simultanément* $O_{10},..,O_{n0}$ « $O(O_1,..O_n)$ (noté $O(O_{10},..,O_{n0})$) *peut représenter* O_0 » est équivalent à « « $D(O_0,O_{10},..,O_{n0})$ est vraie ».

Si pour tous $O_{10},..,O_{n0}$ pouvant être représentés simultanément par $O_1,..,O_n$, alors $O_1,..,O_n$ représentant simultanément $O_{10},..,O_{n0}$, O peut représénter un unique objet, alors on dira que O *est défini uniquement en fonction de* $O_1,..,O_n$. On généralise cette définition $O_1,..,O_n$ étant des concepts particuliers non-flous quelconques pré-définis.
-Par définition, si O est un symbole particulier non-flou qui n'est pas un concept particulier non-flou, il ne pourra représenter aucun objet mathématique.

Par exemple si A est le concept particulier non-flou associé à $D(o_A)$: « o_A est un ensemble », on peut définir le symbole particulier non-flou b (noté aussi b(A)) associé à la définition $D(o_b,A)$: « o_b est élément de A ». b n'est pas un concept particulier non-flou car pour A représentant l'ensemble vide, il n'existe pas d'objets pouvant être représenté par b. Et donc d'après la définition précédente b ne pourra représenter aucun objet mathématique.

On dira qu'une définition $D(o,O_1,..,O_n)$ a pour *paramètres fixes* $O_1,..,O_n$ et que $O(O_1,..,O_n)$ est *défini en fonction* des symboles particuliers non-flous $O_1,..,O_n$. Un même concept particulier non-flou pourra être défini en fonction de différents ensembles de symboles particuliers non-flous.

REMARQUE 2.4 :

a)Par exemple si $O(O_1,..,O_n)$ est un concept particulier non-flou associé à une définition non-floue $D(o,O_1,.,O_n)$, alors si $O_1,..,O_n$ *peuvent représenter simultanément* les objets mathématiques $O_{10},..,O_{n0}$ et si $O(O_{10},.,O_{n0})$ peut

représenter O_0, alors $O_1,..,O_n,O(O_1,.,O_n)$ *peuvent représenter simultanément* $O_{10},..,O_{n0},O_0$.

b)Si un concept général non-flou est associé à une définition, celle-ci sera toujours une définition générale.

c)Dans certains cas, un concept général non-flou « un C_1 » peut être partiellement défini en utilisant des Axiomes (Par exemple « un ensemble », « un couple »,l'EMP..). Au contraire,un symbole particulier non-flou sera toujours associé à une définition du type D(o) ou $D(o,O_1,..,O_n)$.

f)On emploiera en général la notation « un(le)(la)(l') C_1 », c'est-à-dire utilisant un article, pour représenter un concept général non-flou. (Par exemple « un corps », « un objet mathématique non-relationnel », « un espace vectoriel..). **N**,**Q**,**R** seront aussi identifiés à des concepts généraux non-flous représentant chacun un unique objet non-relationnel (un ensemble), ce qui se justifie car par exemple **N** est « l'ensemble des naturels », **Q** est « l'ensemble des rationnels »…De plus, tous les symboles représentant le même objet mathématique dans tous les textes seront considérés comme des concepts généraux(Par exemple 1,2,13..). On rappelle qu'on doit toujours définir si un symbole est identifié avec un symbole particulier non-flou ou est identifié avec un concept général non-flou, car les 2 notions sont exclusives par définition.

g)Il est fondamental de distinguer un objet mathématique non-relationnel O_0, O_0 étant identifié à un objet mathématique non-relationnel, d'un concept non flou O qui est un symbole pouvant représenter certains objets mathématique non-relationnels. Pour éviter la confusion, on mettra l'indice « 0 » à un symbole identifié à un objet mathématique. Cependant, si un concept général peut représenter un seul objet, alors on identifiera ce concept avec l'objet unique qu'il représente, sans mettre l'indice « 0 » (Par exemple **N**,**Z**.)

h)D'après la définition précédente, un concept particulier non-flou ne pourra jamais représenter l'EMP ni un objet mathématique relationnel et les seuls concepts généraux non-flous pouvant représenter l'EMP seront les chaînes de caractères « l'EMP » et « un objet mathématique non-relationnel ».

i)On a supposé implicitement qu'on emploie toujours un nouveau symbole pour définir un nouveau concept particulier ou général non-flou.

j)On peut facilement généraliser la définition d'un concept général non-flou en définissant des concepts généraux relationnels non-flous (pouvant représenter seulement des objets mathématiques relationnels), non-relationnels mixtes non-flous (pouvant représenter seulement des objets mathématiques non-relationnels mixtes) ou mixtes non-flous (pouvant représenter tout type d'objet mathématique).
De même on peut généraliser la définition d'un concept particulier non-flou en définissant des concepts particuliers relationnels non-flous ou non-relationnels mixtes non-flous ou mixtes non-flous.

Nous recherchons maintenant un Axiome permettant d'obtenir qu'une définition D(o) (ou $D(o,O_1,..,O_n)$) est non-floue. (On rappelle qu'on utilisera l'expression $D(o,O_1,..,O_n)$ pour représenter une définition utilisant les symboles particuliers non-flous prédéfinis $O_1,..,O_n$). Avant de proposer un tel Axiome, nous alons donner des définitions de propositions et de définitions fondamentales qu'on a appelées *proposition mathématique simple* et *définition mathématique simple*.

On admet l'Axiome suivant concernant les concepts mathématiques fondamentaux de la TMP :

AXIOME 2.4A :

Les symboles composés « un ensemble (suivi éventuellement de « non vide ») », « un objet mathématique non-relationnel (suivi éventuellement de « différent de l'EMP »)», « l'ensemble vide » , « un couple » sont des concepts généraux non-flous.

Les symboles « est élément de », « est le 1^{ier} (ou le 2ième) terme de », « est identique à (implicitement : « un objet mathématique non-relationnel ») (représenté souvent par «= ») » sont des chaines de caractères (appelées *concepts relationnels généraux*) représentant chacune une unique relation non-floue d'ordre de multiplicité 2.

REMARQUE 2.4B :

a)On remarque que la proposition « R représente une unique relation non-floue. » signifie que non seulement R peut représenter un seul objet mathématique reationnel (considéré comme concept général relationnel) mais aussi que celui-ci est un unique objet de l'EMP.

b)On remarque que la proposition « « un C_1 » est un concept général non-flou » est équivalente à la proposition « « est un C_1 » est une relation non-floue qui n'est pas la relation impossible ».

En utilisant l'Axiome précédent, on peut définir une définition mathématique simple et une proposition mathématique simple :

DEFINITION 2.5 :

I)DEFINITION MATHEMATIQUE SIMPLE ET DEFINITION INTERNE AUXILIAIRE.

A)1)Une définition D(o) (ou $D(o,O_1,..,O_n)$) sera une *définition mathématique simple* si :
(i)Elle est restreinte aux objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP.
(ii)$O_1,.,O_n$ sont des concepts particuliers non-flous.
(iii)Elle utilise seulement :
-Les concepts particuliers non-flous prédéfinis $O_1,\dots,O_n$.
- « o ».
-Des *concepts primitifs relationnels* ayant leur signification usuelle parmi : « pour tout », « Il existe (suivi éventuellement d' « un et un seul ») , « est », « appartient au concept général » , « tel que », « Non », « et », «ou », « si…,alors », « est équivalent à ».
-Des *symboles de ponctuation* « virgule (« , »), « parenthèses » (« (« et «) »), « point » (« . »), « guillemets » (« « » et « » »), accolades («{» et « } »), « blanc » .
-Des concepts généraux non-flous (Notamment ceux de l'Axiome 2.4A).
-Des concepts relationnels généraux représentant chacun une unique relation non-floue (Notamment ceux de l'Axiome 2.4A).

-Des nouveaux symboles (noté B ou C_m) chacun étant associé à une définition dite *définition auxiliaire* par une expression du type :
« B est le symbole particulier associé à la définition auxiliaire de niveau 0 $D_{auxI}(o_b,P_1,..,P_q)$ (ou $D_{auxI}(o_b,o,P_1,..,P_q)$) (ou une définition analogue n'utilisant pas $P_1,.,P_q$) » ou « C_m est le symbole particulier (défini en fonction de $o_0,o_1,..,o_{m-1}$) associé à la définition auxiliaire (de niveau m) D_{auxIm} (o_m, $o_{s1},..,o_{st}$, $Q_1,..,Q_r$) (ou une définition analogue n'utilisant pas $o_{s1},..,o_{st}$, $Q_1,..,Q_r$). ».

Si on connaît la chaîne de caractère représentée par « D_{auxIm} (o_m, $o_{s1},..,o_{st}$, $Q_1,..,Q_r$) », en la représentant par « « D_{auxIm} (o_m, $o_{s1},..,o_{st}$, $Q_1,..,Q_r$) » », on utilisera

l'expression : « C_m est le symbole particulier (défini en fonction de $o_0,o_1,..,o_{m-1}$) associé à la définition auxiliaire (de niveau m) D_{auxIm} (o_m, $o_{s1},..,o_{st}$, $Q_1,..,Q_r$) : « D_{auxIm} (o_m, $o_{s1},..,o_{st}$, $Q_1,..,Q_r$). » »

On dira que B (ou C_m) est un *nouveau symbole particulier* associé à la définition auxiliaire $D_{auxI}(o_b,P_1,..,P_q)$ (ou D_{auxIm} (o_m, $o_{s1},..,o_{st}$, $Q_1,..,Q_r$)).

On appellera les propositions précédentes *définition* de B(ou de C_m) (dans $D(o,O_1,..,O_n)$). Dans une définition mathématique simple 2 définitions de symboles particuliers ne pourront utiliser le même symbole comme symbole particulier qu'elles définissent.

Les *définitions auxiliaires* sont définies comme suit :

2)DEFINITIONS AUXILIAIRES :

SYMBOLES PARTICULIERS NON-FLOUS

On a défini en 2.3 un *symbole particulier non-flou* comme un symbole particulier associé à une *définition non-floue* $D(o,O_1,.,O_n)$, avec $O_1,..,O_n$ concepts particuliers non-flous pré-définis. On généralise cette définition en admettant que si $O_1,..,O_n$ sont des symboles particuliers non-flous pré-définis non nécessairement des concepts particuliers non-flous, $D(o,O_1,.,O_n)$ est aussi une *définition non-floue*.

Si O est un symbole particulier associé à une définition non-floue $D(o,O_1,.,O_n)$, O sera par définition *un symbole particulier non-flou*. Mais si l'un des O_i n'est pas un concept particulier non-flou, alors par définition O ne pourra représenter aucun objet mathématique.

Un symbole particulier sera ou bien associé à une définition mathématique simple ou bien à une définition auxiliaire contenue par une définition mathématique simple.

DEFINITION RESTREINTE

$O_1,..,O_n$ étant des concepts particuliers non-flous, on a déjà défini en 2.3 une définition $D(o,O_1,.,O_n)$ *restreinte* aux objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP. On généralise et on complète cette définition en admettant que $O_1,..,O_n$ étant des symboles particuliers non-flous pré-définis, l'un d'entre eux n'étant pas un concept particulier non-flou, alors $D(o,O_1,.,O_n)$ est aussi *restreinte* aux objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP.

On admettra que par définition, une définition auxiliaire contenue par une proposition mathématique simple est restreinte aux objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP.

a)CAS PARTICULIERS DE DEFINITIONS AUXILIAIRES

Une définition mathématique simple peut donc utiliser des nouveaux symboles associés à des *définitions auxiliaires* et pouvant être de différents types :
(On représentera les nouveaux symboles associés à des définitions par des majuscules. On écrira aussi parfois « symbole associé à une définition auxiliaire » au lieu de « symbole particulier associé à une définition auxiliaire »).

(i)Un symbole particulier B associé à une définition auxiliaire (dite de niveau 0) $D_{auxI}(o_b,P_1,..,P_q)$ (ou $D_{auxI}(o_b,o,P_1,..,P_q)$ ou une définition analogue n'utilisant pas $P_1,..,P_q$), avec :
-$P_1,.,P_q$ sont parmi $O_1,..O_n$.
-La définition de B n'est contenue dans aucune définition auxiliaire.
On dira que $D_{auxI}(o_b,P_1,..,P_q)$ (ou $D_{auxI}(o_b,o,P_1,..,P_q)$) est une définition auxiliaire de niveau 0 *interne* à D(o).

(ii) Un symbole particulier B associé à une définition auxiliaire (dite de niveau 0) $D_{auxI}(o_b,P_1,..,P_q)$ (ou $D_{auxI}(o_b,o,P_1,..,P_q)$), avec :
-$P_1,.,P_q$ sont des symboles parmi $O_1,..O_n$ ou sont associés à une définition auxiliaire interne de niveau 0, leur définition précédant celle de B.
-La définition de B n'est contenue dans aucune définition auxiliaire.
On dira que $D_{auxI}(o_b,P_1,..,P_q)$ est une définition auxiliaire de niveau 0 *interne* à D(o).

(iii)Une définition mathématique simple D(o) (ou $D(o,O_1,..,O_n)$) pourra utiliser un nouveau symbole T à l'intérieur d' une définition auxiliaire contenue dans D(o) (ou $D(o,O_1,..,O_n)$) ou à l'extérieur de toute définition auxiliaire contenue dans D(o) (ou $D(o,O_1,..,O_n)$) .

Par définition, une définition mathématique simple D(o) (ou $D(o,O_1,..,O_n)$) ne pourra utiliser un nouveau symbole T à l'extérieur de toute définition auxiliaire que dans le cas suivant :

-T est un symbole particulier associé à une définition auxiliaire de niveau 0, sa définition précédant son utilisation.

(iv)La définition auxiliaire *de niveau* 0 d'un symbole particulier B telle que définie en (ii) pourra contenir un nouveau symbole C, (dit *défini en fonction de* o_b), associé à une définition auxiliaire (dite *de niveau* 1) de type $D_{auxI1}(o_c,o_b,P_1,.,P_q)$, (ou de type $D_{auxI1}(o_c,P_1,.,P_q)$ ou de type $D_{auxI1}(o_c,o_b,o,P_1,.,P_q)$ ou de type $D_{auxI1}(o_c,o,P_1,.,P_q)$ ou une définition analogue n'utilisant pas $P_1,..,P_q$), (dite *définition auxiliaire interne à la définition de* B), avec :

-Il n'existe pas de nouveau symbole particulier K dont la définition est contenue dans la définition auxiliaire de niveau 0 considérée et contient la définition de C.

-$P_1,..,P_q$ sont :
Ou bien parmi $O_1,..,O_n$.
Ou bien associés à des définitions auxiliaires de niveau 0 leur définition précédant celle de C.
Ou bien sont des symboles particuliers définis en fonction de o_b et associés à une définition auxiliaire de niveau 1, leur définition précédant celle de C.

C étant associé à une définition auxiliaire contenue par D(o) (ou $D(o,O_1,..,O_n)$), on dira qu'un symbole particulier D est *pré-défini au sens strict avant* C si D est parmi $O_1,..,O_n$ ou si dans D(o) (ou $D(o,O_1,..,O_n)$) la définition de D précède celle de C. On dira que D *est pré-défini au sens large* avant C si D est pré-défini au sens strict avant C dans D(o) (ou $D(o,O_1,..,O_n)$)ou si la définition de D contient celle de C, D étant différent de C.

Dans cet article, nous utiliserons des définitions auxiliaires de niveau maximal 1. On n'utilisera donc pas la définition générale des définitions auxiliaires suivante.

b)CAS GENERAL DES DEFINITIONS AUXILIAIRES

Plus généralement, on définit par récurrence une définition auxiliaire de niveau m dans D(o) (ou $D(o,O_1,..,O_n)$) :

(j)Une *définition auxiliaire interne* à une définition auxiliaire de niveau m-1 est une définition auxiliaire de niveau m.
(jj)Supposons que C_{m-1} est un symbole défini en fonction de $o_0,o_1,..,o_{m-2}$ associé à une définition auxiliaire de niveau m-1 $D_{auxm-1}(o_{m-1}, o_{r1},\ldots o_{rk},P_1,\ldots,P_q)$.

On admet que par définition, une définition auxiliaire contenue par une proposition mathématique simple est restreinte aux objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP.

Alors $D_{auxm-1}(o_{m-1}, o_{r1},\ldots o_{rk},P_1,\ldots,P_q)$ pourra contenir un symbole particulier C_m (défini en fonction de $o_0,o_1,..,o_{m-1}$) et associé à une définition auxiliaire (dite *de niveau* m et *interne* à la définition de C_{m-1}) D_{auxm} $(o_m, o_{s1},..,o_{st}, Q_1,..,Q_r)$, avec :

-Il n'existe pas de nouveau symbole particulier K dont la définition est contenue dans la définition auxilliaire associée à C_{m-1} et contient la définition de C_m.

-$o_{s1},..,o_{st}$ sont parmi $o,o_0,.,o_{m-1}$. (Par convention, si l'un des o_{si} est identique à « o », ce sera o_{s1} et si « o_{si} » est différent de « o » , alors C_{si} est le symbole particulier à une définition auxiliaire de niveau si $D_{auxsi}(o_{si},..)$.

-$Q_1,..,Q_r$ sont des symboles particuliers pré-définis au sens strict avant C_m et :
Ou bien sont parmi $O_1,\ldots,O_n$ ou bien sont des symboles associés à des définitions interne à D(o) de niveau 0 ou bien sont tels que pour tout i dans {1,..,r} Q_i est un symbole particulier associé à une définition auxilliaire interne de niveau k(i) inférieur ou égal à m et défini en fonction de $o_0,o_1,..,o_{k(i)-1}$.

On dira alors que $C_0,\ldots,C_{m-1}$, $Q_1,..,Q_r$ sont des *symboles particuliers pré-définis au sens large* pouvant être utilisés à l'emplacement de D_{auxm} $(o_m, o_{s1},..,o_{st}, Q_1,..,Q_r)$.

Dans le cas d'une définition D(o) (ou $D(o,O_1,..,O_n)$) ,O_0 étant un objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP, cela signifiera que dans $D(O_0)$ ou dans $D(O_0,O_{10},..,O_{n0})$, C_m est le symbole particulier associé à D_{auxIm} $(o_m, C_{s1},..,C_{st}, Q_1,..,Q_r)$. Les C_{si} dépendent alors de $O_0,O_{10},..,O_{n0}$. On aura C_{s1} est identique à O_0 si o_{s1} est identique à o.

Une définition auxiliaire de niveau m-1 $D_{auxm-1}(o_{m-1}, o_{r1},\ldots o_{rk},P_1,\ldots,P_q)$ pourra utiliser un nouveau symbole particulier T de la définition mathématique simple considérée D(o) à l'intérieur d'une définition auxiliaire qu'elle contient ou à l'extérieur de toute définition auxiliaire qu'elle contient.

Par définition, une définition auxiliaire interne de niveau m-1 $D_{auxm-1}(o_{m-1}, o_{r1},\ldots o_{rk},P_1,\ldots,P_q))$ ne pourra utiliser un nouveau symbole particulier T à l'extérieur de toute définition auxilliaire qu'elle contient que dans les cas suivants :

-T est parmi $P_1,..,P_q$.
-T est un symbole particulier associé à une définition auxilliaire de niveau m interne à $D_{auxm-1}(o_{m-1}, o_{r1},\ldots o_{rk},P_1,\ldots,P_q)$.

Une définition auxiliaire pourra aussi utiliser les concepts primitifs relationnels, les concepts généraux non-flous et les symboles représentant une unique relation non-floue que peut utiliser une définition mathématique simple.

Dans une définition mathématique simple, un même symbole ne pourra être associé à 2 définitions auxiliaires distinctes.

B)INTERPRETATION PLATONISTE D'UNE DEFINITION MATHEMATIQUE SIMPLE.

On conserve les notations du A) du cas général des définitions auxiliaires.
Supposons que dans une définition mathématique simple, on ait l'expression :
Exp1 : « C_m (est le) symbole particulier associé à D_{auxIm} (o_m, o_{s1},..,o_{st}, Q_1,..,Q_r) ».
Par convention, C_m aura exactement la même signification que défini dans l'expression Exp2 :
Exp2: « C_m est le symbole particulier associé à D_{auxIm} (o_m, C_{s1},..,C_{st}, Q_1,..,Q_r) ».(Avec C_{s1} est identique à o si o_{s1} est identique à o).

D_{auxIm} (o_m, o_{s1},..,o_{st}, Q_1,..,Q_r) et à D_{auxIm} (o_m, C_{s1},..,C_{st}, Q_1,..,Q_r) seront les 2 types de *définition auxiliaire* qu'on pourra utiliser dans une définition mathématique simple. Si C_m est défini par une expression de type Exp1 ou Exp2, on dira qu'il est *explicitement associé à une définition auxiliaire*. Utilisant une expression de type Exp1 ou Exp2, on devra nécessairement avoir les chaines de caractères « D_{auxIm} (o_m, o_{s1},..,o_{st}, Q_1,..,Q_r) : » et « D_{auxIm} (o_m, C_{s1},..,C_{st}, Q_1,..,Q_r) : » suivies par les chaînes de caractères qu'elles représentent.

Par convention, C_m étant défini par l'expression Exp2 ou Exp1, C_m aura la même signification que défini par l'expression Exp3 :
Exp3: « C_m est tel que D_{auxIm} (o_m, C_{s1},..,C_{st}, Q_1,..,Q_r) ».(Avec C_{s1} est identique à o si o_{s1} est identique à o).

Une expression de type Exp3 pourra donc être utilisée dans une définition mathématique simple. On dira alors que C_m est *implicitement associé à une définition auxiliaire*.

Les expressions précédentes seront en accord avec les règles suivantes dans une définition mathématique simple :
-Dans l'expression Exp1, par convention, le symbole « o_{si} » aura la même signification que le symbole « C_{si} » (Sauf « o_{s1} » si « o_{s1} » est identique à « o »), sauf à l'intérieur d'expressions de type Exp2 ou Exp3 contenue par Exp1 où on devra utiliser uniquement le symbole « C_{si} ». De plus on ne pourra utiliser l'expression de type Exp1 que si C_{s1},..,C_{st} sont explicitement associés à des définitions auxiliaires.

-On pourra utiliser une expression de type Exp2 $C_{s1},.,Q_r$ étant des symboles particuliers non-flous pré-définis au sens large pouvant être utilisés à son emplacement, qu'ils soient implicitement ou explicitement associés à une définition auxilaire. Dans l'expression Exp2, par convention le symbole « o_m » aura la même signification que le symbole « C_m » sauf à l'intérieur d'expression de type Exp2 ou Exp3 qu'elle contient strictement où on devra utiliser seulement le symbole « C_m » (et non « o_m»).
- On pourra utiliser une expression de type Exp3 $C_{s1},.,Q_r$ étant des symboles particuliers non-flous pré-définis au sens large pouvant être utilisés à son emplacement, qu'ils soient implicitement ou explicitement associés à une définition auxilaire. Dans l'expression de type Exp3, on devra toujours utiliser les symboles $C_m,C_{s1},..,C_{st}$ (Et non o_m, $o_{s1},..,o_{st}$).

Et donc $D_1(o,O_1,..,O_n)$ étant une définition mathématique simple, on pourra toujours obtenir à partir de celle-ci une définition $D_2(o,O_1,..,O_n)$ dans laquelle tous les nouveaux symboles particuliers sont explicitement associés à des définitions auxiliaires et qui a exactement la même signification que $D_1(o,O_1,..,O_n)$. On dira alors que $D_2(o,O_1,..,O_n)$ est une *définition mathématique simple primitive*, qu'on appellera une *interprétation Platoniste* de $D_1(o,O_1,..,O_n)$.

Réciproquement pour montrer qu'une définition $D_1(o,O_1,.,O_n)$ est une définition mathématique simple, il suffira d'obtenir à partir de celle-ci une définition mathématique simple primitive $D_2(o,O_1,.,O_n)$ interprétation Platoniste de $D_1(o,O_1,.,O_n)$.

Dans la section suivante nous allons voir que dans une définition mathématique simple l'utilisation des symboles de ponctuation et des concepts primitifs relationnels doit obéir à des règles, dites *règles de ponctuation* et *règles d'utilisation des concepts relationnels primitifs* dans une définition ou une proposition mathématique simple.

II)PROPOSITION MATHEMATIQUE SIMPLE

A)INTERPRETATION PLATONISTE D'UNE PROPOSITION MATHEMATIQUE SIMPLE.

Une proposition P (ou $P(O_1,..,O_n)$) sera une *proposition mathématique simple* si elle utilise les mêmes termes et obéit aux mêmes règles que ceux d' une définition mathématique simple $D(o,O_1,..,O_n)$ telle que définie en I)A, excepté le symbole « o ». Et donc dans $P(O_1,..,O_n)$ pourra utiliser des nouveaux symboles

associés à des définitions auxiliaires, celles-ci étant définies de la même façon que dans le cas d'une définition mathématique simple .

De la même façon qu'une définition mathématique simple, une proposition mathématique simple $P_1(O_1,.,O_n)$ pourra utiliser des symboles particuliers *implicitement* associés à des définitions auxiliaires. On définit aussi de façon analogue au cas d'une définition mathématique simple *l'interprétation Platoniste* d'une proposition mathématique simple.

B)REGLES DE PONCTUATION ET D'UTILISATION DES CONCEPTS RELATIONNELS PRIMITIFS, DES CONCEPTS GENERAUX ET DES RELATIONS NON FLOUES.

Une définition ou une proposition mathématique simple devra respecter des règles, dites *règles de ponctuation d'une définition ou d'une proposition mathématique simple*.

On appellera *proposition auxiliaire (d'une proposition ou d'une définition mathématique simple)* une chaîne de caractères utilisées dans une proposition ou une définition mathématique simple. Elle devra donc être en accord avec la définition d'une définition ou d'une proposition mathématique simple.

a)REGLES DE PONCTUATION ET DES PROPOSITIONS AUXILIAIRES.

Les expressions « virgule », « point », « parenthèse », « accolade » désigneront des symboles en caractères « ordinaires », et donc ni « exposant » ni « indice ».

(i)Si dans la proposition ou la définition mathématique simple considérée on a un nouveau symbole particulier x qui est associé implicitement à une définition auxiliaire de type $D_{aux}(o_x,o_{s1},..,o_{sk}, A_1,.,A_p)$, alors on aura nécessairement des guillemets autour de « $D_{aux}(x, C_{s1},..,C_{sk}, A_1,.,A_p)$ » dans une expression du type « x (est) tel que « $D_{aux}(x, C_{s1},..,C_{sk}, A_1,.,A_p)$ » » (Les C_{sj} étant des symboles particuliers pré-définis au sens large pouvant être utilisés dans la définition auxiliaire considérée, C_{s1} pouvant cependant être identique à « o » dans une définition mathématique simple « D(o) »), sauf dans le cas où « $D_{aux}(x, C_{s1},..,C_{sk}, A_1,.,A_p)$ » ne contient pas de concepts primitifs relationnels (« tel que », « et »…) ni aucun symbole ponctuation « point » ou « guillemet » ni « virgule suivi du symbole « blanc » » et de plus est suivie immédiatement par un concept primitif relationnel ou par un symbole de ponctuation « point » ou « guillemet » ou « « virgule » suivi du symbole « blanc » » (On dira alors que « $D_{aux}(x, C_{s1},..,C_{sk}, A_1,.,A_p)$ » est du type P_{AR}) car dans ce cas on pourra omettre les guillemets autour

de « $D_{aux}(x, C_{s1},..,C_{sk}, A_1,.,A_p)$ » en conservant par convention la même signification et de même dans 2 autres cas (du type P_{AE} ou P_{AT}) que l'on définira dans le paragraphe suivant. On rappelle qu'on mettra aussi nécessairement des guillements autour de « $D_{aux}(o_x,o_{s1},..,o_{sk}, A_1,.,A_p)$ » dans une expression du type « x est le symbole particulier associé à $D_{aux}(o_x,o_{s1},..,o_{sk}, A_1,.,A_p)$: « $D_{aux}(o_x,o_{s1},..,o_{sk}, A_1,.,A_p)$ » » .

On aura aussi nécessairement des guillemets autour d'une proposition auxiliaire « $P(x_1,..,x_k,B_1,..,B_p)$» (Les B_i étant des symboles particuliers non-flous pré-définis au sens large pouvant être utilisés à l'emplacement de la proposition auxiliaire considérée, mais un B_i pourra être identique à « o » dans une définition mathématique simple « D(o) » ou à o_x ou o_{ij} dans une définiton auxiliaire $D_{aux}(o_x,o_{s1},..,o_{sk}, D_1,.,D_p)$), dans une proposition auxiliaire du type P_{AT} : « Pour tout x_1 tel que « $D_1(x_1,A_{11},..,A_{1r(1)})$ » ,..,pour tout x_k tel que « $D_k(x_k,A_{k1},..,A_{kr(k)})$ » , « $P(x_1,..,x_k,B_1,..,B_p)$», » ou du type P_{AS} : « Si x_1 est tel que « $D_1(x_1,A_{11},..,A_{1r(1)})$ » ,.., x_k est tel que « $D_k(x_k,A_{k1},..,A_{kr(k)})$ », alors « $P(x_1,..,x_k,B_1,..,B_p)$» » (pour j parmi 2,..k, $A_{j1},.,A_{jr(j)}$ symboles particuliers pré-définis au sens large pouvant être utilisés dans les définitions auxiliaires considérées et donc aussi être parmi $x_1,..,x_{j-1}$, mais l'un d'eux pouvant être identique à « o » dans une définition mathématique simple D(o) ou à o_x ou o_{sj} dans une définition auxiliaire) à l'exception des 2 cas suivants :

(j) : « $P(x_1,..,x_k,B_1,..,B_p)$» ne contient aucun concept primitif relationnel ni aucun symbole de ponctuation « guillemet » ou « point suivi du symbole « blanc » » ou « virgule suivi du symbole « blanc » » et est précédée et suivie immédiatement par un concept primitif relationnel ou par un symbole de ponctuation « guillemet » ou « point » ou « virgule suivi du symbole « blanc » ». On dira alors que cette proposition auxiliaire est du type P_{AR}.

(jj) « $P(x_1,..,x_k,B_1,..,B_p)$» est du type P_{AT} ou (défini plus haut) ou P_{AE} : «Il existe (suivi éventuellement de « un et un seul ») x_1 tel que « $P(x_1,B_1,..,B_p)$» ».

On admettra en effet que d'après les règles de ponctuation les propositions auxiliaires de type P_{AR}, P_{AT}, P_{AE} ont par convention la même signification avec des guillemets comme premier et dernier symbole que sans guillemets. On mettra aussi nécessairement des guillemets autour d'une proposition du type P_{AS} définie plus haut (Si x_1 est tel que..,..,alors..)). On admettra aussi que P_A étant une proposition auxiliaire, « « P_A » » (entourée de 2 paires de guillemets) a la même signification que « « P_A » » (entourée d'une seule paire de guillemets).

D'après les règles de ponctuation précédente, on pourra omettre les guillemets autour de « $D_{aux}(x, C_{s1},..,C_{sk}, A_1,.,A_p)$ » dans une expression du type « x (est) tel que « $D_{aux}(x, C_{s1},..,C_{sk}, A_1,.,A_p)$ » », si « $D_{aux}(x, C_{s1},..,C_{sk}, A_1,.,A_p)$ » est du type P_{AT}, P_{AE} ou P_{AR}.

(ii)$P(A_1,..,A_p)$ et $Q(B_1,..,B_k)$ étant des propositions auxiliaires *indépendantes*, (C'est-à-dire que les A_i et les B_i sont des symboles particuliers non-flous pré-définis au sens large pouvant être utilisés au début des propositions auxiliaires composées considérées, ce qui impose qu'aucun des B_i ne peut être défini dans $P(A_1,..,A_p)$, mais un B_i ou un A_i pourra être identique à « o » dans une définition mathématique simple « D(o) », ou à « o_x », « o_{s1} », .., « o_{sk} », dans une définition auxiliaire « $D_{aux}(o_x,o_{s1},..,o_{sk}, D_1,.,D_p)$ »), on aura nécessairement des guillemets au début et à la fin des propositions auxiliaires du type : , « « $P(A_1,..,A_p)$ » ou (ou « et » ou « , », ou « est équivalent à ») « $Q(B_1,..,B_k)$ » », « si « $P(A_1,..,A_p)$ » alors « $Q(B_1,..,B_k)$ » ». On mettra aussi des guillemets autour de « $P(A_1,..,A_p)$ » et de « $Q(B_1,..,B_k)$ » sauf si ces propositions sont du type P_{AR}, P_{AE} ou P_{AT} , d'après les règles de ponctuation données en (i). On admettra aussi que, P_A étant une proposition auxiliaire, « «Non(« P_A »)» » (avec des guillemets), a la même significationque «Non(« P_A ») » (sans guillemets mais nécessairement des guillemets autour de « P_A », même si P_A est du type P_{AR}, P_{AE}, ou P_{AT}). De plus, $P_{A1},..,P_{Ak}$ étant des propositions auxiliaires indépendantes (avec k>2), on pourra utiliser la proposition « « P_{A1} »et..et « P_{Ak} » » et la proposition « « P_{A1} »ou..ou « P_{Ak} » ». Par convention la proposition « « P_{A1} »,.., « P_{Ak-1}» et « P_{Ak} » » (remplaçant tous les symbole « et » sauf le dernier par le symbole de ponctuation « virgule ») aura la même signification que « « P_{A1} »et..et « P_{Ak-1} » et « P_{Ak} » ».

On pourra omettre les guillements autour d'une expression du type précédent si cette expression constitue la totalité de la proposition mathématique simple considérée.

(iii)Les guillemets ouverts («) » et fermés (»), employés par la proposition mathématique simple considérée P_i seront utilisés seulement dans des expressions du type précédent ((i) et (ii)). Ils détermineront le début et la fin d'une proposition ou d'une définition auxiliaire (sauf dans les exceptions exposées en (i) et (ii) où elles seront implicites), qui nécessairement contiendra le même nombre de guillemets ouverts que de guillemets fermés. En effet d'après les règles de ponctuation, si une proposition auxiliaire contient une partie d'une proposition ou d'une définition auxiliaire Q_{aux}, alors elle contiendra nécessairement toute la proposition auxiliaire Q_{aux}. On pourra considérer que P_i elle-même est une proposition auxiliaire. Donc une proposition auxiliaire sera ou bien identique à P_i ou bien utilisée dans une expression du type de celles introduites en (i) et (ii).

(iv)Le symbole « point » sera le dernier symbole élémentaire de P_i et ne pourra être utilisé que dans ce cas et des cas définis par des règles définissant une proposition mathématique simple. (Celles-ci pourront être modifiées et complétées).

(v)Les symboles de ponctuation « parenthèses » et « virgule » seront utilisés ou bien dans les expressions du type précédent (i) et (ii), ou bien dans une expression du type $x(O_1,..,O_n)$, x étant un symbole particulier associé à une définition mathématique simple ou une définition auxiliaire $D(o,O_1,..,O_n)$ (Le symbole « x » étant choisi par convention sans contenir les symboles « virgule » ou « point » ou « parenthèse » ou « blanc »), ou dans des expressions de type $E(O_1,..,O_n, C_1,..,C_p)$, contenant au moins un « O_i » ou un « C_i » et pouvant se réduire à « O_1 » ou à « C_1 », avec :

-$O_1,..,O_n$ symboles particuliers pré-définis par des définitions auxiliaires ou par des définitions mathématiques simples ou du type « o » dans une définition mathématique simple D(o,..) ou du type o_i ou o_{ij} dans une définition auxiliaire $D_{auxi}(o_i,o_{i1},..,o_{is(i)},..)$, et $C_1,..,C_p$ concepts généraux non-flous pouvant représenter un unique objet.

- $E(O_1,..,O_n, C_1,..,C_p)$ ne contient aucune relation non-floue ni concept primitif relationnel ni symboles de ponctuation excepté des symboles « parenthèses » ou « virgule » ou « accolades » ni symboles « blanc » ni le symbole « point » si celui-celui-ci est le dernier symbole de $E(O_1,..,O_n, C_1,..,C_p)$. S'il est utilisé dans une expression du type précédent, ou bien il sera contenu dans un symbole concept général non-flou de type « $._{ind}$ » ou bien il pourra être identifié avec un tel concept général d'après les *règles syntaxiques de convention symbolique*. (Notamment pour représenter le « produit scalaire » classique).

- $E(O_1,..,O_n, C_1,..,C_p)$ est immédiatement précédé d'un symbole « blanc » ou d'un symbole représentant une unique relation non-floue ou d'un « guillemet ouvert » et est immédiatement suivi d'un symbole représentant une unique relation non-floue ou d'un symbole parmi « blanc » ou « point » ou « guillemet fermé » ou « virgule », celle-ci étant suivi d'un symbole « blanc ».

-Si $E(O_1,..,O_n, C_1,..,C_p)$ contient une parenthèse ouverte « (», elle contiendra nécessairement une unique parenthèse fermée «) », postérieure à la précédente, les 2 parenthèses contenant le même nombre de parenthèses ouvertes que de parenthèses fermées. On dira que de telles parenthèses *se correspondent*. Toute parenthèse contenue par $E(O_1,..,O_n, C_1,..,C_p)$ aura nécessairement une unique parenthèse lui correspondant et contenue par $E(O_1,..,O_n, C_1,..,C_p)$.

-On définit de façon analogue au point précédent 2 symboles de ponctuation « accolades » (« { » ou « } ») qui *se correspondent*. Toute accolade contenue par $E(O_1,..,O_n, C_1,..,C_p)$ aura nécessairement une accolade lui correspondant, unique et contenue par $E(O_1,..,O_n, C_1,..,C_p)$.

-Tout symbole de ponctuation « virgule » contenu par $E(O_1,..,O_n, C_1,..,C_p)$ appartiendra ou bien à 2 parenthèses qui se correspondent ou bien à 2 accolades qui se correspondent contenues par $E(O_1,..,O_n, C_1,..,C_p)$ sauf s'il est suivi d'un caractère « indice ».

- $E(O_1,..,O_n, C_1,..,C_p)$ peut contenir un certain type de concept général non-flou, appelé « fonction-concept », (ex. U, ∩, Im, *F*..) qu'on définira plus loin.
-Dans le cas où $E(O_1,..,O_n, C_1,..,C_p)$ contient un nombre décimal (concept général correspondant à sa définition classique), de partie entière a et de partie décimale b, on le représentera par « $a,_D b$ » (Avec l'indice « D » au symbole « virgule »), afin que ce symbole soit distinct du symbole « virgule » utilisé entre 2 parenthèses ou 2 accolades qui se correspondent.

Alors des règles, appelées *règles syntaxiques de convention (symbolique)*, permettront dans certains cas d'identifier $E(O_1,..,O_n, C_1,..,C_p)$ avec un symbole particulier non-flou associé implicitement à une définition auxiliaire ou avec un concept général non-flou pouvant représenter un unique objet. Dans tous les autres cas, par définition, $E(O_1,..,O_n, C_1,..,C_p)$ sera identifié à un symbole particulier non-flou ne pouvant représenter aucun objet mathématique. Par exemple, d'après les règles syntaxiques de convention (symbolique), on pourra identifier $(C_1,..,C_p)$ avec un concept général non-flou pouvant représenter un unique objet et si $O_1,..,O_n$ sont des concepts particuliers non-flous $(O_1,..,O_n, C_1,..,C_p)$ avec un concept particulier non-flou et dans les autres cas $(O_1,..,O_n, C_1,..,C_p)$ avec un symbole particulier non-flou ne pouvant représenter aucun objet mathématique.

(vi) Les symboles de ponctuation « accolades » seront utilisés ou bien dans des expressions $E(O_1,.,O_n,C_1,.,C_p)$ définies précédemment, ou bien dans des propositions auxiliaires de type : « S={x tel que P(x,..)} ». Nous donnerons plus loin la signification de cette proposition auxiliaire qui coïncide avec sa définition classique.

b)REGLES D'UTILISATION DES CONCEPTS PRIMITIFS RELATIONNELS

Des *règles d'utilisation des concepts primitifs relationnels* détermineront l'emploi des ces derniers dans une proposition mathématique simple. En particulier :
(j)Les concepts primitifs « Non », « et », « ou », « si..,alors », « tel que », « est équivalent à » seront utilisés seulement dans des propositions auxiliaires du type de celles introduites en (i) et (ii).
(jj) « Pour tout » et « Il existe » seront utilisés seulement dans des propositions auxiliaires du type suivant ou ayant par convention la même signification :
-« Pour tout x_1 tel que « $D_1(x_1,A_{11},..,A_{1r(1)}$ »,..,pour tout x_k tel que « $D_k(x_k,A_{k1},..,A_{kr(k)}$ », « $P(x_1,..,x_k,B_1,..,B_p)$», ».
-« Il existe (un et un seul) x tel que « $P(x,B_1,..,B_p)$ »».

Par exemple, x étant un symbole jamais utilisé et A un symbole particulier pouvant représenter seulement des ensembles, « Si x est élément de A » aura par convention la même signification que « si x est tel que x est élément de A » et « pour tout x élément de A » que « Pour tout x tel que x est élément de A ». Si B est un ensemble jamais encore utilisé, « Si B est un ensemble (non vide) » aura la même signification que « Si B est tel que B est un ensemble (non vide) ».

c)REGLES D'UTILISATION DES CONCEPTS GENERAUX

Si « un(e) C_{1G} » est un concept général non-flou pouvant représenter au moins 2 objets mathématiques (« un(e) C_{1G} » n'étant pas une fonction-concept, type de concept général non-flou qu'on définira plus loin) est utilisé dans une proposition ou une définition mathématique simple, alors « un C_{1G} » sera nécessairement utilisé dans une proposition auxiliaire du type « $E(O_1,..,O_n, C_1,..,C_p)$ est (ou « appartient au concept général ») un C_{1G} » ($E(O_1,..,O_n, C_1,..,C_p)$ défini en a)v)).

Si F_C est une fonction-concept, F_C sera utilisé seulement dans une expression du type $E(O_1,..,O_n, C_1,..,C_p)$ telle qu'on l'a défini en a)v) ou dans une proposition auxiliaire du type « $E(O_1,..,O_n, C_1,..,C_p)$ appartient au concept général F_C. »

d)REGLES D'UTILISATION DES RELATIONS NON FLOUES.

Tout concept relationnel R représentant une unique relation non-floue d'ordre de multiplicité maximal s utilisé dans une proposition mathématique simple le sera dans une proposition auxiliaire de type (ou ayant la même signification d'après les *règles syntaxiques de convention* (voir a)v))que) : « $R(E_1(O_{11},..,O_{1n(1)}, C_{11},..,C_{1p(1)}) ,..,E_s(O_{s1},..,O_{sn(1)}, C_{s1},..,C_{sp(s)}))$ », les $E_j(O_{j1},..,O_{jn(1)}, C_{j1},..,C_{p1p(j)})$ étant des expressions définies précédemment dans la section a)v), sauf dans certains cas définis par les règles syntaxiques de convention comme par exemple « = » dans la proposition auxiliaire de type « $S =\{x \text{ tel que } P(x,O_{11},.,O_{1n(1)})\}$ » ou dans une proposition auxilaire du type «$a_1Ra_2R..Ra_n$ », R étant une relation non-floue d'ordre de multiplicité 2 et transitive. (ex. >, <, =, …). Cependant d'après les règles syntaxiques de convention les propositions auxilaires précédentes auront la même signification que des propositions auxiliaires en accord avec les Règles d'utilisation des relations non-floues.

Réciproquement, une expression du type $E(O_1,..,O_n, C_1,..,C_p)$ sera nécessairement utilisée dans une proposition auxiliaire concernée par les règles précédentes d'utilisation des relations non-floues et des concepts généraux non-floues ou s'il se réduit à O_1 dans une proposition auxiliaire de type ou ayant la signification de « O_1 (ou $(O_1,.,O_k)$) est tel que $D(O_1,..,)$ ».

Une proposition ou une définition mathématique simple pourra donc contenir une expression du type précédent, « R » étant précédé du symbole « blanc » et les symboles « virgule » séparant les $E_j(O_{j1},..,O_{jn(1)}, C_{j1},..,C_{p1p(j)})$ étant les seules qui n'appartiennent pas à 2 accolades ou à 2 parenthèses qui se correspondent exceptées les parenthèses se correspondant contenant tous les $E_j(O_{j1},..,O_{jn(1)}, C_{j1},..,C_{p1p(j)})$ c'est-à-dire celle précédée immédiatement de « R » et celle suivie immédiatement de « guillemet » ou « point ». On a donc un nouveau cas d'utilisation du symbole de ponctuation « parenthèse ».

Cependant on n'utilisera pas en général et notamment dans nos 2 articles de telles expressions, car R sera toujours d'ordre de multiplicité 2, et on utilisera la règle syntaxique de convention que si a et b sont 2 symbole particuliers non-flous ou concepts généraux représentant un unique objet, « aRb » a la même signification que « R(a,b) ».

C) $P(O_1,.,O_n)$ étant une proposition mathématique simple, « $P(O_1,..,O_n)$ est vraie » signifie :
(i)$O_1,..,O_n$ sont des concepts particuliers non-flous.
(ii)Pour tous $O_{10},..,O_{n0}$ pouvant être représentés simultanément par $O_1,..O_n$, $P(O_{10},..,O_{n0})$ est vraie.

D)D(o) étant une définition mathématique simple générale, O_0 étant un objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP, par définition, « $D(O_0)$ est vraie » est équivalent à « $D(O_0)$ est une proposition mathématique simple vraie », identifiant O_0 avec le concept particulier non-flou pouvant représenter seulement O_0.
On généralise ceci au cas d'une définition de la forme $D(o,O_1,.,O_n)$.

D'après la signification du concept primitif « tel que », si $D(o,O_1,..,O_n)$ est une définition mathématique simple, alors la proposition « x est le concept particulier associé à la définition $D(o,O_1,..,O_n)$ sera équivalente à ce que la proposition $P(O_1,.,O_n)$: « x est tel que $D(x,O_1,..,O_n)$ » soit une proposition mathématique simple vraie. « x est le symbole particulier associé à $D(o,O_1,..,O_n)$ et x n'est pas un concept particulier non-flou » sera équivalent à « $P(O_1,.,O_n)$ n'est pas une proposition mathématique simple vraie ».

III)PROPOSITION MATHEMATIQUE SIMPLE VRAIE

Préambule :
(i)D'après la définition d'une proposition mathématique simple $P(O_1,.,O_n)$ (et notamment le fait qu'elle peut utiliser des symboles particuliers associés à des définitions auxiliaires en dehors de toute définition seulement si ces symboles

particuliers sont associés à des définitions auxiliaires de niveau 0), on remarque que le fait que $P(O_1,..,O_n)$ soit vraie dépend seulement de $O_1,..,O_n$ et des objets mathématiques pouvant être représentés par les symboles particuliers associés à des définitions auxiliaires de niveau 0 contenues dans $P(O_1,.,O_n)$.

(ii)Considérons une proposition mathématique simple contenant la définition d'un symbole particulier B associé à une définition auxiliaire de niveau 0 $D(o_B,P_1,.,P_p)$. On remarque que B est *complètement déterminé* (C'est-à-dire s'il est un concept particulier non-flou et dans ce cas les objets mathématiques qu'il peut représenter) par $P_1,.,P_p$. De plus, si $D(o_B,P_1,..,P_n)$ contient la définition d'un symbole particulier H_i associé à une définition auxiliaire $D_{auxHi}(o_{Hi}, H_{i1},..,H_{ip(i)})$, H_i est *complètement déterminé* par $H_{i1},..,H_{ip(i)}$. Il en résulte H_i est *complètement déterminé* par $P_1,..,P_p$.

A)PROPOSITIONS INDEPENDANTES-PROPOSITIONS IRREDUCTIBLES-REGLE DES PROPOSITIONS AUXILIAIRES INDEPENDANTES.

a)P1 et P2 étant 2 propositions mathématiques simples,on dira que P1 et P2 sont *indépendantes* si P2 n'utilise aucun symbole particulier non-flou défini dans P1 et réciproquement. On remarque que si P1 et P2 sont 2 propositions mathématiques simples indépendantes, alors « Si « P1 » alors « P2 » » est à cause de la signification du concept primitif « si..alors » équivalent à « « P2 » ou Non(P1) ».De même on peut exprimer « « P1 » est équivalent à « P2 » » en utilisant les concepts primitifs « ou », « et », « Non ». En particulier, si P1 est une proposition ne contenant aucune définition auxiliaire, elle sera indépendante relativement à toutes les autres propositions.

P étant une proposition mathématique simple, on dira que P est *irréductible au sens strict* si P n'est pas exprimée sous la forme « « P1 » ou « P2 » », « « P1 » et « P2 » », « Non(P1) », « « P1 » est équivalent à « P2 » », ou « si « P1 » alors « P2 » »,P1 et P2 étant des propositions mathématiques simples indépendantes .

On admet alors comme évident (Ce qu'on pourra vérifier sur toutes les propositions mathématiques simples) que toute proposition mathématique simple $P(O_1,.,O_n)$ ou bien est irréductible au sens strict ou bien s'exprime sous la forme de k propositions mathématiques simples indépendantes irréductibles au sens strict P1,.,Pk et des concepts primitifs « si..alors », « ou », « Non », « et », « est équivalent à ». Si $O_{10},.,O_{n0}$ sont des objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP, on obtiendra alors les valeurs de vérité de $P(O_{10},..,O_{n0})$ en utilisant les tables de vérité classiques.

On dira que toute proposition mathématique simple s'exprimant sous la forme de k propositions mathématiques simples irréductibles au sens strict et indépendantes entre elles et du seul concept primitif « et » est *irréductible au sens larg).* De plus par définition toute proposition mathématique simple irréductible au sens strict est *irréductible au sens large*.

La proposition « Si x est tel que x est élement de **N**, alors x a un successeur dans **N** » est irréductible, car « x est tel que x est élément de **N** » et « x a un successeur dans **N** » ne sont pas indépendantes.

On aura la règle suivante fondamentale dans une proposition mathématique simple concernant les propositions auxiliaires :

b)REGLES DES PROPOSITIONS AUXILIAIRES INDEPENDANTES.

Si une proposition ou une définition mathématique simple utilise des propositions auxiliaires P1 et P2 et des concepts primitifs relationnels parmi « et », « ou », « si..,alors », « est équivalent à » pour la définir elle-même ou pour définir une autre proposition auxiliaire, alors P1 et P2 seront nécessairement indépendantes, sauf dans le cas d'une proposition auxilaire obtenue du type « Si x_1 est tel que $D_1(x_1,.,),.., x_n$ est tel que $D_n(x_n,.)$, alors $P(x_1,.,x_n,..)$ » .

B)DEFINITIONS AUXILIAIRES IRREDUCTIBLES

Considérons une proposition mathématique simple irréductible $P(O_1,..,O_n)$, supposons que $I_1,..,I_k$ sont les nouveaux symboles associés à des définitions internes de niveau 0 qu'elle contient. Le fait que $P(O_1,..,O_n)$ soit vraie ou ne soit pas vraie est complètement déterminé par les objets mathématiques pouvant être représentés par $I_1,.,I_k$, ces derniers étant déterminés par les définitions auxiliaires contenues par $P(O_1,..,O_n)$. Celles-ci déterminent aussi si $I_1,.,I_k$ sont des concepts particuliers non-flous.

On admettra que par définition d'une proposition vraie si $P(O_1,..,O_n)$ est une proposition irréductible vraie alors $I_1,.,I_k$ sont nécessairement des concepts particuliers non-flous.

Supposons que l'un des I_j, noté B, soit un symbole associé à la définition auxiliaire de niveau 0 $D_{auxB}(o_b, F_{B1},..,F_{Bp(B)})$, $I_{B1},..,I_{Bk(B)}$ étant les symboles associés à des définitions auxiliaires de niveau 1 internes à $D_{auxB}(o_b, F_{B1},..,F_{Bp(B)})$. Alors comme dans le cas précédent si $F_{B10},.,F_{Bp(B)0}$ et O_0 sont des un objets mathématiques et si $D_{auxB}(O_0, F_{B10},..,F_{Bp(B)0})$ est une proposition irréductible vraie, alors dans $D_{auxB}(O_0, F_{B10},..,F_{Bp(B)0})$ $I_{B1},..,I_{Bk(B)}$ sont nécessairement des concepts particuliers non-flous. De plus si $D_{auxB}(O_0, F_{B10},..,F_{Bp(B)0})$ est une proposition

irréductible on dira que $D_{auxB}(o_b, F_{B1},..,F_{Bp(B)})$ est *une définition auxiliaire irréductible.*

On généralise la définition précédente au cas de n'importe lequel nouveau symbole G_m associé à une *définition auxiliaire irréductible* de niveau nv(m) contenue dans $P(O_1,.,O_n)$ notée $D_{auxm}(o_m,H_{m1},.,H_{mp(m)})$ et contenant les définitions au sens large des symboles $I_{m1},..,I_{mk(m)}$ associés à des définitions auxiliaires de niveau nv(m)+1 internes à $D_{auxm}(o_m,H_{m1},.,H_{mp(m)})$.

REMARQUE :

On peut montrer facilement par récurrence à l'aide des définitions précédentes que si $P(O_1,.,O_n)$ est une proposition mathématique simple irréductible contenant les nouveaux symboles $G_1,.,G_m$, tous associés à des définitions auxiliaires irréductibles, alors $G_1,..,G_m$ sont nécessairement des concepts particuliers non-flous.

Par souci de simplicité, on considèrera en général seulement des définitions mathématiques simples et des propositions mathématiques simples irréductibles vraies dont toute les définitions auxiliaires sont irréductibles.

C)ORDINATION DES DEFINITIONS AUXILIAIRES

On peut ordonner les définitions auxiliaires dans une définition ou une proposition mathématique simple selon leur ordre d'apparition. D'après les définitions des définitions auxiliaires, les symboles particuliers au sens large pouvant être utilisés à l'emplacement d'une définition auxiliaire $D_{auxm}(o_m,\ldots)$ seront associés à des définitions auxilaires dont le numéro d'ordre d'apparition précède le numéro d'ordre d'apparition de $D_{auxm}(o_m,..)$. On pourra utiliser ces numéros d'ordre pour démontrer par récurrence ds propriétés des définitions auxiliaires.

Afin de pouvoir obtenir facilement les symboles particuliers au sens large pouvant être utilisés à l'emplacement d'une définition auxiliaire, on pourra repérer chaque définition auxilaire par une séquence finie de naturels définie comme suit :

A la définition auxiliaire de niveau 0 apparaissant la première on attribuera la séquence finie (0,1). A la définition auxilaire de niveau 0 qui est la ième par ordre d'apparition on attribuera la séquence finie (0,i).

Supposons qu'on ait attribué à chaque définition auxiliaire de niveau m une séquence de type $(m,n_1,.,n_{m+1})$. Alors on attribuera à chaque définition auxiliaire de niveau m+1 une séquence finie $(m+1,n_1,..,n_{m+2})$ si cette définition auxilaire est interne à la définition auxiliaire de niveau m repérée par la séquence $(m,n_2,\ldots,n_{m+2})$ qui est la n1ième par ordre d'apparition.

Nous pouvons maintenant proposer l'Axiome simple et fondamental suivant :

AXIOME 2.5A :

Toute proposition mathématique simple est non-floue. (Ce qui entraîne immédiatement :Toute définition mathématique simple est non-floue.)

JUSTIFICATION DE L'AXIOME 2.5A-AXIOME 2.5AI :

On peut justifier l'Axiome 2 .5A de la façon suivante :
D_{auxIm} (o_m, o_{s1},..,o_{st}, Q_1,..,Q_r) étant une définition auxiliaire, on dira qu'elles est *non-floue au sens large* si pour tout O_{10},…,O_{r+t+10} objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP, on a D_{auxIm}(O_{10},…,O_{r+t+10}) est non-floue c'est-à-dire est vraie ou(exclusif) n'est pas vraie. On admet alors l'AXIOME 2.5AI :

« P(O_{10},..,O_{n+10}) étant une proposition mathématique simple, O_{10},..,O_{n+10} étant des objets mathématiques non-relationnels (identifiant O_{i0} avec le concept particulier non-flou pouvant représenter seulement O_{i0}), alors si P(O_{10},..,O_{n+10}) ne contient aucune définition auxilaire ou si toutes les définitions auxilaires internes à P(O_{10},..,O_{n+10}) (donc ce niveau 0) sont des définitions non-floues au sens large, alors P(O_{10},..,O_{n+10}) est vraie ou(exclusif n'est pas vraie ».

D(o,O_1,..,O_n) étant une définition mathématique simple, O_{10},.,O_{n0} pouvant être représentés simultanément par O_1,..,O_n et O_0 étant un objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP, on considère la proposition mathématique simple D(O_0,O_{10},..,O_{n0}). Dans cette proposition, on considère les définitions auxiliaires ne contenant pas de définitions auxilaires, et soit M le niveau maximal des définitions auxilaires considérées. Soit D_{auxIM} (o_M, C_1,..,C_p) une définition auxiliaire de niveau maximal m et donc ne contenant pas de définitions auxiliaires internes. Si M=0, d'après l'Axiome 2.5AI, D(O_0,O_{10},..,O_{n0}) est vraie ou (exclusif) n'est pas vraie. Si M>0, C_0, C_{10},..,C_{p0} étant des objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP, on peut idendifier D_{auxM}(C_0,..,C_{p0}) avec une proposition mathématique simple ne contenant aucune définition auxiliaire interne et donc d'après l'Axiome 2.5AI, D_{auxIM} (C_0,.,C_{p0}) est non-floue et donc D_{auxM}(o_M,C_1,..,C_p) est non-floue au sens large. D_{auxM-1}(o_{M-1},D_1,..,D_r) étant une définition auxiliaire de niveau M-1, D_0,D_{10},..,D_{r0} étant des objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP, on peut identifier D_{auxM-1}(D_0,..,D_{r0}) avec une proposition mathématique simple ne contenant aucune définition auxiliaire interne ou avec une proposition mathématique simple dont toutes les définitions internes de niveau 0 sont non-

floues au sens large et donc d'après l'Axiome 2.5AI $D_{auxM-1}(D_0,.,D_{r0})$ est non-floue et donc $D_{auxM-1}(o_{M-1},D_1,..,D_r)$ est non-floue au sens large. On montre de la même façon par une récurrence inversée que toutes les définition auxiliaires de $D(O_0,O_{10},..,O_{n0})$ sont non-floues au sens large. Appliquant ce résultat aux définitions auxiliaires de niveau 0 de $D(O_0,O_{10},.,O_{n0})$ on obtient d'après l'Axiome 2.5AI que $D(O_0,O_{10},..,O_{n0})$ est non-floue, et il en résulte $D(o,O_1,.,O_n)$ est non-floue. On montre de la même façon qu'une proposition mathématique simple $P(O_1,..,O_n)$ est non-floue.

On aurait donc pu admettre l'Axiome 2.5AI et obtenir l'Axiome 2.5A comme Théorème.

Une définition auxiliaire est donc définie par son expression et par les définitions auxiliaires qu'elle contient. Considérons par exemple un symbole particulier C_m associé à une définition auxiliaire D_{auxIm} $(o_m, D_1,.,D_p)$. Soit M le niveau maximal des définitions auxiliares qu'elle contient. Pour définir D_{auxIm} $(o_m, D_1,.,D_p)$, on définit pour tous $D_0,D_{10},..,D_{p0}$ objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP $D_{auxm}(D_0, D_{10},..,D_{p0})$. Pour cela on commence par définir pour toute définition auxiliaire de niveau M $D_{auxM}(o_M,E_1,..,E_r)$ qu'elle contient (qui ne contiennent pas de définitions auxiliaires internes), pour tous $E_0,E_{10},..,E_{r0}$ objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP $D_{auxM}(E_0,E_{10},..,E_{r0})$. Puis par une récurrence inversée, pour toute définition auxiliaire $D_{auxi}(o_i, F_1,..,F_s)$ contenue dans $D_{auxm}(o_m,D_1,..,D_p)$, pour tous objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP $F_0,F_{10},..,F_{s0}$ on définit $D_{auxi}(F_0,F_{10},..,F_{s0})$, et enfin pour tous $D_0,D_{10},.,D_{p0}$ objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP $D_{auxm}(D_0,..,D_{p0})$. On peut alors grâce à ces définitions définir complètement C_m et tous les nouveaux symboles particuliers définis dans $D_{auxm}(o_m,D_1,..,D_p)$.

REMARQUE 2.5B :

a) L'intérêt d'exprimer une définition ou une proposition sous la forme d'une définition mathématique simple primitive ou d'une proposition mathématique simple primitive telles que définies en 2.5IA et en 2.5IIA est d'une part parceque cela permet de justifier qu'elles sont non-floues en utilisant l'Axiome 2.5A, mais aussi parceque cela permet de mettre en évidence explicitement tous les symboles particuliers non-flous qu'elles utilisent et plus généralement d'obtenir leur interprétation dand la TMP. C'est pourquoi on a appelé ces dernières *interprétation Platoniste*.

b)p étant un naturel supérieur ou égal à 2, on emploiera la notation $D((o_1,..,o_p), O_1,..,O_n)$, ou $D(o_1,..,o_p, O_1,..,O_n)$, utilisant les symboles particuliers non-flous pré-définis $O_1,..,O_n$ et telle que pour tous $O_{10},.,O_{n0}$ pouvant être représentés

simultanément par $O_1,..,O_n$, pour tous objets mathématiques $C_{10},.,C_{p0}$, si $D(C_{10},..,C_{p0},O_{10},\ldots,O_{n0})$ est vraie, $(C_{10},..,C_{p0})$ est nécessairement une séquence finie à p termes ,c'est-à-dire comme on le verra plus loin, $C_{10},..,C_{p0}$ sont des objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP.

Par définition, $D((o_1,..,o_p), O_1,..,O_n)$, sera une *définition mathématique simple* si elle utilise les mêmes termes que peut utiliser une définition mathématique simple $D(o, O_1,..,O_n)$, remplaçant « o » par « $o_1,..,o_p$ ». On dira alors que $D(o_1,..,o_p, O_1,..,O_n)$ est *une définition mathématique simple séquentielle.*

$O_{10},..,O_{n0}$ pouvant être représentés simultanément par $O_1,..,O_n$ et $C_{10},..,C_{p0}$ étant des objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP, on peut identifier $D(C_{10},..,C_{p0}, O_{10},..,O_{n0})$ à une proposition mathématique simple utilisant les concepts particuliers pré-définis $C_{10},..,C_{p0}$, $O_{10},..,O_{n0}$ (avec pour i parmi 1,..,p C_{i0} identifié avec le concept particulier non-flou pouvant reprsenter seulement C_{i0} et de même pour O_{j0}). Et donc on aura toujours $D(C_{10},..,C_{p0}, O_{10},..,O_{n0})$ est vraie ou n'est pas vraie d'après l'Axiome 2.5A. On dira que $D(o_1,..,o_p, O_1,..,O_n)$ est *non-floue.*

On pourra donc utiliser une proposition de la forme :
« $(C_1,..,C_p)$ est le symbole particulier associé à $D(o_1,..,o_p, O_1,..,O_n)$ »

Par définition $(C_1,.,C_p)$ et $C_1,.,C_p$ seront des concepts particuliers non-flous si pour tous $O_{10},..,O_{n0}$ pouvant être représentés simultanément par $O_1,.,O_n$, il existe $C_{10},..,C_{p0}$ tels que à $D(C_{10},..,C_{p0}, O_{10},..,O_{n0})$ est vraie. Si tel n'est pas le cas, par définition, pour tous $O_{10},.,O_{n0}$ représentés simultanément par $O_1,..,O_n$, $(C_1,..,C_p)$, $C_1,..,C_p$ ne pourront représenter aucun objet mathématique.

On peut de même généraliser la définition d'une définition auxiliaire de niveau m, en définissant une définition auxiliaire séquentielle de niveau m de type : D_{auxIm} $(o_{m1},..,o_{mp}, o_{s1},..,o_{st}, Q_1,..,Q_r)$.

On peut aussi généraliser la définition donnée en 2.5 en définissant un symbole particulier $(C_{m1},..,C_{mp})$ *implicitement* ou *explicitement* associé à une définition auxiliaire séquentielle D_{auxIm} $(o_{m1},\ldots,o_{mp}, o_{s1},..,o_{st}, Q_1,..,Q_r)$.

Cependant, il sera toujours possible d'éviter l'utilisation d'une définition mathématique simple séquentielle ou une définition auxiliaire séquentielle. En effet, considérons par exemple une définition mathématique simple séquentielle $D_1(o_1,..,o_p, O_1,..,O_n)$.

Supposons qu'on ait défini $(C_1,..,C_p)$ par la proposition :
« $(C_1,.,C_p)$ est le symbole particulier associé à $D_1(o_1,..,o_p, O_1,..,O_n)$ ».
Considérons alors la définition $D_2(o, O_1,..,O_n)$: «o est une séquenceà p termes (p étant identifié avec un concept général non-flou pouvant représenter un unique naturel), et si F_1 est le symbole particulier associé à la définition auxiliaire

$D_{auxF1}(o_{F1},o)$: « o_{F1} est le 1^{ier} terme de o »,..,F_p est le symbole particulier associé à la définition auxiliaire $D_{auxFp}(o_{Fp},o)$: « o_{Fp} est le pième teme de o », $D_1(F_1,..,F_p, O_1,..,O_n)$ ».
Le fait que à $D_1(o_1,..,o_p, O_1,..,O_n)$ soit une définition mathématique simple entraîne que à $D_2(o, O_1,..,O_n)$ est une définition mathématique simple. (On montrera et on admettra dès maintenant que i étant identifié avec un concept général non-flou pouvant représenter un unique naturel différent de 0, « est le ième terme » est une relation non-floue).

On définit alors successivement les symboles particuliers non-flous $G,G_1,..,G_p$ par :
G est le symbole particulier non-flou associé à à $D_2(o, O_1,..,O_n)$.
G_1 est le symbole particulier non-flou associé à $D_{G1}(o_{G1},G)$: « o_{G1} est le 1^{ier} terme de G »
…
G_p est le symbole particulier non-flou associé à $D_{Gp}(o_{Gp},G\ )$: « o_{Gp} est l pième terme de G »

On obtient alors immédiatement que « $(G_1,..,G_p)$ $G_1,..,G_p$ sont des concept particuliers non-flous » est équivalent à « $(C_1,..,C_p),C_1,..,C_p$ sont des concepts particuliers non-flous » et «$C_{10},..,C_{p0}$ étant des objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP, « $(C_1,.,C_p)$ peut représenter $(C_{10},.,C_{p0})$ » est équivalent à « $(G_1,..,G_p)$ peut représenter $(C_{10},..,C_{p0})$ ».

Dans ce qui précède concernant les définitions mathématiques simples séquentielles on a utilisé des séquences finies qu'on ne pourra définir (classiquement) qu'après la définition de **N** (sauf pour des couples qu'on a déjà définis). Et donc nous n'utiliserons pas dans cet article de définition mathématique simple séquentielle avant la définition formelle des séquences finies.

c)L'Axiome 2.5A est fondamental dans la TMP, car on verra qu'il permet de prouver l'existence d'ensembles, et aussi de définir des concepts particuliers et généraux non-flous. Dans un 2nd article, on montrera cependant qu'il est possible de montrer formellement qu'une définition mathématique simple ou une proposition mathématique simple est non-floue sans utiliser l'Axiome 2.5A. On montrera aussi qu'une proposition mathématique simple a une *signification Platoniste* formelle, différente et plus simple que son interprétation Platoniste.

On pourra montrer qu'une proposition mathématique simple est vraie ou n'est pas vraie en utilisant de déductions logiques relationnelles. D'après l'Axiome 2.5A, on ne pourra jamais, utilisant des Axiomes de la TMP qui sont vrais, obtenir qu'une proposition mathématique simple est vraie et n'est pas vraie, ou n'est ni vraie ni non-vraie.

d)On remarque qu'on ne peut pas utiliser « une relation non-floue » ou « une définition non-floue » dans une définition ou une proposition mathématique simple.

e)Si on a la proposition P : «Si x est tel que Non(x est un ensemble), alors x est un couple » alors P ne sera pas une proposition mathématique simple puisque x peut représenter des objets mathématiques relationnels. Cependant, on verra que P est une proposition mathématique mixte, qui est évidemment fausse.

Si on a la proposition P1 : « Si x est tel que x est un ensemble alors x n'est pas un couple », d'après la signification du concept primitif « tel que », P1 définit le symbole particulier x pouvant représenter les mêmes objets que x dans la définition Def(x) : « x est le symbole particulier associé à la définition auxiliaire $D_{auxx}(o)$: « o est un ensemble ».

f)On peut généraliser la définition de proposition ou de définition mathématiques simples en définissant des *propositions mathématiques mixtes* et des *définitions mathématiques mixtes*. Celles-ci peuvent utiliser des concepts particuliers et généraux non-flous mixtes, c'est-à-dire pouvant représenter tout type d'objets mathématiques. On généralise alors l'Axiome 2.5A :
-Toute proposition mathématique mixte est non-floue.
-Toute définition mathématique mixte est non-floue.

g)On peut montrer que dans une proposition mathématique simple, tout nouveau symbole associé à une définition auxiliaire est un symbole particulier non-flou. Pour cela on procède par récurrence :

On conserve les notations du 2.5IIIB, pour i parmi 1,..,q, H_i est un symbole particulier associé à la définition auxiliaire $D_{auxHi}(o_{Hi}, H_{i1},..,H_{ip(i)})$, $H_{i1},..,H_{ip(i)}$ étant des symboles particuliers prédéfinis au sens large avant H_i.Alors :

-Si l'un des H_{ij} est un symbole particulier non-flou qui n'est pas un concept particulier non-flou, alors H_i est un symbole particulier non-flou ne pouvant représenter aucun objet mathématique.

-Si tous les H_{ij} sont des concepts particuliers non-flous, alors on peut identifier $D_{auxHi}(o_{Hi}, H_{i1},..,H_{ip(i)})$ avec une définition mathématique simple qui est non-floue d'après l'Axiome 2.5A, et donc H_i est un symbole particulier non-flou.

h)Si C_i est un symbole particulier associé à une définition auxiliaire dans une proposition mathématique simple $P(O_1,..,O_n)$, alors on dira que C_i est *défini*

uniquement en fonction de O_1,.,O_n, si on a toujours O_1,..,O_n représentant simultanément O_{10},..,O_{n0} , C_i peut représenter un unique objet mathématique.

i)Considérons une proposition mathématique simple P(O_1,..,O_n). O_{10},..,O_{n0} pouvant être représentés simultanément par O_1,..,O_n, on définit les concepts généraux non-flous O_{10G},..,O_{n0G}, avec pour j parmi 1,.,n O_{j0G} peut représenter seulement O_{j0}. On suppose qu'on a montré qu'on a toujours P(O_{10G},..,O_{n0G}) est vraie. Alors il est évident qu'on aura P(O_1,..,O_n) est vraie.

REMARQUE 2.5C :

a)Dans une définition mathématique simple d'après l'Axiome 2.5A, on peut donc utiliser des concepts généraux non-flous (Par exemple comme on le verra **N**, **Q**…).

b)O_1 et O_2 étant des symboles particuliers non-flous prédéfinis, on peut dans une définition mathématique simple utiliser (O_1,O_2), symbole particulier non-flou associé à la définition D(o,O_1,O_2) : « o est un couple et O_1 est le premier terme de o et O_2 est le 2ième terme de o ». (Ceci constitue une règle syntaxique de convention (symbolique)).

En effet, la définition précédente est non-floue d'après l'Axiome 2.5A.

c)On remarque que pour définir « un ensemble » ou « un couple » on n'a pas utilisé de définition générale non-floue D(o) associée à ces concepts mais des axiomes. Ceci est peu fréquent, mais c'est le cas pour les concepts généraux fondements de la TMP. On a appelé *Définition axiomatique* (partielle) de telles définitions sous forme d'Axiomes.

REMARQUE 2.5D.

a)Dans la TMP comme dans les mathématiques classiques, un *Axiome* est une proposition qu'on admet à cause de son caractère d'évidence, et qui permet d'obtenir des propositions vraies appliquant l'Axiome 2.2.E.

b)On distingue 3 sortes d'Axiomes, les *Axiomes mathématiques simples* qui sont des propositions mathématiques simples (définies dans la Définition 2.5), les *Axiomes mathématiques mixtes* dont font partie les Axiomes mathématiques simples et qui sont des propositions mathématiques mixtes, et enfin les *Axiomes para-mathématiques* qui sont des propositions para-mathématiques, pouvant utiliser les termes , « un concept général non-flou », « un concept particulier non-

flou », « une proposition mathématique simple ».….Par exemple l'Axiome 2.5A est un Axiome para-mathématique.

c)On remarque que d'après l'Axiome 2.5A, les définitions $D_C(o)$: « o est un ensemble » et $D_R(o)$: « o est un ensemble et Non(o est élément de o) » sont des définitions non-floues. Elles seront utilisées pour étudier dans la TMP les paradoxes de Cantor et de Russel.

Supposons qu'on considère des objets mathématiques correspondant à une définition générale non-floue D(o). On cherche à savoir s'il existe un ensemble A dont les éléments correspondent à la définition D(o). On a la définition suivante d'un tel ensemble :

DEFINITION 2.6 :

D(o) étant une définition générale mathématique simple , on dira qu'A *est un ensemble dont les éléments correspondent* à D(o) si A est défini par la proposition mathématique simple vraie D_A :

D_A: A est tel que « A est un ensemble et pour tout a tel que « a est un objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP », « D(a) est équivalent à a est élément de A » ».

D_A est une proposition mathématique simple d'après la Définition 2.5, elle est donc non-floue. De plus on a vu que si D_A est vraie, A est nécessairement un concept particulier non-flou car D_A est irréductible.

Par convention on écrira D_A sous la forme équivalente :

D'_A :A est tel que « A={a tel que D(a)} ».

Une proposition mathématique simple ou une définition mathématique simple pourra utiliser une expression du type D_A ou D'_A pour définir un ensemble.

REMARQUE 2.7 :

On remarque que d'après l'Axiome 2.2.B, si 2 ensembles ont les mêmes éléments ils sont identiques. Il en résulte que si A est un ensemble dont les éléments correspondent à une définition mathématique simple D(o) alors A représente un unique ensemble.

Si on considère des objets mathématiques correspondant à une définition générale D(o) non-floue, c'est-à-dire binaire et cohérente, on pourrait s'attendre à

ce qu'il existe un ensemble dont les éléments correspondent à D(o). Ceci équivaudrait à admettre l'Axiome suivant, que nous appellerons « Axiome Naïf » :

AXIOME NAIF 2.8:

Si on considère des objets mathématiques correspondant à une définition D(o) non-floue, alors il existe un ensemble dont les éléments correspondent à la définition D(o).

PARADOXES DE CANTOR ET DE RUSSEL 2.9 :

Or l' Axiome naif est faux. On l'a appelé « Axiome Naïf » car il conduit aux mêmes paradoxes que la Théorie naïve des ensembles.

Montrons comment on obtient un paradoxe analogue au Paradoxe de Cantor à partir de l'Axiome naïf 2.8 :

Supposons qu'on considère les objets mathématiques correspondants à la définition $D_C(o)$ « o est un ensemble ». On a vu que d'après l'Axiome 2.5A, $D_C(o)$ est non-floue c'est à dire $D_C(o)$ est binaire et cohérente. Cependant si l'Axiome naïf 2.8 est vrai, alors il existe un ensemble non-flou A_C dont les éléments correspondent à $D_C(o)$, alors admettant que tout sous-ensemble de A_C est un ensemble existant (Ce qui est obligatoire si le concept « ensemble » a les propriétés des ensembles classiques), A_C admet comme élément chacun de ses sous-ensembles, et ceci est impossible car on est dans un cas analogue au Paradoxe de Cantor.

Montrons comment on obtient un paradoxe analogue au Paradoxe de Russel :

Considérons les objets correspondants à la Définition $D_R(o)$« o est un ensemble et Non(« o est un élément de o ») ». On a vu que $D_R(o)$ était non-floue d'après l'Axiome 2.5A c'est à dire $D_R(o)$ est binaire et cohérente. Supposons que l'Axiome naïf 2.8 soit vrai. Alors il existe un ensemble A_R non-flou dont les éléments correspondent à $D_R(o)$.

A_R ne peut représenter qu'un unique ensemble d'après la Remarque 2.7.b).

Si « A_R est élément de A_R » est vraie, alors A_R ne correspond pas à $D_R(o)$, et donc A_R n'est pas élément de A_R, il est donc impossible qu'on ait « A_R est élément de A_R » est vraie puisque la relation « est élément de A_R » est cohérente (Remarque 2.2 E)

Si on a Non(« A_R est élément de A_R » est vraie), alors A_R correspond à $D_R(o)$ et donc « A_R est élément de A_R », ce qui est impossible puisque la définition

« o est élément de A_R » est cohérente. Il est donc impossible qu'on ait Non(« A_R est élément de A_R » est vraie).

Or ceci est impossible puisque la relation « est élément de » est binaire , et donc on a ou bien « A_R est élément de A_R » est vraie, ou bien Non(« A_R est élément de A_R » est vraie).

On recherche donc un Axiome de la TMP permettant d'obtenir l'existence d'un ensemble non-flou A dont les éléments correspondent à une définition D(o). On a vu dans la Remarque 2.7b) que A ne peut représenter qu'un unique ensemble.

Supposons que la définition générale D(o) soit non-floue, et que tout objet mathématique correspondant à D(o) soit élément d'un ensemble E. Puisque D(o) est binaire et cohérente, il semble intuitivement certain qu' il existe un sous-ensemble de E dont les éléments correspondent à D(o), ce qu'on admettra axiomatiquement. On introduit donc la définition suivante :

DEFINITION 2.10 :

Si on a une définition générale mathématique simple D(o) telle qu'il existe un ensemble B_0 tel que tout objet O_0 correspondant à D(o) soit élément de B_0 , alors on dira que D(o) est *basique*.

DEFINITION 2.11A:

a)CONCEPTS PARTICULIERS SANS PARAMETRES FIXES

$O_1,..,O_n$ étant des concepts particuliers non-flous définis successivement avec les notations de la Définition 2.3g, on a défini, $O_{10},..,O_{n0}$ étant des objets mathématiques la proposition « $O_1,..,O_n$ peuvent représenter simultanément $O_{10},.,O_{n0}$». De même, k(1),.,k(s) appartenant à {1,..,n}, $O_{k(1)0},..,O_{k(s)0}$ étant des objets mathématiques, on a défini la proposition : « $O_{k(1)},\dots ,O_{k(s)}$ peuvent représenter simultanément $O_{k(1)0},..,O_{k(s)0}$ ».

Avec les notations de la Définition 2.3g, considérons un concept particulier non-flou $O(O(O_{t(1)},..,O_{t(u)})$ associé à une définition mathématique simple $D_t(o_t,O_{t(1)},.,O_{t(u)})$. Alors par définition, « $O(O(O_{t(1)},..,O_{t(u)})$ *sans paramètre fixe* » sera un symbole tel que « $O(O(O_{t(1)},..,O_{t(u)})$ peut représenter O_0 » est équivalent (au sens « entrainement mutuel ») à « Il existe des objets $O_{t(1)0},..,O_{t(u)0}$ tels que

$O_{t(1)}$,.,$O_{t(u)}$ peuvent rerprésenter simultanément $O_{t(1)0}$,.,$O_{t(u)0}$ et $O(O(O_{t(1)0},..,O_{t(u)0})$ peut représenter O_0 (c'est-à-dire $D_t(O_0,O_{t(1)0},.,O_{t(u)0})$ est vraie) ».

b)Si $O(O_1,.,O_n)$ est un concept particulier non-flou et si $O_1,..,O_n$ pouvant représenter simultanément $O_{10},..,O_{n0}$, il existe toujours un unique objet O_0 pouvant être représenté par $O(O_{10},..,O_{n0})$, (C'est-à-dire un unique objet O_0 tel que « $D(O_0,O_{10},..,O_{n0})$ et O_0 est un objet mathématique non-relationnel différent de l'EMP » est vraie), alors on dira que $O(O_1,..,O_n)$ est *défini uniquement en fonction* de $O_1,..,O_n$.

On a alors le Théorème fondamental suivant :

THEOREME 2.11B

$O_1,.,O_n$ étant des concepts particuliers non-flous définis avec les notations de la Définition 2.3g :

a)Il existe des objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP $O_{10},..,O_{n0}$ pouvant être représentés simultanément par $O_1,..,O_n$.

b)r(1),..,r(s) étant dans {1,.,n}, il existe des objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP $O_{r(1)0},..,O_{r(s)0}$ pouvant être représentés simultanément par $O_{r(1)},..,O_{r(s)}$.

c))r(1),..,r(s) étant dans {1,.,n},pour tous objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP $O_{r(1)0},..,O_{r(s)0}$, $O_{r(1)},.,O_{r(s)}$ peuvent représenter simultanément ou(exclusif) ne peuvent représenter simultanément $O_{r(1)0},..,O_{r(s)0}$.

d)$O(O(O_{t(1)},..,O_{t(u)})$ étant associé à une définition mathématique simple $D_t(o_t,O_{t(1)},.,O_{t(u)})$, $O(O(O_{t(1)},..,O_{t(u)})$ sans paramètre fixe est un concept général non-flou.

Preuve :

On rappelle qu'avant la définition de **N** dans la TMP, on considère les indices utilisés 1,..,n non comme des naturels mais comme des signes distinctifs. De plus, s(1),..,s(p) étant des signes distinctifs, on utilse la notation « s est dans {s(1),..,s(p)} » pour « s est parmi s(1),..,s(p) ».

On définit *une démonstration par récurrence* sur des signes distinctifs de la façon suivante :

Supposons qu'on ait des signes distinctifs s(1),..,s(p) et que pour tout s(i) dans{s(1),..,s(p)} on ait défini une proposition P(s(i)) (resp.P(s(1),..,s(i))), avec P(s(1)) vraie et pour tout s(i) dans {s(1),..,s(p)} P(s(i)) (resp.P(s(1),..,s(i))) entraîne P(s(i+1)) (resp.P(s(1),..,s(i+1))) (« i+1 » étant identifié non à un naturel mais au symbole successeur du symbole i, par exemple « 2+1 » est identifié avec le symbole « 3 »). Alors on admettra que pour tout s(i) dans {s(1),..,s(p)} P(s(i)) (resp.P(s(1),..,s(i))) est vraie et on dira qu'on a démontré par récurrence sur s(1),.,s(p) les propositions P(s(1)),..,P(s(p)) ((resp. P(s(1),..,P(s(1),..,s(p))).

a)Ce point se démontre facilement par récurrence.
b)Ce point est conséquence immédiate du a).
c)On procède par récurrence :

On conserve les notations du 2.3g. On suppose qu'on a démontré P((1,..,n)) : « Pour tous r(1),..,r(s) dans {1,..,n}, pour tous objets mathématiques $O_{r(1)0}$,..,$O_{r(s)0}$ (On peut supposer dans la démonstration que les objets mathématiques qu'on utilise sont non-relationnels et différents de l'EMP), $O_{r(1)}$,.,$O_{r(s)}$ peuvent représenter simultanément ou(exclusif) ne peuvent représenter simultanément $O_{r(1)0}$,..,$O_{r(s)0}$ ».

On suppose que O_{n+1} est le concept particulier non-flou associé à la définition mathématique simple $D_{n+1}(o_{n+1},O_{n+1,1},.,O_{n+1,h(n+1)})$.

Pour montrer P(1,..,n+1), il est évident qu'il suffit de démontrer PA(n+1) : « Pour tous r(1),..,r(s) dans {1,..,n} et pour tous objets mathématiques $O_{r(1)0}$,.,$O_{r(s)0}$, O_{n+10}, $O_{r(1)}$,..,$O_{r(s)}$,O_{n+1} peuvent représenter simultanément ou (exclusif) ne peuvent représenter simultanément $O_{r(1)0}$,.,$O_{r(s)0}$,O_{n+10} ».

PA(n+1) est équivalent à PB(n+1) : « Pour tous r(1),..,r(s) dans {1,..,n} et pour tous objets mathématiques $O_{r(1)0}$,.,$O_{r(s)0}$, O_{n+10}, $O_{r(1)}$,..,$O_{r(s)}$,O_{n+1}, si QA($O_{r(1)0}$,.,$O_{r(s)0}$, O_{n+10}) est la proposition : « $O_{r(1)}$,..,$O_{r(s)}$,O_{n+1} peuvent représenter simultanément $O_{r(1)0}$,.,$O_{r(s)0}$,O_{n+10} », QA($O_{r(1)0}$,.,$O_{r(s)0}$, O_{n+10}) est vraie ou(exclusif) n'est pas vraie. »

On peut supposer que $O_{n+1,1}$,..,O_{n+1j} sont parmi $O_{r(1)}$,..,$O_{r(s)}$ et $O_{n+1,j+1}$,..,$O_{n+1,h(n+1)}$ ne sont pas parmi $O_{r(1)}$,.,$O_{r(s)}$. Alors, d'après la Définition 2.3g, QA($O_{r(1)0}$,.,$O_{r(s)0}$, O_{n+10}) est équivalent à la proposition QB($O_{r(1)0}$,.,$O_{r(s)0}$, O_{n+10}) : « $O_{r(1)}$,..,$O_{r(s)}$ peuvent représenter simultanément $O_{r(1)0}$,…,$O_{r(s)0}$ et RA($O_{n+1,10}$,..,$O_{n+1,j0}$, ,O_{n+10}) : « Il existe des objets mathématiques $O_{n+1,j+10}$,..,$O_{n+1,h(n+1)0}$ tels que $O_{r(1)}$,..,$O_{r(s)}$, $O_{n+1,j+1}$,..,$O_{n+1,h(n+1)}$ peuvent représenter simultanément $O_{r(1)0}$,..,$O_{n+1,h(n+1)0}$ et $D_{n+1}(O_{n+10},O_{n+1,10},..,O_{n+1,h(n+1)0})$ ».

Pour montrer que RA($O_{n+1,10}$,..,$O_{n+1,j0}$, O_{n+10}) est vraie ou (exclusif) n'est pas vraie, il suffit de montrer que la négation de RA($O_{n+1,10}$,..,$O_{n+1,j0}$, O_{n+10}) est vraie ou exclusif n'est pas vraie, c'est-à-dire RB($O_{n+1,10}$,..,$O_{n+1,j0}$, O_{n+10}) est vraie ou (exclusif) n'est pas vraie, avec :

$RA(O_{n+1,10},..,O_{n+1,j0}, O_{n+10})$: « Pour tous objets mathématiques $O_{n+1,j0},..,O_{n+1,h(n+1)0}$, si $O_{r(1)},...,O_{n+1,h(n+1)}$ peuvent représenter simultanément $O_{r(1)0},..,O_{n+1,h(n+1)0}$, alors Non $(D_{n+1}(O_{n+10},O_{n+1,10},..,O_{n+1h(n+1)0}))$ »
En utilisant l'hypothèse de récurrence, le fait que $D_{n+1}(o_{n+1},O_{n+1,1},..,O_{n+1h(n+1)})$ soit non-floue et la signification des concepts primitifs « Pour tous » et « si..alors » on obtient que $RB(O_{n+1,10},..,O_{n+1,j0}, O_{n+10})$ est vraie ou(exclusif) n'est pas vraie. Et donc $RA(O_{n+1,10},..,O_{n+1,j0}, O_{n+10})$ est vraie ou(exclusif) n'est pas vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence, on obtient donc $QB(O_{r(1)0},.,O_{r(s)0}, O_{n+10})$ est vraie ou(exclusif) n'est pas vraie, de même que $QA(O_{r(1)0},.,O_{r(s)0}, O_{n+10})$.

D'après la signification des concepts primtifs « Pour tous » et « si.. alors », on obtient PB(n+1) est vraie, et donc P(1,..,n+1) est vraie.

d)Pour montrer ce point, on doit montrer, avec les notations du Théorème :

(i)Il existe un objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP pouvant être représenté par $O(O(O_{t(1)},..,O_{t(u)})$ sans paramètre fixe.

(ii)P :Pour tout objet mathématique O_0, (On rappelle qu'on peut supposer que les objets mathématiques qu'on utilise sont non-relationnels et différents de l'EMP), $O(O(O_{t(1)},..,O_{t(u)})$ sans paramètre fixe peut représenter ou(exclusif) ne peut pas représenter O_0.

Le (i) est une conséquence immédiate du b).

On remarque que P est équivalent à Q : « Pour tout objet mathématique O_0, si $R(O_0)$ est la proposition : « Il existe des objets mathématiques $O_{t(1)0},..,O_{t(u)0}$ tels que $O_{t(1)},..,O_{t(n)}$ peuvent représenter simultanément $O_{t(1)0},..,O_{t(u)0}$ et $D_t(O_0,O_{t(1)0},\dots O_{t(u)0}))$ », alors $R(O_0)$ est vraie ou(exclusif) n'est pas vraie ».

Pour montrer que $R(O_0)$ est vraie ou(exclusif) n'est pas vraie, il suffit de démontrer que la négation de $R(O_0)$ notée $S(O_0)$ (avec $R(O_0)$ est vraie est équivalent à $S(O_0)$ n'est pas vraie) est vraie ou(exclusif) n'est pas vraie, avec :
$S(O_0)$: « Pour tous objets mathématiques $O_{t(1)0},..,O_{t(u)0}$, si $O_{t(1)},.,O_{t(u)}$ peuvent représenter simultanément $O_{t(1)0},..,O_{t(u)0}$, alors $Non(D_t(O_0,O_{t(1)0},..,O_{t(u)0})$.

En utilisant le c), le fait que $D_t(o_t,O_{t(1)},.,O_{t(u)})$, $O(O(O_{t(1)},..,O_{t(u)})$ soit non-floue et la signification des concepts primitifs « Pour tout » et « si..alors », on obtient que $S(O_0)$ est vraie ou(exclusif) n'est pas vraie, et de même pour $R(O_0)$. Il en résute que P est vraie, on a donc montré la proposition.

REMARQUE 2.11C :

On a déjà vu 2 façons de définir un concept général non-flou :

-La première possibilité est de le définir par des définitions axiomatiques partielles, en général équivalentes à des propositions mathématiques simples ce qui est presque seulement utilisé pour définir les concepts généraux des fondations des mathématiques (un ensemble, l'EMP, une relation floue, un couple…)

-La 2ième possibilité est de le définir en l'associant à une définition générale (c'est-à-dire n'utilisant pas de concepts particuliers pré-définis) non-floue D(o).

-Il existe une 3ième possibilité :

Supposons qu'on ait défini un concept particulier non-flou $O(O_1,..,O_n)$. D'après le Théorème précédent, $O(O_1,..,O_n)$ sans paramètres fixes est un concept général non-flou.

DEFINITION 2.12A : (FONCTION CONCEPT)

Soit $O_A(O_1,.,O_n)$ un concept particulier non-flou associé à une définition $D_A(o,O_1, .,O_n)$, $O_1,.,O_n$ étant des concepts particulier non-flous avec $O_A(O_1,…,O_n)$ *défini uniquement en fonction* de $O_1,..,O_n$.

On a déjà établi que pour n=2, (O_1,O_2) est un concept paticulier non-flou. On a vu aussi dans Préambule de la Définition 2.2A que pour n>2 on montrerait aussi, après avoir défini les naturels dans la TMP, l'existence du concept particulier non-flou non-flou $(O_1,.,O_n)$ identifié avec $\{(1,O_1),..,(n,O_n)\}$et défini uniquement en fonction de $O_1,.,O_n$.

Ceci permettra de justifier que pour n>1, $(O_1,..,O_n)$ est un concept particulier non-flou de même que $(O_A(O_1,..,O_n)), (O_1,…,O_n))$.

D'après le Théorème 2.11Bd il existe concept général non-flou noté F_A pouvant représenter les mêmes séquences que $(O_A(O_1,..,O_n)), (O_1,…,O_n))$ sans paramètres fixes. De même il existe un concept général non-flou noté $Dep(F_A)$ pouvant représenter les mêmes séquences que $(O_1,..,O_n)$ sans paramètres fixes. Ceci signifie donc (si n>1) que $Dep(F_A)$ peut représenter toutes les séquences $(O_{10},…,O_{n0})$ telles que $O_1,..,O_n$ peuvent représenter simultanément $O_{10},..,O_{n0}$. F_A peut alors représenter tous les couples $(O(O_{10},…,O_{n0}), (O_{10},…,O_{n0}))$.

On dira que F_A est une *fonction-concept définie sur* $Dep(F_A)$ et que $Dep(F_A)$ est le *concept de départ* de F_A.

Si $(O_{10},\ldots,O_{n0})$ appartient au concept général $(O_1,..,O_n)$sans paramètres fixes, d'après une règle syntaxique de convention symbolique on identifiera alors $F_A(O_{10},..,O_{n0})$ avec $O_A(O_{10},..,O_{n0})$.

Plus généralement, on pourra identifier avec une fonction-concept F_A tout concept général non-flou ne pouvant représenter que des couples, et tel que O_{A10},O_{A20},O_{B0} étant des objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP, si (O_{A10},O_{B0}) et (O_{A20},O_{B0}) appartiennent à F_A, alors O_{A10} est identique à O_{A20}.

On verra que par exemple les symboles « U », « *P* » pourront être identifiés à des fonctions-concepts. Dans cet article, avant la définition de **N**, si on définit une fonction-concept dont le concept de départ peut représenter seulement des séquences finies à n termes, on aura au maximum n=2

F_A étant une fonction-concept définie avec les notations précédentes, on pourra utiliser dans une définition ou une proposition mathématique simple $F_A(O'_1,..,O'_n)$ avec $O'_1,..,O'_n$ concepts généraux pouvant représenter un unique objet ou symboles particuliers associés ou implicitement associés à une définition auxiliaire ou de type $o_{r1},..,o_{rs}$ pouvant dans tous les cas être utilisés à l'emplacement de $F_A(O'_1,..,O'_n)$, $F_A(O'_1,..,O'_n)$ étant identifié d'après une règle syntaxique de convention symbolique avec symbole particulier non-flou associé à la définition auxiliaire $D_{auxFA}(o_c,O'_1,..,O'_n)$: « $(O'_1,..,O'_n)$ appartient au concept général $Dep(F_A)$ et $(o_c,(O'_1,..,O'_n))$ appartient au concept général F_A ». On dira que $F_A(O'_1,..,O'_n)$ est *implicitement associé au sens d'une fonction-concept* à la définition auxiliaire $D_{auxFA}(o_c,O'_1,..,O'_n)$.

Plus généralement d'après une 2[ième] règle syntaxique de convention symbolique, une expression du type précédent $F_A(O'_1,..,O'_n)$ pourra aussi utiliser des O'_j identifiés à des symboles particuliers non-flous pouvant être utilisés à son emplacement, et donc en particulier du type $F_{Aj}(O'_{j1},..,O'_{jk(j)})$.

D'après la règle syntaxique de convention symbolique précédente, on pourra identifier des expressions du type $E(O'_1,..,O'_n)$ (définies en 2.5IIBav) avec $O'_1,..,O'_n$ concepts généraux pouvant représenter un unique objet ou symboles particuliers associés ou implicitement associés à une définition auxiliaire ou de type $o_{r1},..,o_{rs}$ pouvant dans tous les cas être utilisés à l'emplacement de $E(O'_1,..,O'_n)$) utilisant plusieurs fonction-concepts avec des symboles particuliers non-flous. Par exemple si $E(O'_1,..,O'_n)$ est l'expression $F_{Ap+1}(F_{A1}(O'_{11},..,O'_{1k(1)}),..,F_{Ap}(O'_{p1},.,O'_{pk(p)})$, avec $F_{Ap+1},F_{A1},.,F_{Ap}$ fonction-concepts et les O'_{ij} parmi $O'_1,.,O'_n$, alors on identifiera $E(O'_1,.,O'_n)$ avec un symbole particulier non-flou obtenu par des définitions auxiliaires implicites au sens d'une fonction-concept (analogues aux D_{auxFA} précédentes) d' expressions du type $F_{A1}(..),\ldots,F_{Ap+1}(..)$. On dira que $E(O'_1,.,O'_n)$ est *implicitement défini par les définitions auxiliaires implicites au sens d'une fonction-concept* de

$F_{A1}(..),..,F_{Ap+1}(..)$ (F_{Ap+1} étant identique ou ayant la même signification d'après les règles syntaxiques de convention symbolique que $E(O'_1,.,O'_n)$).

DEFINITION 2.12 B :

On dira que A est un ensemble *dont les éléments correspondent à la* définition mathématique simple $D(o,O_1,..,O_n)$ de paramètres fixes les concepts particuliers non-flous $O_1,..,O_n$ si A est défini par la proposition mathématique simple :

$D_A(O_1,\ldots,O_n)$: « A (noté aussi $A(O_1,\ldots,O_n)$) est tel que « A est un ensemble et pour tout x tel que x est un objet mathématique non-relationnel différent de l'EMP, «x est élément de A est équivalent à x est tel que $D(x,O_1,\ldots,O_n)$)» ».

Par convention, on écrira $D_A(O_1,\ldots,O_n)$ sous la forme suivante, ayant la même signification:
$D'_A(O_1,\ldots,O_n)$: « A est tel que « A={x tel que $D(x,O_1,..,O_n)$} » ».

On dira alors si $D_A(O_1,\ldots,O_n)$ est vraie que pour tous $O_{10},..,O_{n0}$ pouvant être représentés simultanément par $O_1,.,O_n$, $A(O_{10},\ldots,O_{n0})$ est un ensemble dont les éléments correspondent à $D(o,O_{10},\ldots,O_{n0})$.

D'après les règles de ponctuation d'une proposition mathématique simple, on admettra par convention qu'une proposition auxiliaire du type « A={x tel que $D(x,O_1,..,O_n)$} » entourée de guillemets a la même signification que non-entourée de guillemets. Il en sera de même pour une proposition auxiliaire du type « A={$x_1,..,x_k$} » qui aura par convention la même signification que « A={x tel que « $x=x_1$ou..ou $x=x_k$} ».

D'après la définition 2.5 $D_A(O_1,\ldots,O_n)$ est une proposition mathématique simple irréductible, elle est donc non-floue et de plus si elle est vraie A est un concept particulier non-flou.

On remarque qu'on pourra utiliser une proposition mathématique simple de type $D_A(O_1,\ldots,O_n)$ ou $D'_A(O_1,\ldots,O_n)$ dans une proposition mathématique simple ou une proposition mathématique étant utilisées dans une définition mathématique simple ou une proposition mathématique simple, identifiant A avec un symbole particulier associé à une définition auxiliaire.

DEFINITION 2.12 C :

Généralisant la Définition 2.10, une définition mathématique simple $D(o,O_1,..,O_n)$ est *basique* si pour tous objets $O_{10},..,O_{n0}$ pouvant être représentés simultanément par $O_1,..,O_n$, il existe un ensemble noté $B(O_{10},..,O_{n0})$ tel que tout objet O_0 correspondant à $D(o,O_{10},..,O_{n0})$ appartient à $B(O_{10},..,O_{n0})$.

REMARQUE 2.12D :

De la même façon que dans la Remarque 2.7, on justifie que si $A(O_1,..,O_n)$ est un ensemble dont les éléments correspondent à la définition non-floue $D(o,O_1,..,O_n)$, alors $A(O_1,..,O_n)$ est défini uniquement en fonction de $O_1,..,O_n$.

On utilisera aussi le concept fondamental de définition récursive Platoniste :

DEFINITION 2.13 A:

Une *définition récursive Platoniste* $D_R(t_0)$ est définie par la donnée de son *premier terme* t_0 , défini uniquement par une définition générale $D_{PR1}(o)$, d'une *propriété récursive* $D_{RP}(o)$ qui est une définition générale non-floue et d'une *clause de récursion* $D_{RC}(o,o_1)$ qui est une définition non-floue telle que :
(i)Si q est le symbole particulier non-flou associé à $D_{RP}(o)$, alors q est un concept particulier non-flou, et si s(q) est le symbole particulier non-flou associé à $D_{RC}(o,q)$, alors s(q) est un concept particulier non-flou défini uniquement en fonction de q et de plus « $D_{RP}(s(q))$ est vraie »).

(ii)t_0 a la *propriété récursive*. (c'est-à-dire $D_{RP}(t_0)$ est vraie).

(iii) « t est *un terme de la définition récursive* $D_R(t_0)$ » est équivalent à « t est identique à t_0 ou il existe q_{DR} tel que q_{DR} est un terme de la définition récursive $D_R(t_0)$ et $D_{RC}(t,q_{DR})$ est vraie ». On dira que t est *le successeur* de q_{DR} dans $D_R(t_0)$ et on emploiera la notation $t=s(q_{DR})$.

AXIOME 2.13 B :

Si $D_R(t_0)$ est une définition récursive Patoniste, alors « un terme de $D_R(t_0)$ » est un concept général non-flou, et donc $D_R(o)$: «o est un terme de $D_R(t_0)$ » est une définition mathématique simple non-floue d'après l'Axiome 2.5A.

Il semble alors intuitivement évident qu'il existe un ensemble dont les éléments sont les termes de la définition récursive, et qui est défini uniquement en fonction de t_0. Ceci signifie qu'il existe un ensemble $A(t_0)$ défini uniquement en fonction de t_0 et dont les éléments correspondent à la définition : $D_R(o)$: « o est un

terme de $D_R(t_0)$ ». Nous admettrons Axiomatiquement l'existence de $A(t_0)$ dans l'Axiome 2.14.

Finalement, l'Axiome permettant d'obtenir l'existence d'ensembles dans la TMP, dont certains points ont été justifiés précédemment et d'autres sont admis dans la Théorie classique des ensembles (qui doit être vraie dans la TMP) est le suivant :

Dans cet Axiome et ce qui suit:
-On appellera un *ensemble non-flou* un concept particulier non-flou pouvant représenter seulement des ensembles.
-A et B étant 2 ensembles, A *est inclus* dans B signifiera classiquement (A,B) est tel que « A est un ensemble et B est un ensemble et « Si x est tel que x est élément de A, alors x est élément de B » » et donc d'après l'Axiome 2.5 « est inclus » peut représenter une unique relation non-floue et pourra être utilisé dans une définition ou une proposition mathématique simple.
-Si on donne une définition sous la forme $D(o,O_1,..,O_n)$, $O_1,..,O_n$ étant des concepts non-flous, on supposera alors toujours implicitement que $D(o,O_1,..,O_n)$ est une définition mathématique simple utilisant les *concepts* particuliers non-flous prédéfinis $O_1,..,O_n$.
(A étant un symbole non-utilisé, « Si A est un C_1 » aura la même signification que « Si A est tel que A est un C_1 » (« un C_1 » concept général non-flou)).

AXIOME 2.14 :

a)Si x est tel que x est un objet mathématique non-relationnel différent de l'EMP , alors il existe un et un seul A tel que A={y tel que y=x} . On identifiera alors l'objet représenté par A avec b(x)={x}.

D'après la Remarque 2.12A) on peut identifier « b » à une fonction-concept définie sur le concept général « un objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP ». x étant un concept particulier non-flou, on pourra donc utiliser {x}, dans une définition non-floue.

b)Pour toute Définition récursive Platoniste $D_R(t_0)$ il existe un et un seul ensemble $A_{DR}(t_0)$, dont les éléments sont ceux correspondant à la Définition D(o) :« o est un terme de (la Définition récursive) $D_R(t_0)$ ».

c)Si A est un ensemble et B est un ensemble alors il existe un et un seul ×(A,B) (noté aussi A×B) tel que A×B={(x,y) tel que « x est élément de A et y est élément de B »}.

-Si A est un ensemble, alors il existe un et un seul *P*(A) tel que P(A)={B tel que « B est un ensemble et B est inclus dans A »}.

-Si A est un ensemble et B est un ensemble alors il existe un et un seul U(A,B) (noté aussi AUB) tel que AUB={x tel que « x est élément de A ou x est élément de B »} .

D'après la Remarque 2.12A on peut identifier « U », « × » avec des fonction-concepts définies sur le concept général « un couple d'ensemble ». De même , on peut identifier « *P* »avec une fonction-concept définie sur le concept général « un ensemble ».

d)On suppose :
(i)A est un concept particulier non-flou pouvant représenter seulement des ensembles non vides.
(ii)a est le concept particulier non-flou associé à la définition $D_a(o,A)$: « o est élément de A.
(iii)B(a) est un symbole particulier non-flou associé à une définition mathématique simple $D_B(o,a)$,B(a) étant un concept particulier non-flou défini uniquement en fonction de a et pouvant représenter seulement des ensembles.
Alors on admettra axiomatiquement l'existence d'un concept particulier non-flou, qu'on notera par convention $U(B(a))_A$, défini uniquement en fonction de A, tel que $U(B(a))_A$ = {x tel que $D_U(x,A)$: « Il existe a tel que « a est élément de A et « si B(a) est tel que $D_B(B(a),a)$, alors x est élément de B(a) » » »}.
On généralise ce qui précède, $A,O_1,.,O_n$ étant des concepts particuliers non-flous pré-définis, $B(a,O_1,..,O_n)$ étant un concept particulier non-flou associé à une définition mathématique simple $D_B(o,a,O_1,..,O_n)$, $B(a,O_1,..,O_n)$ étant défini uniquement en fonction de $a,O_1,.,O_n$ et ne pouvant représenter que des ensembles. On notera alors l'ensemble obtenu $U(B(a,O_1,.,O_n))_A$.

Ce qui précède demeure valide remplaçant A par un concept général non-flou pouvant représenter uniquement un ensemble non vide A_G (Pour le montrer, il suffit de considérer le concept particulier non-flou A pouvant représenter seulement A_G).

On remarque que si on a une fonction-concept F_C telle que $(O_1,\dots,a,..,O_n)$sans paramètre fixe soit inclus dans Dep(F_C) (C'est-à-dire pour tous $O_{10},.,a_0,..,O_{n0}$ pouvant être représentés simultanément par $O_1,.,a,.,O_n$, $(O_{10},.,a_0,..,O_{n0})$ appartient au concept général Dep(F_C)), et que de plus $F_C(O_1,..,a,..,O_n)$ ne peut représenter que des ensembles, alors $F_C(O_1,..,a,O_n)$ pourra être identifié avec $B(a,O_1,.,O_n)$ tel qu'on l'a défini plus haut. On obtient donc l'existence d'un concept particulier non-flou défini uniquement en fonction de $A,O_1,..,O_n$ et qu'on notera $U(F_C(O_1,.,a,..,O_n))_A$. (On pourra aussi remplacer l'indice « A » par l'indice « a|A » s'il y a ambiguité.)

Par exemple, f étant un concept particulier non-flou pouvant représenter seulement des applications dont l'ensemble de départ est **N** et l'ensemble d'arrivée ne contient que des ensembles (qu'on définira plus loin mais qui correspondent à leur définition classique), d'après l'Axiome précédent on aura l'existence d'un concept particulier non-flou défini uniquement en fonction de f, ne pouvant représenter que des ensembles et qu'on pourra noter $U(f(a))_{\mathbf{N}}$. (On verra plus loin que « f(a) » a par convention la même signification que im(f,a), im étant une fonction-concept).

On pourra montrer simplement utilisant cet Axiome 2.14 qu'il existe un concept non-flou $\cap_A(B(a,A))$, défini de façon évidente, et défini uniquement en fonction de A.

e)Si D(o) est une définition générale mathématique simple basique, alors il existe un ensemble non-flou dont les éléments correspondent à D(o). On a vu dans la Remarque 2.7 que cet ensemble est unique. Ceci est aussi vrai si on a des concepts particuliers non-flous $O_1,\dots,O_n$, et qu'on a la définition mathématique simple basique $D(o,O_1,..,O_n)$. Alors, on obtient l'existence d'un concept non-flou $A(O_1,..,O_n)$, défini uniquement en fonction de $(O_1,\dots,O_n)$ et dont les éléments correspondent à $D(o,O_1,\dots,O_n)$. Alors, si $(O_1,..,O_n)$ représente $(O_{10},..,O_{n0})$, il existe un unique ensemble $A(O_{10},..,O_{n0})$ dont les éléments correspondent à $D(o,O_{10},..,O_{n0})$.

On peut utilisant l'Axiome précédent définir les fonction-concepts « ∩ » et « / ».

REMARQUE 2.15 :

a)On remarque qu'en 2.14a), on a mis la condition que si on a un ensemble {x}, x ne peut pas représenter l'EMP . En effet, l'EMP est un objet mathématique extrêmement particulier, et on a donc choisi dans la TMP qu'il ne puisse pas être élément d'un ensemble. On peut d'ailleurs déduire de 2.14a) et e) qu'il n'existe

aucun ensemble ayant pour élément l'EMP. On considèrera donc toujours que les ensembles considérés ne contiennent pas l'EMP. On rappelle qu'on a admis dans l'Axiome 2.2.C qu'aucun couple ne pouvait avoir l'EMP comme un de ses 2 termes. Ceci entraînera qu'aucune séquence finie existant dans l'EMP (O_{10},…,O_{n0}) ne peut avoir l'EMP comme un des termes.

b)On remarque que d'après l'Axiome 2.14e), si D(o) est basique et non-floue mais qu'il n'existe aucun objet correspondant à D(o), alors il existe un ensemble non-flou dont les éléments correspondent à D(o) et qui est l'ensemble vide.

c) D'après la DEFINITION 2.12.A, A et B étant 2 concepts particuliers représentant des ensembles, on peut utiliser dans une relation non-floue les concepts particuliers non-flous définis uniquement en fonction de A et (ou) B qu'on a définis dans l'Axiome 2.14 : A×B, AUB, A∩B et *P*(A). Et si x est un concept particulier non flou ne pouvant pas représenter l'EMP, on peut utiliser le concept non-flou {x} défini dans l'Axiome 2.14 dans une définition non-floue. On peut aussi dans une définition non floue D(o) utiliser, A étant un ensemble o×A, oUA ou {o}.
En effet, on a identifié « U », « × », « ∩ » avec des fonction-concepts définies sur le concept général de départ « un couple d'ensemble », on a identifié « *P* »avec une fonction-concept définie sur le concept général de départ « un ensemble », et on a identifié « b » avec une fonction-concept définie sur le concept général de départ « un objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP » tel que b(x) est identifié avec à {x} .

Nous allons maintenant établir des Lemmes et Propositions fondamentaux, qui nous permettrons d'obtenir plus loin l'existence de concepts généraux non-flous de la TMP qui pourront être identifiés aux concepts classiques.

LEMME 2.16 :

A étant un ensemble, alors il existe et un seul e(A) tel que e(A)={a tel que il existe x tel que « x est élément de A et a={x} »}.({x} représente le concept particulier non-flou introduit en 2.14a)).

D'après la Remarque 2.12A, on pourra donc utiliser e(A) dans une définition non-floue, A étant un concept particulier prédéfini représentant un ensemble, ou e(o) dans une définition non-floue D(o). En effet on peut identifier « e », d'après la Remarque 2.12A, avec une fonction-concept définie sur le concept général « un ensemble».

Preuve :

On a d'après l'Axiome 2.14a une fonction-concept b définie sur le concept général « un objet mathématique non-relationnel différent de l'EMP » telle que b(x)={x}.

On suppose que A est défini par « A est un ensemble ».
On considère la définition D(o,A) :
« Il existe a élément de A tel que o est identique à {a} »
Cette définition est non-floue d'après la Définition 2.5.
De plus elle est basique car il est évident que si A représentant A_0, O_0 correspond à la définition D(o,A_0), alors O_0 est élément de E_0=*P*(A_0).
Et donc d'après l'Axiome 2.14, il existe un ensemble e(A) dont les éléments correspondent à la définition précédente D(o,A).

DEFINITION 2.17A :

a)A et B étant des concepts particuliers non-flous définis par « (A,B) est tel que « A est un ensemble non vide et B est un ensemble non vide », on peut définir un concept particulier non-flou *F*(A,B), pouvant représenter seulement des ensembles et défini uniquement en fonction de A et B, qu'on peut identifier avec *l'ensemble des applications* de A dans B. On peut identifier *F* avec une fonction-concept et « *une application* » avec un concept général non-flou.

b)Si f est élément de *F*(A,B), on dira que A est *l'ensemble de départ de(la fonction)* f et B *est l'ensemble d'arrivée de (la fonction)* f. On définira aussi la fonction-concept F_1 telle que *F*(A,B)={(A,B)}×F_1(A,B). On définira aussi dans cette section la concept général non-flou « une *séquence indexée sur un ensemble*» et la relation non-floue d'ordre de multiplicité 2 « *est une séquence indexée sur l'ensemble* ».

On pourra donc utiliser *F*(A,B) ou F_1(A,B) dans une définition ou une proposition mathématique simple, A et B étant des symboles particulier prédéfinis.

Définition complète des concepts du a) et de b):

On définit A et B par « (A,B) est tel que « A est un ensemble non-vide et B est un ensemble non vide». On rappelle qu'en 2.14c), on a défini la fonction-

concept « *P* » et la fonction-concept « × » qui est définie sur le concept général « un couple d'ensemble ». On peut donc d'après la DEFINITION 2.12A utiliser le concept non-flou *P*(A×B) défini uniquement en fonction de A et B, dans une définition mathématique simple.

On considère alors la définition de paramètres fixes A,B:
D_1(o,A,B) : « o est un élément de *P*(A×B) et pour tout a tel que a est élément de A, il existe un et un seul C(o,a) tel que « C(o,a) est élément de o et a est le premier terme de C(o,a) » ».
(On a utilisé (implicitement) une définition auxilliaire $D_{aux}(o_c,o,a)$ dans la définition précédente).
Cette définition est évidemment basique et elle est non-floue d'après l'Axiome 2.5A. Donc d'après l'Axiome 2.14e), il existe un concept particulier non-flou F_1(A,B), défini uniquement en fonction de A et B et pouvant représenter seulement des ensembles, dont les éléments correspondent à D_1(o,A,B). On a donc défini la fonction-concept F_1, avec Dep(F_1) est le concept général (A,B) sans paramètres fixes.

On sait que (A,B) est un concept particulier non-flou, et donc d'après l'Axiome 2.14a), {(A,B)} est un concept particulier non-flou défini uniquement en fonction de A et B.
Utilisant alors l'Axiome 2.14c, on obtient que {(A,B)}×F_1(A,B) est un concept particulier non-flou défini uniquement en fonction de A,B.
On identifiera *F*(A,B) avec ce concept particulier non-flou, et donc on a défini la fonction-concept *F*. Par définition, *une application* sera le concept général *F*(A,B) sans paramère fixes, et *une séquence indexée sur un ensemble* sera le concept général F_1(A,B) sans paramètres fixes. On définit alors aisément les relations non-floues d'ordre de multiplicité 2 « est l'ensemble d'arrivée de la fonction», « est l'ensemble de départ de la fonction », « est une séquence indexée sur l'ensemble ».

DEFINITION 2.17B:

a)Si A et B sont définis par « A,B) est tel que « A est un ensemble non vide et B est un ensemble non videles non vides», f est définie par « f est élément de *F*(A,B) et a est défini par « a est élément de A », on définit alors le symbole im(f,a) associé à la définition D(o,f,a) : « Si (A_1,B_1) est tel que « A_1 est l'ensemble de départ de f et B_1 est l'ensemble d'arrivée de f », alors ((A_1,B_1),(a,o)) est élément de f ». On pourra alors identifier « im » avec une fonction-concept de concept de départ (f,a) sans paramètres fixes.(Le symbole Im, avec une majuscule sera naturellement une

fonction-concept avec comme concept de départ le concept général pouvant représenter toutes les applications).

Il est évident que d'après la définition d'une fonction d'ensemble, im(f,a) est un concept non-flou défini uniquement en fonction de f,a. Dans le cas où f est un concept particulier non-flou pouvant représenter seulement des applications, et a est un symbole particulier pré-défini par convention « f(a) » aura la même signification que « im(f,a) ». Si on a une définition mathématique simple D(o) et que d'après cette définition o ne peut représenter que des applications, a étant un symbole particulier pré-défini par convention «o(a) » aura la même significatin que « im(o,a) ».

Classiquement on dira que f(a) est l'image de a par f.

b)Si on définit s, A et a par « s est tel que s est une séquence indexée sur un ensemble », « A est tel que s est une séquence indexée sur l'ensemble A », « a est tel que a est élément de A », alors on pourra définir la fonction-concept ims dont le concept de départ est (s,a) sans paramètres fixes, et si (s,a) est défini par « (s,a) est tel que (s,a) appartient au concept général Dep(ims), ims(s,a) est le concept particulier non-flou associé à D_{ims}(o,(s,a)) : « (a,o) est élément de s ».

Si s est un concept particulier non-flou pouvant représenter seulemeent des séquences indexées sur un ensemble et a est un symbole particulier pré-défini, par convention « s(a) » aura la même significationque « ims(s,a) ».

Si on a une définition mathématique simple D(o) et que d'après cette définition o ne peut représenter que des séquences indexées sur un ensemble, a étant un symbole particulier pré-défini par convention «o(a) » aura la même significatin que « ims(o,a) ».

LEMME 2.18 :

On suppose que A et B sont des concepts particuliers non-flous pouvant seulement représenter des ensembles non-vides.

a)Si a est défini par « a est élément de A » et si on a une définition mathématique simple $D_{im}(o_i,a,B))$ telle qu'il existe un concept non-flou noté $f_B(a)$ associé à $D_{im}(o_i,a,B)$ et défini uniquement en fonction de a et B et que d'aprés cette définition , $f_B(a)$ est élément de B, alors il existe un concept non-flou f défini uniquement en fonction de A,B, associé à la définition $D_f(o,A,B)$: « o est un élément de *F*(A,B) et si pour tout a tel que a est élément de A, si $f_B(a)$ est tel que $D_{im}(f_B(a),a,B)$ alors, o(a) est identique à $f_B(a)$ ».

On pourra définir f par la proposition mathématique simple :

f_B est telle que « f_B est élément de F(A,B) et pour tout a tel que a est élément de A, $D_{im}(f_B(a),a,B)$ ».

Ce qui précède demeure vrai si on remplace $D_{im}(o_i,a,B)$ par $D_{im}(o_i,a)$.

b)Dans de nombreux cas f(a) n'est pas défini uniquement en fonction de a, mais en fonction de $a,O_1,\ldots,O_n$, $O_1,\ldots,O_n$ étant des concepts non-flous (A et B pouvant être parmi eux). Alors si a est défini par « a est élément de A » et si on a une définition mathématique simple $D_{im}(o_i, a, O_1,..,O_n)$ telle qu'on ait un concept non-flou noté $f_B(a)_{(O1,..,On)}$ associé à $D_{im}(o_i,a,O_1,..,O_n)$ et défini uniquement en fonction de a, $O_1,..,O_n$ avec $f_B(a)_{(O1,..,On)}$ est élément de B, alors il existe un concept particulier non-flou f associé à la définition $D_f(o,A, B, O_1,..,O_n)$: « o est un élément de F(A,B) et pour tout a tel que a est élément de A, si $f(a)_{(O1,..,On)}$ est le symbole particulier associé à $D_{im}(o_i,a,O_1,..,O_n)$, alors o(a) est identique à $f(a)_{(O1,..,On)}$ », f étant défini uniquement en fonction de $A,B,O_1,..,O_n$.

Pour définir f, on utilisera la proposition mathématique simple:

$D(f,A,B, O_1,..,O_n)$: f est telle que « f est élément de F(A,B)et pour tout a tel que a est élément de A, $D_{im}(f(a),a,O_1,..,O_n)$ ».

On peut généraliser immédiatment ce qui précède si A ou B sont des cocnepts généraux non-flous représentant chacun un unique ensemble non vide.

Preuve :

a)On considère alors la définition $D_2(o,A,B)$ de paramètre fixe A,B:
$D_2(o,A,B)$: « Il existe a élément de A , tel que si $f_B(a)$ est tel que $D_{im}(f_B(a),a,B)$ alors o est identique à $(a,f_B(a))$ ».
A,B représentant simultanément A_0,B_0, il est évident que si $D_2(O_0,A_0,B_0)$ est vraie, alors O_0 est élément de $A_0 \times B_0$, puisqu'on a supposé $f_B(a)$ est élément de B.
Donc $D_2(o,A,B)$ est basique, et elle est non-floue d'après l'Axiome 2.5A.

Donc d'après l'Axiome 2.14.e), il existe un concept non-flou noté $f_{C(A,B)}$, défini uniquement en fonction de (A,B) associé à la définition mathématique simple:
$D_3(o,A,B)$: « o={x tel que $D_2(x,A,B)$ » .

On considère alors le concept particulier non-flou $f_{(A,B)}$ défini par « $f_{(A,B)}$ est tel que $f_{(A,B)}$ =((A,B),f_C(A,B)). Il est évident que $f_{(A,B)}$ est défini uniquement en fonction de A et B et que de plus $f_{(A,B)}$ est élément de F(A,B).

A,B représentant simultanément A_0, B_0 il est évident $f_{(A0,B0)}$ correspond à $D_f(o,A_0,B_0)$. De plus on montre aisément que si f_0 correspond à $D_f(o,A_0,B_0)$,

nécessairement f_0 est identique à $f_{(A0,B0)}$. Et donc si f est le symbole particulier non-flou associé à $D_f(o,A,B)$, alors f est un concept pariculier non-flou défini uniquement en fonction de A et B.

b)$O_1,..,O_n$ pouvant représenter simultanément $O_{10},.,O_{n0}$, on considère les concepts générau non-flous $O_{10G},..,O_{n0G}$ avec O_{i0G} peut représenter seulement O_{i0}, et on définit les concepts particuliers non-flous $A(O_{10G},.,O_{n0G})$ et $B(O_{10G},.,O_{n0G})$ tels que $(A(O_{10G},.,O_{n0G}), B(O_{10G},.,O_{n0G}))$ peut représenter (A_0, B_0) si et seulement si $A,B,O_1,..,O_n$ peuvent représenter simultanément $A_0,B_0,O_{10},..,O_{n0}$. Puis on applique le a).

LEMME 2.19 :

Si A est un ensemble non vide, B est un ensemble non vide et f est élément de F(A,B), alors pour tout b élément de B, il existe un et un seul $f^{-1}(b)$ tel que $f^{-1}(b)$ ={x tel que « x est élément de A et f(x)=b »} .

Comme on a défini im(f,a) on peut de la même façon identifier $f^{-1}(b)$ avec ant(f,b), ant étant une fonction-concept.

Preuve :

Soit f définie par « f est telle que f est une application », A, B définis par «(A,B) est tel que « A est l'ensemble de départ de f et B est l'ensemble d'arrivée de f » et b le concept associé à la définition de paramètre fixe B :« o est élément de B ».
f et b sont des concepts non-flous d'après l'Axiome 2.5A et le Lemme 2.17.

On considère alors la définition de paramètres fixes f ,b:
D(o,b,f) : « Si (A_1,B_1) est tel que « A_1 est l'ensemble de départ de f et B_1 est l'ensemble d'arrivée de f », alors $((A_1,B_1),(o,b))$ est élément de f »
Il est évident que D(o,b,f) est basique et qu'elle est non-floue d'après l'Axiome 2.5A.Donc il existe d'après l'Axiome 2.14e) un ensemble non-flou ant(f,b) dont les éléments correspondent à D(o,b,f),et qui est défini uniquement en fonction de f et b.
On a aussi le Lemme :
LEMME 2.20 :

Si A est un ensembe non vide, B est tel que B est élément de P(A) , alors il existe un un et un seul $f_{Car(B),A}$ symbole particulier associé à la définition $D_f(o,A,B)$: « o est élément de F(A,{σ,{σ}}) et pour tout a élément de A, « « a est

élément de B est équivalent à o(a)={σ} » et « a n'est pas élément de B est équivalent à o(a)=σ » ».

On dira alors que $f_{Car(B),A}$ est la *fonction caractéristique* de B dans A.

Le lemme précédent entraîne qu'on peut définir une fonction concept notée « fonction caractéristique » défini sur le concept général pouvant représenter tous les (A,B), avec A est tel que A est un ensemble non-vide et B est tel que B est inclus dans A.

On a alors « fonction caractéristique(A,B) » est identique à $f_{Car(B),A}$.

Preuve :

On suppose donc que A ne peut représenter l'ensemble vide.

Le cas où B est égal à l'ensemble vide est évident, on supposera donc que B est différent de l'ensemble vide.

Nous représenterons l'ensemble vide par σ ou par le symbole 0 et {σ} par le symbole 1.

σ est un concept non-flou représentant un unique objet mathématique et donc {σ} est un concept non-flou représentant un unique objet d'après l'Axiome 2.14a). {σ,{σ}} représene donc un unique objet d'après l'Axiome 2.14.

A étant un ensemble non-vide et B étant le concept particulier non-flou associé à « o est élément de *P*(A) et o est différent de l'ensemble vide», d'après l'Axiome 2.5 B est un concept particulier non-flou.

On définit alors le concept non-flou a par « a est élément de A ».

On considère alors le symbole $f_B(a)$,associé a définition non-floue de paramètres fixes a,B :

D_{im}(o,a,B) : « Si a est élément de B o alors est identique à {σ} et si a n'est pas élément de B alors o est identique à σ ».

Il est évident que $f_B(a)$ est défini uniquement en fonction de a et B. D'après l'Axiome 2.18, on peut alors définir $f_{Car(B),A}$ par la proposition mathématique simple:

« $f_{Car(B),A}$ est élément de *F*(A,B) et pour tout a tel que a est élément de A Dim($f_{Car(B),A}$,a,B) ».

D'après l'Axiome 2.18 $f_{Car(B),A}$ est un concept non-flou défini uniquement en fonction de A et B ce qui démontre le Lemme.

On obtient facilement la réciproque du Lemme précédent :

LEMME 2.21 :

Si A est un ensemble non vide et f est élément de F(A,{0,1}) , alors « il existe un et un seul B tel que B=$f^{-1}(1)$ ».

3.CONCEPTS BASIQUES FONDAMENTAUX

En utilisant les chapitres précédents, on peut alors montrer théoriquement qu'on peut identifier les concepts mathématiques classiques à des concepts non-flous existants dans l'EMP ,c'est-à-dire que les concepts mathématiques classiques existent au sens de la TMP.

PROPOSITION 3.1 :

Il existe un concept général non-flou qu'on peut identifier à **N**.

Preuve :

On considère la définition récursive Platoniste $D_{\mathbf{N}}(\sigma)$ (notée $D_{\mathbf{N}}$) définie par :
-σ (l'ensemble vide), est le premier terme de la définition récursive $D_{\mathbf{N}}$
-La propriété récursive est $D_{\mathbf{N}P}(o)$: « o est un ensemble ».
-La clause de récursion de $D_{\mathbf{N}}$ est $D_{\mathbf{N}C}(o,o_1)$: « s(o) est identique à $e(o_1)U\{\sigma\}$ », « e » étant la fonction-concept définie en 2.16.

On définit q par : q est le symbole particulier non-flou associé à $D_{\mathbf{N}P}(o)$. q est évidemment un concept particulier non-flou. On définit alors $s_{\mathbf{N}}(q)$ par : $s_{\mathbf{N}}(q)$ est tel que $D_{\mathbf{N}C}(s_{\mathbf{N}}(q),q)$: « $s_{\mathbf{N}}(q)$ est identique à e(q)U{σ} », e(q) étant le concept non flou défini uniquement en fonction de q au Lemme 2.16.(e(σ)=σ et si q est différent de σ, e(q)={a tel que il existe x tel que x est élément de q et a={x}}.

Il est évident que $s_{\mathbf{N}}(q)$ est défini uniquement en fonction de q, puisque d'après le Lemme 2.16 e(q) est défini uniquement en fonction de q. De plus $s_{\mathbf{N}}(q)$ est un ensemble et donc il a la propriété récursive.
Donc $D_{\mathbf{N}}$ est bien une définition récursive Platoniste.

D'après l'Axiome 2.14b), il existe un ensemble noté A(σ), défini uniquement en fonction de σ et donc unique , et dont les éléments sont les termes de la définition récursive, c'est-à-dire :σ, {σ},{σ,{σ}}, {σ,{σ},{{σ}}},…, qu'on identifiera à 0,1,2,3….On identifiera donc A(σ) à un concept général non-flou représenté par **N** , et de même 0,2,3.. à des concepts généraux non-flous.

On identifiera $s_{\mathbf{N}}$ avec une fonction-concept de concept de départ « un élément de **N** ».

On admet comme un axiome évident (Axiome de récursivité) l'Axiome suivant :

AXIOME 3.1A : (Axiome de récursivité) :

Soit $D_R(t_0)$ une définition Platoniste récursive. t_0 st donc le 1[ier] terme de D_R.
Soit P(o) une définition mathématique simple.
Alors si $P(t_0)$ est vraie et de plus si q_{DR} étant un terme de D_R on a $P(q_{DR})$ entraîne $P(s(q_{DR}))$, alors $P(q_{DR})$ est vraie pour tout terme q_{DR} de la définition récursive.

On aurait pu considérer une définition récursive Platoniste plus simple comme celle définie par s(q)=qU{q} (qui donne la séquence de von Neumann). Les résultats obtenus pour $D_{\mathbf{N}}$ se généralisent à cette nouvelle définition récursive. Cependant, les 2 définitions récursives ne définissent pas le même ensemble **N**.

DEFINITION 3.1Ba : (Définition récursive ordonnée).

Un cas particulier est le cas où on a une définition récursive Platoniste $D_R(t_0)$ telle que :
(i)t_0 est un couple de premier terme 0.
(ii)Si q est le symbole particulier associé à $D_{RP}(q)$, q est un concept particulier non-flou ne pouvant représenter que des couples dont le premier terme est un naturel.
(iii)Si s(q) est tel que $D_{RC}(s(q),q)$ et j est tel que j est le premier terme de s(q) et i est tel que i est le premier terme de q, alors $j=s_{\mathbf{N}}(i)$.
On dira alors que $D_R(t_0)$ est une *définition Platoniste récursive ordonnée*.

Une conséquence immédiate de l'Axiome 2.14b est la proposition para-mathématique, permettant d'obtenir des propositions mathématiques simples :

PROPOSITION 3.1Bb :

$D_R(t_0)$ étant une définition Platoniste récursive ordonnée, avec les notations précédentes il existe A tel que :
(i)A est un ensemble et pour tout a tel que a est élément de A a est un couple et si x est tel que x est le premier terme de a alors x est un naturel.
(ii)Pour tout i tel que i est élément de **N** il existe un et un seul b tel que b est élément de A et i est le premier terme de b.
(iii)t_0 est élément de A et pour tout j tel que j est élément de **N**, $D_{RC}(((s_{\mathbf{N}}(j),A(s_{\mathbf{N}}(j))),\ (j,A(j))$ » ((j,A(j)) étant identifié avec l'élément de A de premier terme j).

Il est évident que toute définition récursive Platoniste induit naturellement une définition récursive Platoniste ordonnée.

On peut généraliser la proposition précédente avec les hypothèses suivantes :

On suppose qu'on a une définition mathématique simple $D_{PR1}(o,O_1,..,O_r)$ (dite définition du premier terme de D_R), et une définition mathématique simple $D_{RC}(o,o_1,O'_1,..,O'_c)$ (dite clause de récursion de D_R) et une définition mathématique simple $D_{RP}(o,O''_1,..,O''_p)$ (dite propriété récursive de D_R), avec certains O_i peuvent être identiques à certains O'_j et tous les O''_k sont parmi les O_i et les O'_j.

On suppose de plus :

(i)Si t_0 est le symbole particulier associé à $D_{PR1}(o,O_1,..,O_r)$ t_0 est un concept particulier non-flou défini uniquement en fonction de $O_1,..,O_r$ et t_0 ne peut représenter que des couples dont le premier terme est 0 et $D_{RP}(t_0,O''_1,..,O''_p)$ (identifié avec une proposition mathématique simple) est vraie.

(ii)Si q est le symbole particulier associé à $D_{RP}(o,O''_1,..,O''_p)$, q est un concept particulier non-flou et q ne peut représenter que des couples dont le premier terme est un naturel.

(iii)Si s(q) est le symbole particulier associé à $D_{RC}(o,q,O'_1,..,O'_c)$, s(q) est un concept particulier défini uniquement en fonction de q, $O'_1,..,O'_c$ et $D_{RP}(s(q), O''_1,..,O''_p)$ est vraie et si i est le premier terme de q et si j est le premier terme de s(q) alors $j=s_{\mathbf{N}}(i)$.

On dira alors que D_R est une *définition récursive Platoniste ordonnée paramétrée*. On obtiendra alors la proposition, généralisant celle obtenue pour les définitions récursives ordonnées non pramétrées et permettant d'obtenir des propositions mathématiques simples vraies du type $P(O_1,..,O_r,O'_1,..,O'_c)$:

PROPOSITION 3.1Bc :

D_R étant une définition récursive Platoniste ordonnée paramétrée, avec les notations précédentes, il existe un et un seul A (noté aussi $A(O_1,..,O_r,O'_1,..,O'_c)$), défini uniquement en fonction de $O_1,..,O_r,O'_1,..,O'_c$, tel que :

(i)A est un ensemble et pour tout a tel que a est élément de A, « a est un couple et si x est tel que x est le premier terme de a, x est un naturel ».

(ii)Pour tout i tel que i est élément de **N**, il existe un et un seul b tel que « b est élément de A et i est le premier terme de b ».

(iii)Si t_0 est le concept particulier associé à $D_{PR1}(o,O_1,..,O_r)$, alors t_0 (noté aussi $t_0(O_1,..,O_r)$) est élément de A et pour tout j tel que j est élément de **N**, $D_{RC}((s_{\mathbf{N}}(j),A(s_{\mathbf{N}}(j)),(j,A(j)),O'_1,..,O'_c)$ ». (Identifiant (j,A(j)) avec l'élément de A de premier terme j).

On écrira : « A est tel que « A est une séquence indexée sur **N** et $D_{PR1eq}(A(0),O_1,..,O_r)$ et pour tout j élément de **N**,$D_{RCeq}(A(s_{\mathbf{N}}(j)),A(j),O'_1,..,O'_c)$ » ».

(Avec $D_{RCeq}(A(s_{\mathbf{N}}(j)),A(j),O'_1,..,O'_c)$ est équivalent avec $D_{RC}((s_{\mathbf{N}}(j),A(s_{\mathbf{N}}(j)),(j,A(j)),O'_1,..,O'_c)$, et de même pour $D_{PR1eq}(A(0),O_1,..,O_r)$).

On peut démontrer la proposition précédente en considérant les concepts généraux non-flous $O_{1G},..,O_{rG},O'_{1G},.,O'_{cG}$ pouvant être identifiés respectivement et simultanément à des concepts généraux non-flous $O_{10G},..,O_{r0G}$, $O'_{10G},.,O'_{c0G}$, avec par convention O_{i0G} (resp O'_{j0}) concept général non-flou pouvant représenter uniquement O_{i0} (resp O'_{j0}), si on a $(O_{10},..,O_{r0},O'_{10},.,O'_{c0})$ appartient à $(O_1,..,O_r,O'_1,.,O'_c)$sans paramètres fixes. On dira que les O_{iG} sont des *concepts généraux flottants* car ils peuvent être identifiés avec plusieurs concepts généraux non-flous. Une définition ou une proposition mathématique simple pourra utiliser des concepts généraux flottants comme des concepts généraux non-flous pouvant représenter un unique objet mathématique ordinaires. Si elle utilise les concepts généraux flottants $n_{1G},..,n_{kG}$, par définition elle sera vraie si elle est vraie en remplaçant $n_{1G},.,n_{kG}$ par n'importe quels concepts généraux $n_{10G},.,n_{k0G}$ avec lesquels $n_{1G},.,n_{kG}$ peuvent être identifiés simultanément. (voir 3.4 et 3.10).

On appellera les 2 propositions fondamentales précédentes *Propositions des ensembles récursifs ordonnés*. Ces Propositions sont fondamentales car elles permettent d'éviter l'utilisation explicite des définitions récursives Platonistes et aussi de repérer tous les termes d'une définition Platoniste récursive à l'aide des naturels.

On pourra cependant en général éviter l'utilisation des Propositions des ensembles récursifs ordonnés en utilisant directement des concepts généraux flottants.

DEFINITION 3.2A :

a)*Une bijection* est le concept général non-flou associé à la définition mathématique simple générale $D_{bij}(o)$: « o est une application et si (A,B) est tel que « A est un ensemble et B est un ensemble et o est élément de F(A,B) » , alors pour tout x élément de B, il existe un et un seul y tel que « y est élément de A et o(y)=x » ».

b)*Un ensemble fini* est le concept général non-flou associé à la définition mathématique simple $D_{EF}(o)$: « o est identique à l'ensemble vide ou « o est un ensemble et il existe (n,b) tel que « n est élément de **N** et b est une bijection et b est élément de F(o,n) » » ».

c)*Card* est une fonction-concept dont le concept de départ est le concept général non-flou « un ensemble fini » et tel que pour tout x tel que x est un ensemble fini, Card(x) est le concept particulier non-flou associé à la définition D_{Card}(o,x) : « « Si x est identique à l'ensemble vide alors o est identique à l'ensemble vide » et « si x est différent de l'ensemble vide alors « o est élement de **N** et il existe b tel que « b est une bijection et b est élément de *F*(o,x) » » ».
(On pourrait modifier la définition précédente en prenant comme concept de départ de « Card » le concept général « un ensemble », en a admettant que si A est défini par « A est tel que « A est un ensemble et A n'est pas un ensemble fini » », alors Card(A)=(Ø,Ø)).

REMARQUE 3.2B :

a)On remarque que les termes de la définition récursive $D_{\mathbf{N}}$ vérifient les Axiomes de Peano, c'est-à-dire, remplaçant « nombre » par « terme (de la suite récursive $D_{\mathbf{N}}$ définie précédemment)» :

A_{xp}1)Il existe un premier terme : σ
A_{xp}2)Chaque terme de la suite q a un unique successeur immédiat s(q).
Axp3)σ n'est le successeur immédiat d'aucun terme (Puisque sinon il contiendrait σ et serait donc non-vide.)
A_{xp}4)Si q_1 et q_2 sont 2 termes de la suite ayant le même successeur immédiat q_3 alors q_1 est identique à q_2 (Ceci se montre facilement).
A_{xp}5)Toute propriété Q(q) appartenant à σ et au successeur immédiat de tout terme ayant cette propriété appartient à tous les termes. (Ceci est évident car Q(σ) entraîne Q(s(σ))….qui entraîne de proche en proche Q(n), n terme quelconque de la suite).

On remarque que A_{xp}5 n'est qu'une forme de l'Axiome de récursivité.

b)Puisque les Axiomes de Peano sont des propositions vraies de la TMP concernant les naturels tels qu'on les a définis dans la TMP, on obtient que tous les théorèmes classiques concernant les naturels sont aussi vraies dans la TMP. En effet, d'après l'Axiome 2.2.E, les propositions qu'on peut déduire des propositions vraies de la TMP (et donc les théorèmes déduits des Axiomes de Peano) sont vraies.

DEFINITION 3.2C :

a)$O_{s(1)}$,..,$O_{s(n)}$ étant des symboles particuliers non-flous pré-définis, {$O_{s(1)}$,.,$O_{s(n)}$} pourra d'après les règles syntaxiques de convention être identifié avec $B_{s(n)}$ défini par la proposition Q($O_{s(1)}$,.,$O_{s(n)}$) : « $B_{s(n)}$ est tel que « Si $B_{s(1)}$ est tel que $B_{s(1)}$={$O_{s(1)}$}, $B_{s(2)}$ est tel que $B_{s(2)}$=$B_{s(1)}$U$O_{s(2)}$ et..et $B_{s(n-1)}$est tel que $B_{s(n-1)}$=$B_{s(n-2)}$U{$O_{s(n-1)}$} alors $B_{s(n)}$= $B_{s(n-1)}$U{$O_{s(n)}$}» ». Cette proposition est obtenue par {$O_{s(1)}$,.,$O_{s(n)}$}= {$O_{s(1)}$}U,..,U{$O_{s(n)}$} et l'Axiome 2.14.

On a vu dans l'Axiome 2.14 que U pouvait être identifié avec une fonction-concept. Il en résulte que Q($O_{s(1)}$,..,$O_{s(n)}$) est une proposition mathématique simple.

De plus, supposant $O_{s(1)0}$,..,$O_{s(n)0}$ représentés simultanément par $O_{s(1)}$,..,$O_{s(n)}$, utilisant l'Axiome 2.14, une récurrence immédiate sur les signes distinctifs montre que dans Q($O_{s(1)0}$,.,$O_{s(n)0}$), pour s(i) dans {s(1),.,s(n)}, $B_{s(i)}$ peut représenter un et un seul ensemble (noté {$O_{s(1)0}$,.,$O_{s(i)0}$}). Et donc les $O_{s(j)}$ étant des concepts particuliers non-flous, $B_{s(n)}$={$O_{s(1)}$,.,$O_{s(n)}$} est un concept particulier non-flou défini uniquement en fonction de $O_{s(1)}$,..,$O_{s(n)}$. $O_{s(j)}$ pourra aussi être un concept général non-flou pouvant représenter un unique objet.

On pourra plus généralement utiliser l'expression {$O_{s(1)}$,..,$O_{s(n)}$}, défini par Q($O_{s(1)}$,.,$O_{s(n)}$), dans une définition ou une proposition mathématique simple en un emplacement où une définition auxiliaire peut utiliser $O_{s(1)}$,..,$O_{s(n)}$ symboles particuliers non-flous pré-définis ou du type o_{ri}.

b)Une *séquence finie* sera le concept général non-flou associé à la définition mathématique simple générale D_{SF}(o) : « o est un couple ou « o est un ensemble fini non vide et pour tout i tel que i est élément de o, i est un couple et « si n est tel que Card(o)=n alors « Non(« n=0 ou n=1 ou n=2 ») » et pour tout j tel que j est élément de {1,..,n} il existe un et un seul x tel que « x est élément de o et j est le premier terme de x » » ».
(n étant un concept particulier non-flou pouvant représenter seulemement des naturels non nuls, on identifiera d'après les règles syntaxiques de convention {1,..,n} avec le concept particulier non-flou associé à D(o_n,n) : « o_n={k tel que « k est élément de **N** et 1 est inclus dans k et k est inclus dans n »}) ».

c)On peut aisément définir la relation non-floue d'ordre de multiplicité 2 « a comme nombre de termes» qui peut exister entre un couple (s,n), s séquence finie et n un naturel. (D_{sf}(s,n) : « s est un couple et n=2 » ou « s est une séquence finie et Card(s)=n ») (On écrira aussi « s est une séquence à n termes »).

d)On a déjà défini la relation non-floue « est le premier (ou le deuxième) terme de » pouvant exister entre un objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP et un couple. Il est évident qu'on peut généraliser ceci en admettant que la relation non-floue précédente peut exister entre un objet mathématique non-

relationnel et différent de l'EMP t et un naturel i et une séquence finie s ayant au moins 3 termes. (D(t,i,s) : « s est une séquence fini et « 3 est inclus dans s » et « (i,t) est élément de s » ».) (On écrira « t est le ième (premier) terme de s »).

PROPOSITION 3.3 :

Il existe des concepts généraux non-flous, qu'on peut identifier à **Z** et **Q**.

Preuve :

On a montré l'existence d'un concept général non-flou représentant un unique objet mathématique identifié à **N**.
D'après l'Axiome 2.14c), **N**×{1} représente un unique objet mathématique, qui est un ensemble (représenté par le concept général $\mathbf{Z}^{+}$), de même que **N***×{0}(représenté par le concept général $\mathbf{Z}^{*-}$) où **N***=**N**/{0} (On rappelle qu'on a identifié 1 et 0 à des concepts généraux représentant chacun un unique objet mathématique).
Et donc d'après l'Axiome 2.14, **N**×{1}U**N***×{0} représente un unique objet qu'on représentera par le concept général **Z**.
Z×(**Z** /{0,1}) représente un unique objet mathématique d'après l'Axiome 2.14.
On peut définir le concept général non-flou $C_{\mathbf{Q}}$ représentant une unique application de **Z**×(**Z** /{0,1}) dans *P*(**Z**×(**Z** /{0,1})) tel que pour tout élément (a,b) de **Z**×(**Z** /{0,1}) $C_{\mathbf{Q}}$((a,b))={(a',b') tel que (a',b') est élément de **Z**×(**Z** /{0,1}) et $a' \times_{\mathbf{Z}} b = a \times_{\mathbf{Z}} b'$}. (Comme on le verra dans la section suivante $\times_{\mathbf{Z}}$ est un concept général non-flou, défini très aisément en utilisant la multiplication dans **N** $\times_{\mathbf{N}}$, et représentant une unique fonction identifiée à la multiplication dans **Z**).
D'après l'Axiome 2.14e), $C_{\mathbf{Q}}$((a,b)) représente alors un ensemble défini uniquement en fonction de (a,b).
On définit alors **Q** comme le concept général non-flou pouvant représenter seulement Im($C_{\mathbf{Q}}$). (On peut identifier « Im » avec une fonction-concept).

PROPOSITION 3.4 :

a)L'addition et la multiplication dans **N**,**Q**,**Z** peuvent être identifiés à des objets mathématiques représentés par des concepts généraux ($+_{\mathbf{N}}$,$+_{\mathbf{Z}}$,$+_{\mathbf{Q}}$ et $\times_{\mathbf{N}}$, $\times_{\mathbf{Z}}$, $\times_{\mathbf{Q}}$).

b)De même on identifie « la valeur absolue dans **Q** de » et « l'opposé dans **Q** de » (notée $|\ \ |_{\mathbf{Q}}$) à des concepts généraux non-flous représentant chacun un unique objet (Le premier étant une application de **Q** dans $\mathbf{Q}^{+}$, le second une application de

Q dans **Q**) et la soustraction dans **Z** et **Q**, notées repectivement $-_{\mathbf{Z}}$,et $-_{\mathbf{Q}}$ à des concepts généraux non-flous représentant chacune une unique application.

c) On identifie aussi les relations d'ordres $<_E,>_E,\leq_E,\geq_E$, avec E l'ensemble **N**, **Q**,ou **Z** à des relations non-floues ayant la même signification que dans les mathématiques classiques.

Bien sûr on omettra les suffixes **N**,**Z**,**Q** lorsque le sens est évident d'après le contexte.

Preuve :

a) **N**×**N** représente un ensemble existant d'après l'Axiome 2.14.

On peut définir n_G et p_G concepts généraux non-flous flottants (voir 3.1Bc) tel que (n_G,p_G) peut être identifié à (n_{0G},p_{0G}) si et seulement si (n_0,p_0) est élément de $\mathbf{N}^2$. (n_G,p_G) pourra donc être identifié avec (1,3), (20,13).. . On rappelle (voir 3.1Bc) que les symboles n_G et p_G sont des *concepts généraux flottants* car ils peuvent être identifiés avec plusieurs concepts généraux non-flous.

On peut alors définir la définition récursive ordonnée D_{nG+} de premier terme $(0,n_G)$, de propriété récursive $D_{PRnG+}(o)$: « o est un couple de naturel » et telle que $s_{nG+}((i,j))= (s_{\mathbf{N}}(i),s_{\mathbf{N}}(j))$. On définit A_{nG+} comme le concept général non-flou (flottant) représentant l'ensemble dont les éléments correspondent à la définition $D_{AnG+}(o)$: « o est un terme de D_{nG+} ». On considère alors la définition mathématique simple générale $D_{(nG,pG)}$ (o) : « (p_G,o) est élément de A_{nG+} ». On remarque que n_G et p_G étant identifiés avec des concepts généraux non-flous, il existe un et un seul objet mathématique correspondant à cette définition générale et que cet objet mathématique est élément de **N**. $+_{\mathbf{N}}$ est alors un concept général non-flou pouvant représenter une unique fonction et défini par :

-$+_{\mathbf{N}}$ est élément de F(**N**×**N**,**N**).
-$D_{(nG,pG)}$ ($+_{\mathbf{N}}(n_G,p_G)$).

On a alors complètement défini $+_{\mathbf{N}}$. (En général et en particulier pour définir $+_{\mathbf{N}}$, on pourra éviter d'utiliser des concepts généraux flottants en utilisant directement la proposition 3.1Bc). On obtient facilement : $s_{\mathbf{N}}(n_G)=+_{\mathbf{N}}(n_G,1)$ (noté $n_G+_{\mathbf{N}}1$).

Plus généralement, si :
(i) A_G et B_G sont des un concepts généraux non-flous flottants pouvant chacun être identifié avec un concept général représentant un unique ensemble non vide.
(ii)a_G peut être identifié avec un concept général non-flou pouvant représenter un unique élément de A_G (et donc a_G concept général flottant).

(iii)$D_{aG}(o)$ est une définition mathématique simple n'utilisant pas nécessairement a_G mais pouvant utiliser d'autres concepts généraux flottants, telle que a_G étant identifié avec n'importe quel concept général non-flou un unique objet mathématique corresponde à cette définition et que de plus cet objet appartienne à B_G. (Comme pour définir $+_{\mathbf{N}}$, il pourra être intèressant de définir des concepts généraux flottants $a_{1G},..,a_{kG}$, avec si a_G est identifié avec un concept général non-flou, chaque a_{iG} ne peut être identifié qu'à un unique concept général non-flou. Par exemple ce sera le cas si a_G peut être identifié avec tout concept général non-flou c_{0G}, c_0 étant un élément de $\mathbf{N}^2$, alors si a_{1G} est le concept général non-flou flottant associé à $D_{a1G}(o)$: «o est le premier terme de a_G »).

Alors on admettra qu'on peut définir un concept général flottant f_G , défini uniquement en fonction de A_G,B_G par :

-f_G est élément de $F(A_G,B_G)$.

-$D_{aG}(f_G(a_G))$.

On peut cependant prouver l'assertion précédente en introduisant l'*opérateur logique* H tel que, si x_G est un concept général flottant, $H(x_G)$ est un symbole pouvant représenter tout objet mathématique x_0 tel que x_G peut être identifié avec x_{0G}. On montre que $H(x_G)$ est un concept général non-flou :

On suppose qu'on a défini successivement les concepts généraux flottants $n_{1G},..,n_{kG}$, n_{iG} étant défini par une expression du type : « n_{iG} est le concept général flottant associé à $D_{niG}(o_i)$ ». On définit alors les symboles particuliers $O_1,.,O_k$ par des définitions obtenues en remplaçant dans les définitions des n_{iG} « n_{iG} » par « O_i » et « est le concept général flottant associé à» par « est le symbole particulier associé à». On montre par une récurrence immédiate que les O_i sont des concepts particuliers non-flous. De plus par définition, $O_{j(1)0},..,O_{j(s)0}$ étant des objets mathématiques quelconques, on définit « $n_{j(1)},\ldots,n_{j(s)}$ peuvent simultanément et respectivement être identifiés avec $O_{j(1)0G},..,O_{j(s)0G}$ » exactement de la même façon que « $O_{j(1)},..,O_{j(s)}$ peuvent représenter simultanément $O_{j(1)0},..,O_{j(s)0}$ ». Les 2 propositions sont donc équivalentes et il en résulte qu'on peut identifier $H(n_{kG})$ avec $O_k$sans paramètres fixes et donc $H(n_{kG})$ est un concept général non-flou.

$O_1,..,O_n$ étant des concepts particuliers non-flous définis en utilisant des concepts généraux flottants, $(O_1,.,O_n)$sans paramètres fixes sera un concept général flottant. On peut généraliser la définition de H en définissant $H(n_{kG})_{n1G,.,npG}$ comme le concept général flottant tel que si $n_{1G},.,n_{pG}$ sont identifiés respectivement et simultanément avec n_{10G}, ..,n_{p0G}, $H(n_{kG})_{n1G,..,npG}$ est le concept général non-flou pouvant représenter tout objet n_{k0} tel que n_{kG} peut être identifié avec n_{k0G}. Il est évident que si on définit un concept particulier non-flou O_1 en utilisant un concept général flottant n_{1G}, les objets pouvant être représentés par O_1 dépendront du

concept général n_{10G} auquel est identifié n_{1G}. On définit formellement f_G en considérant $H(a_G,f_G(a_G))_{AG,BG}$.

De même on peut définir un concept général non-flou qu'on peut identifier avec la multiplication dans **N** et qu'on représentera par $\times_{\mathbf{N}}$. et la puissance dans **N**.

On peut aussi définir l'addition, la multiplication et la puissance dans **N** de la façon suivante qui est beaucoup plus simple :

On a vu que « Card » était une fonction-concept. On peut donc utiliser « Card(A) » dans une définition non-floue.

On définit alors facilement l'addition $+_{\mathbf{N}}$ et la multiplication $\times_{\mathbf{N}}$ dans **N** par, n et p étant 2 éléments quelconques de **N** :
$n +_{\mathbf{N}} p$ (identifié avec $+_{\mathbf{N}}((n,p))=\text{Card}\ (nU(p\times\{1\}))$) et $n\times_{\mathbf{N}}p=\text{Card}(n\times p)$. On définit la fonction "puissance$_{\mathbf{N}}$" de façon analogue, utilisant Card(F(p,n)).

De même on définit la relation non-floue $\leq_{\mathbf{N}}$ dans **N**, par :
« $n\leq_{\mathbf{N}}p$ » est équivalent à « (n,p) est élément de $\mathbf{N}^2$ et n est inclus dans p ».
On généralise alors les définitions de $<_{\mathbf{N}},>_{\mathbf{N}},\geq_{\mathbf{N}}$ dans **N**.
(On rappelle que pour définir une relation non-floue R d'ordre de multiplicité n>1, il suffit d'utiliser une proposition du type : « R est une relation non-floue d'ordre de multiplicité n et pour tous $O_{10},..,O_{n0}$ objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP, « $R(O_{10},..,O_{n0})$ est vraie » est équivalent à « $D((O_{10},..,O_{n0}))$ est vraie », avec $D((o_1,..,o_n)$ définition générale non-floue)).

On peut alors définir la fonction $-_{\mathbf{N}}$, (appelée soustraction dans **N**) d'ensemble de départ $\mathbf{N}^2{}_{-\mathbf{N}}=\{(a,b)$ tel que (a,b) est élément de $\mathbf{N}^2$ et $b\leq a\}$, avec pour tout (a,b) dans $\mathbf{N}^2{}_{-\mathbf{N}}$, $a-_{\mathbf{N}}b=\text{Card}(a/b)$.

Utilisant l'existence de l'addition, de la soustraction et de la multiplication dans **N**, il est facile utilisant le Lemme 2.18 de définir successivement des concepts généraux non-flous qu'on peut identifier avec l'addition et la multiplication dans **Z** et **Q** et qu'on notera $+_{\mathbf{Z}}, \times_{\mathbf{Z}}, +_{\mathbf{Q}}, \times_{\mathbf{Q}}$.

Par exemple $+_{\mathbf{Q}}$ sera définie par : Si (p,q) et (r,s) sont des éléments de $\mathbf{Z}\times(\mathbf{Z}/\{0,1\})$:

$C_{\mathbf{Q}}((p,q))+_{\mathbf{Q}}C_{\mathbf{Q}}((r,s))=C_{\mathbf{Q}}((p\times_{\mathbf{Z}}s+_{\mathbf{Z}}r\times_{\mathbf{Z}}S,\ q\times_{\mathbf{Z}}s))$.

b)On montre alors facilement le b) de la Proposition 3.4 :

On identifie « l'opposé dans E de » et « la valeur absolue dans E de » avec des concepts généraux représentant des applications de E dans E de E dans E^+, avec E l'ensemble **Z** ou **Q** . On définit aisément les ensembles $\mathbf{Z}^+$ et $\mathbf{Q}^+$. $\mathbf{Z}^+$ est identifié

avec $\mathbf{N}\times\{1\}$, et $\mathbf{Q}^+ = \{x$ / x est élément de **Q** et il existe y et il existe z tels que y est élément de $\mathbf{Z}^+$ et z est élément de $\mathbf{Z}^{*+}$ et $x=C_\mathbf{Q}(y,z)\}$

Puis à l'aide du concept général « est l'opposé dans E de » (E l'ensemble **Q** ou **Z**), on définit les concepts généraux non-flous $-_\mathbf{Q}$ et $-_\mathbf{Z}$, qui sont la soustraction classique dans **Q** et **Z**.

c)Utilisant $\mathbf{Q}^+$ et $\mathbf{Z}^+$, de même que $-_\mathbf{Q}$ et $-_\mathbf{Z}$, on généralise facilement la définition des relations non-floue $<_E$,$>_E$,$\geq_E$ et$\leq_E$ pour E= **Z** ou E=**Q** . On justifie aisément que les objets mathématiques précédents sont des relations non-floues.

On peut facilement définir utilisant l'Axiome 2.14 des ensembles $\mathbf{N}_\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}_\mathbf{Q}$, $\mathbf{N}_\mathbf{Q}$ (avec $\mathbf{N}_\mathbf{Q}$ est inclus dans $\mathbf{Z}_\mathbf{Q}$) qui sont respectivement des sous-ensembles de **Z**,**Q** et **Q** et qui sont respectivement analogues à **N**,**Z**,et **N**. Par exemple $1_\mathbf{Z}=(1,1)$, $1_\mathbf{Q}=C_\mathbf{Q}((1_\mathbf{Z},1_\mathbf{Z}))$.

PROPOSITION 3.5 :

a)Il existe un concept général non-flou, **R**, ayant les mêmes propriétés que l'ensemble des réels dans les mathématiques pré-Platonistes.
b)On peut définir des concepts généraux $+_\mathbf{R}$, $-_\mathbf{R}$ et $\times_\mathbf{R}$, identifiés avec l'addition, la soustraction et la multiplication classique dans **R**.
c)Pour E=**N**,**Z**,**Q**,**R** et n naturel supérieur ou égal à 2, on peut définir E^n et $E^\mathbf{N}$.

Preuve :

a)On a déjà montré l'existence de concepts généraux non-flous **Q** et **N**, ayant les mêmes propriétés que les ensembles **Q** et **N** dans les mathématiques pré-Platonistes.

D'après la Proposition 2.17 il existe un concept général non-flou représentant un objet unique $F(\mathbf{N},\mathbf{Q})$, dont on appellera chaque élément « une suite de rationnels »(« une suite de rationnels » est donc un concept général non-flou) .

On considère alors la définition classique d'une suite de Cauchy :
$D_{\text{Cauchy}}(o)$: « o est un élément de $F(\mathbf{N},\mathbf{Q})$ et pour tout ε tel que ε est un rationnel strictement positif, il existe N tel que «N est un naturel et pour tout i tel que $i>_\mathbf{N}N$ et pour tout j tel que $j>_\mathbf{N}N$, $|o(i)-_\mathbf{Q}o(j))|_\mathbf{Q}<_\mathbf{Q}\varepsilon$ » » (On a vu o(i) est l'image de i par o) .

$D_{\text{Cauchy}}(o)$ est évidemment basique puisqu'elle contient que o est élément de $F(\mathbf{N},\mathbf{Q})$ qui est un concept général non-flou représentant un ensemble.

On va montrer maintenant que $D_{Cauchy}(o)$ est une définition mathématique simple (notion définie dans la Définition 2.5), en donnant l'interprétation Platoniste de $D_{Cauchy}(o)$ (notion définie dans la Définition 2.5). Ceci entraînera d'après l'Axiome 2.5A que $D_{Cauchy}(o)$ est non-floue, ce qui entraînera l'existence de **S** défini comme étant l'ensemble des suites de Cauchy.

On peut exprimer $D_{Cauchy}(o)$ sous la forme « o est élément de *F*(**N**,**Q**) et pour tout ε symbole associé à la définition auxiliaire de niveau 0 $D_{aux\varepsilon}(o_\varepsilon)$: « o_ε est élément de $\mathbf{Q}^{*+}$ » il existe N tel que N est le symbole particulier associé à la définition auxiliaire de niveau 0 $D_{auxN}(o_c,o,\varepsilon)$: « o_c est élément de **N** et pour tout i symbole particulier (défini en fonction de o_c) associé à la définition auxiliaire (de niveau 1) $D_{auxi}(o_i ,o_c)$: « o_i est élément de **N** et $o_i >_{\mathbf{N}} o_c$ » et et pour tout j symbole particulier (défini en fonction de o_c) associé à la définition auxiliaire (de niveau 1) $D_{auxj}(o_j,o_c)$: « o_j est élément de **N** et $o_j >_{\mathbf{N}} o$ », $|o(i)-_{\mathbf{Q}}o(j)|_{\mathbf{Q}} <_{\mathbf{Q}} \varepsilon$ »

(On rappelle qu'on peut identifier o(i) avec Im(o,i), Im étant une fonction-concept).

Et donc dans $D_{Cauchy}(o)$ tout nouveau symbole est bien associé à une définition auxiliaire telle que définie dans la Définition 2.5. De plus il est évident que tout nouveau symbole de $D_{Cauchy}(o)$ ne peut représenter que des objets mathématiques non-relationnels et donc $D_{Cauchy}(o)$ est une définition mathématique simple et est donc non-floue. D'où l'existence de **S**.

On remarque que d'après la signification du concept primitif « il existe », si pour un O_0 et un ε $N(O_0,\varepsilon)$ n'est pas un concept particulier non-flou, alors $D_{Cauchy}(O_0)$ n'est pas vraie. Mais si O_0 est tel que pour tout ε appartenant à $\mathbf{Q}^{*+}$, $N(O_0,\varepsilon)$ est un concept particulier non-flou, alors d'après la signification du concept primitif « Pour tout », $D_{Cauchy}(O_0)$ est vraie.

O_0 étant un objet mathématique tel que $D_{Cauchy}(O_0)$ est vraie, ε pourra représenter tout ε_0 élément de $\mathbf{Q}^{*+}$, et ε représentant ε_0, N pourra représenter tout N_0 tel que $D_{auxN}(N_0,O_0,\varepsilon_0)$ est vraie. Et en accord avec la définition 2.5III, le fait que $D_{Cauchy}(O_0)$ est vraie est complètement déterminé par les objets pouvant être représentés par O_0,ε et N.

De plus, si $D_{Cauchy}(O_0)$ est vraie, dans $D_{Cauchy}(O_0)$, ε, $N(O_0,\varepsilon)$, i(N) et j(N) sont nécessairement des concepts particuliers non-flous de façon évidente.

On définit le concept général non-flou $C_{\mathbf{R}}$ pouvant représenter une unique application de S dans *P*(S), telle que pour tout s élément de S, $C_{\mathbf{R}}(s)$={r tel que r est

élément de **S** et pour tout ε rationnel strictement positif, il existe un naturel N tel que pour tout i naturel supérieur à N $|r(i)-_{\mathbf{Q}}s(i))|_{\mathbf{Q}}<_{\mathbf{Q}}\varepsilon$ }

D'après l'Axiome 2.14e) $C_{\mathbf{R}}(s)$ est un ensemble défini uniquement en fonction de s.

On identifie alors **R** avec $Im(C_{\mathbf{R}})$.

On peut utilisant l'Axiome 2.14 définir des sous-ensembles $\mathbf{N_R},\mathbf{Z_R},\mathbf{Q_R}$ de **R** ayant les mêmes propriétés que **N**,**Z**,**Q**.Avec $\mathbf{N_R}$ inclus dans $\mathbf{Z_R}$ inclus dans $\mathbf{Q_R}$.

On obtient par de déductions logiques relationnelles évidentes que la suite de *F*(**N**,**Q**) dont chaque terme est égal à 1 est une suite de Cauchy. Il en résulte que « une suite de Cauchy » est bien un concept général non-flou.

b)En utilisant $+_{\mathbf{Q}},-_{\mathbf{Q}}$ et $\times_{\mathbf{Q}}$ qu'on a défini plus haut, on définit immédiatement de façon classique $+_{\mathbf{R}},-_{\mathbf{R}}$ et $\times_{\mathbf{R}}$.

c)Pour E=**N**,**Z**,**Q**,**R**, et n=2, on identifiera E^2 avec E×E. Pour n naturel supérieur ou égal à 3 on a justifié l'existence dans la Proposition 2.17A de *F*({1,…,n},E). On a vu qu'on avait *F*({1,..,n},E) était égal à {(({1..,n},E)}×F_1({1,…,n},E), avec F_1({1,..,n},E) est un unique ensemble défini en fonction de n et E. On identifiera E^n avec cet ensemble.
De même on identifiera $E^{\mathbf{N}}$ avec F_1(**N**,E).

Si a est élément de E^n (ou de $E^{\mathbf{N}}$), par définition, pour tout i dan {1,.,n} (ou dans **N**), on aura, remarquant (({1,..,n},E),a) est un élément de *F*({1,..,n},E), a(i)=(({1,..,n},E),a)(i) , (ou a(i)=((**N**,E),a)(i)).

Si F est un ensemble inclus dans **N**, on peut généralise ce qui précède en définissant $E^F=F_1(F,E)$.

On peut généraliser ce qui précède pour F ensemble inclus dans **N**,**Z**,**Q**,**R**.

On peut prendre une définition alternative d'une suite de rationnels ou d'une suite de Cauchy (et donc de **R**) en remplaçant dans leurs définitions *F*(**N**,**Q**) par $\mathbf{Q}^{\mathbf{N}}$.

PROPOSITION 3.6 :

a)n_G étant identifié avec un concept général non-flou pouvant représenter un unique naturel supérieur ou égal à 3 et $O_{s(1)},\ldots,O_{s(nG)}$ étant des symboles particuliers non-flous, alors on peut d'après les règles syntaxiques de convention identifier

$(O_{s(1)},.,O_{s(nG)})$ comme étant le symbole particulier non-flou défini par la proposition mathématique simple :
$P(O_{s(1)},..,O_{s(nG)})$: « $(O_{s(1)},\ldots,O_{s(nG)})$ est tel que $(O_{s(1)},..,O_{s(nG)})=\{(1,O_{s(1)}),..,(n,O_{s(nG)})\}$ »
b)Dans le cas où les $O_{s(i)}$ sont des concepts particuliers non-flous, alors $(O_{s(1)},\ldots,O_{s(nG)})$ est un concept particulier non-flou défini uniquement en fonction de $O_{s(1)},\ldots,O_{s(nG)}$. On aura alors $(O_{s(1)},.,O_{s(nG)})$ est une séquence finie à n_G termes.

Preuve :

Ceci est une conséquence immédiate de la définition 3.2C.

PROPOSITION 3.7 :

a)Des concepts généraux non-flous pouvant être identifiés à des groupes, à des corps, à des espaces vectoriels de toute dimension, à des vecteurs existent.

b)On peut identifier **C** à un concept général non-flou, de même que l'addition, la soustraction et la multiplication dans **C**.

Preuve :

a) On a vu l'existence d'un concept général non-flou pouvant être identifié à **Q**, de même que des concepts généraux non-flous pouvant être identifiés à la multiplication et à l'addition dans **Q**, qu'on notera $\times_{\mathbf{Q}}$ et $+_{\mathbf{Q}}$.

On peut obtenir très facilement, de la même façon qu'on a obtenu la définition $D_{Cauchy}(o)$, à partir des définitions classiques des groupes commutatifs, des corps, des espaces vectoriels, des définitions générales mathématiques simples $D_{GRC}(o)$, $D_{CO}(o)$ et $D_{EV}(o)$. D'après l'Axiome 2.5A, on peut justifier que ces définitions sont non-floues en montrant successivement (Car $D_{EV}(o)$ utilise « un corps » et « un groupe ») qu'« un groupe commutatif », « un corps » et « un espace vectoriel » sont des concepts généraux non-flous, respectivement associés aux définitions $D_{GRC}(o)$, $D_{CO}(o)$ et $D_{EV}(o)$.

Chacune des 3 définitions a une interprétation Platoniste. Par exemple une interprétation Platoniste de $D_{EV}(o)$ sera la suivante (Les 2 autres étant plus simples mais s'obtiennent de la même façon. On suppose qu'on a déjà montré qu' « un groupe commutatif » et « un corps » étaient des concepts généraux non-flous) :

$D_{EV}(o)$: «o est une séquence finie à 3 termes et si E est le symbole particulier associé à la définition auxiliaire de niveau 0 $D_{aux1}(o_1,o)$: « o_1 est le premier terme de o », + est le symbole particulier (défini en fonction de o) associé à la définition auxiliaire de niveau 0 $D_{aux2}(o_2,o)$: « o_2 est le deuxième terme de o », $._{K,E}$ est le symbole particulier (défini en fonction de o) associé à la définition

auxiliaire de niveau 0 $D_{aux3}(o_3,o)$: « o_3 est le troisième terme de o » », alors (E,+) est un groupe commutatif et il existe T symbole particulier associé à (la définition auxilliaire de niveau 0) $D_{auxT}(o_T, E,+,._{K,E})$,avec :

$D_{auxT}(o_T,E,+,._{K,E})$: « o_T est une séquence finie à 3 termes et si K (resp.$+_K$, resp. $\times_K$) est le symbole particulier défini en fonction de o_T associé à la définition auxiliaire interne de niveau 1 $D_{auxK}(o_4,o_T)$: « o_4 est le premier terme de o_T » (resp.$D_{aux+K}(o_5,o_T)$: « o_5 est le 2ième terme de o_T », resp.$D_{aux\times K}(o_6,o_T)$: « o_6 est le 3ième terme de o_T ») », alors « $(K,+_K,\times_K)$ est un corps commutatif et $._{K,E}$ est élément de $F(K\times E,E)$ » et pour tout α (resp.β) symbole particulier associé à la définition auxiliaire interne de niveau 1 $D_{aux7}(o_7,K)$: « o_7 est élément de K » (resp. $D_{aux8}(o_8,K)$: « o_8 est élément de K »), et pour tout x (resp.y) symbole défini en fonction de o_T associé à la définition auxiliaire interne de niveau 1 $D_{aux9}(o_9,E)$: « o_9 est élément de E » (resp. $D_{aux10}(o_{10},E)$: « o_{10} est élément de E ») ,

« $1_K ._{K,E} x=x$ (1_K élément neutre de $(K,+_K,\times_K)$) et $\alpha ._{K,E}(\beta ._{K,E} x)=(\alpha\times_K\beta)._{K,E}x$ et $(\alpha+_K\beta)._{K,E}x=\alpha ._{K,E}x+\beta ._{K,E}x$ et $\alpha ._{K,E}(x+y)= \alpha ._{K,E}x+\alpha ._{K,E}y$ » ».

En accord avec la définition 2.5III, O_0 étant un objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP, le fait que $D_{EV}(O_0)$ est vrai dépend seulement des objets pouvant être représentés par $E,+,._{K,E}$ et T.

De plus, si $D_{EV}(O_0)$ est vrai, alors il est évident que $E(O_0),+(O_0),._{K,E}(O_0)$ sont des concepts particuliers non-flous (car O_0 est une séquence finie à 3 termes), de même que $T(E,+,._{K,E})$ (sinon $D_{EV}(O_0)$ n'est pas vraie), $K(T),+_K(T),\times_K(T)$ (car T est une séquence finie à 3 termes), α(K), β(K) (Car K est non vide), et x(E), y(E) (car E est non-vide).

(On aurait pu à la place de définir le symbole particulier T définir le symbole particulier $(K,+_K,\times_K)$ et aussi remplacer $D_{EV}(o)$ par $D_{EV}(o_E,o_{+E},o_{.K,E})$. En général on emploie la proposition mathématique simple suivante, dans laquelle les symboles particuliers définis sont définis implicitement en fonction des définitions auxiliaires :P_{EV} : « « Ev est tel que Ev est un espace vectoriel » est équivalent à « « Ev est une séquence à 3 termes » et « si $(E,+_E,._{K,E})$ est tel que (E,$+_E$,.K,E) est identique à Ev , alors $D_{EV}(E,+_E,.K,_E)$.» ».

«

Montrons par exemple qu'il existe au moins un objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP correspondant à $D_{GRC}(o)$ et $D_{CO}(o)$ (Ce qui est nécessaire pour montrer qu' « un groupe commutatif » et « un corps » sont des concepts généraux non-flous) :

P1 :a,b,c,d sont tels que a,b,c sont éléments de **Q** et d est élement de **Q***.
P2 :$a+_{\mathbf{Q}}b=b+_{\mathbf{Q}}a$

P3 :$a+_{\mathbf{Q}} (b+_{\mathbf{Q}} c)=(a+_{\mathbf{Q}}b) +_{\mathbf{Q}}a$
P4 :$0_{\mathbf{Q}} +_{\mathbf{Q}} a=a$
P5 :Il existe a' tel que $a +_{\mathbf{Q}} a'=0$

P6 :$a\times_{\mathbf{Q}}b=b\times_{\mathbf{Q}} a$
P7 :$a\times_{\mathbf{Q}} (b+_{\mathbf{Q}} c)=a\times_{\mathbf{Q}} b+_{\mathbf{Q}} a\times_{\mathbf{Q}} c$
P8 :$(a\times_{\mathbf{Q}} b) \times_{\mathbf{Q}} c=a\times_{\mathbf{Q}} (b\times_{\mathbf{Q}} c)$
P9 :$1_{\mathbf{Q}}\times_{\mathbf{Q}} a=a$
P10 :Il existe d' tel que $d'\times_{\mathbf{Q}} d=1_{\mathbf{Q}}$

P11 :$D_{GRC}((\mathbf{Q},+_{\mathbf{Q}}))$ est vraie.

P12 :$D_{CO}((\mathbf{Q},+_{\mathbf{Q}}, \times_{\mathbf{Q}}))$ est vraie.

Dans les déductions logiques relationnelles précédentes, P1 définit les concepts particuliers non-flous, a,b,c,d. Puis P1,..,P10 peuvent être identifiées d'après l'Axiome 2.5 à des propositions mathématiques simples vraies de façon évidente. P11 et P12 sont alors des déduction logiques relationnelles évidente considérant $D_{GR}((\mathbf{Q},+_{\mathbf{Q}}))$ et $D_{CO}((\mathbf{Q},+_{\mathbf{Q}},\times_{\mathbf{Q}}))$.

On peut définir classiquement une fonction $+_{\mathbf{Q3}}$ de $\mathbf{Q}^3\times\mathbf{Q}^3$ dans $\mathbf{Q}^3$ et une fonction $._{\mathbf{Q,Q3}}$ de $(\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}^3)$ dans $\mathbf{Q}^3$ tel que $D_{EV}((\mathbf{Q}^3,+_{\mathbf{Q3}} , ._{\mathbf{Q,Q3}}))$ soit vraie.

$(E,+_{E},._{K,E})$ étant un espace vectoriel, on dira qu'un élément de E est un *vecteur* de $(E,+_{E},._{K,E})$. On trouve aisément une définition mathématique simple permettant de justifier qu'*un vecteur* peut être identifié à un concept général non-flou et qu' « *est un vecteur de l'espace de l'espace vectoriel* » peut être identifiée avec une relation non-floue d'ordre de multiplicité 2 pouvant exister entre un vecteur et un espace vectoriel.

Ce qui précède justifie qu' « un groupe commutatif », « un corps », « un espace vectoriel » sont des concepts généraux non-flous de la TMP, ayant les mêmes propriétés que dans les mathématiques classiques. On peut de la même façon identifier l'ensemble des concepts des théories mathématiques classiques avec des concepts généraux non-flous de la TMP.

b)On a vu qu'on pouvait définir dans la TMP des concepts généraux non-flous représentant l'addition et la multiplication dans $\mathbf{R}$, notées $+_{\mathbf{R}}$, $-_{\mathbf{R}}$ et $\times_{\mathbf{R}}$. On peut alors définir un concept général non-flou représentant l'addition dans $\mathbf{R}^2$ notée $+_{\mathbf{R2}}$. Dans la TMP on identifie $\mathbf{C}$ au concept général non-flou $\mathbf{R}^2$. On identifie

l'addition dans **C**, notée $+_{\mathbf{C}}$ avec le concept général non-flou $+_{\mathbf{R2}}$ défini précédemment. A l'aide des concepts généraux $+_{\mathbf{R}}$,$-_{\mathbf{R}}$ et $\times_{\mathbf{R}}$, on identifie la multiplication dans **C** avec un concept général non-flou $\times_{\mathbf{C}}$ représentant un unique objet (application de **C**×**C** dans **C**).

a et b étant deux élément de **R**, on pourra identifier $a_{\mathbf{C}}$ avec l'élément de **C** (a,0), et ib avec l'élément de **C** (0,b). On identifiera donc $a_{\mathbf{C}}+_{\mathbf{C}}ib$ avec l'élément de **C** (a,b).

D'après ce qui précède, un élément de $\mathbf{R}^2$ pourra donc être considéré comme un vecteur, un nombre complexe ou comme on le verra plus loin un point du plan Euclidien.

3.8 PLAN EUCLIDIEN

On identifiera dans la TMP le *plan Euclidien* avec l'ensemble $P= \mathbf{R}^2$, on appellera alors « *points du plan Euclidien*» les éléments de $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^2$ étant considéré comme le plan Euclidien. « une *droite du plan Euclidien* » sera identifié avec à un concept général non-flou représentant des sous-ensembles particuliers de *P*, (Défini par une définition mathématique simple utilisant $+_{\mathbf{R}}$ et $\times_{\mathbf{R}}$) et « *est parallèle dans le plan Euclidien à* » à une relation non-floue pouvant exister entre 2 droites du plan Euclidien. A,B étant 2 points du plan Euclidien, on identifiera le vecteur **AB** avec F_{vp}((A,B)), F_{vp} étant une fonction-concept telle que Dep(F_{vp}) peut représenter tous les couples de points du plan Euclidien, et F_{vp}((A,B)) est égal au vecteur de $(\mathbf{R}^2,+_{\mathbf{R2}},._{\mathbf{R,R2}})$ $(x_B-_{\mathbf{R}}x_A,y_B-_{\mathbf{R}}y_A)$.De même, on identifiera le segment [A,B] avec F_{SGP}((A,B)), F_{SGP} étant une fonction-concept.

Dans la TMP, la *distance dans le plan Euclidien* d_{PE} sera identifiée avec un concept général non-flou pouvant représenter (classiquement) une unique fonction de P^2 dans $\mathbf{R}^+$. La *norme vectorielle dans le plan Euclidien* n_{PE} pourra aussi être identifiée avec un concept général non-flou pouvant représenter (classiquement) une unique fonction de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^+$. Dans la TMP, « *Un cercle dans le Plan Euclidien* », « *un triangle dans le Plan Euclidien* » seront identifiés avec des concepts généraux non-flous pouvant représenter certains sous-ensembles de *P*. Le *produit scalaire dans le Plan Euclidien* pourra aussi être identifié avec un concept général non-flou pouvant représenter (classiquement) une unique fonction de $\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2$ dans **R** .Une *distance*, *une norme* pourront être identifiées avec des concepts généraux non-flous. A partir de leur définition classique, on trouve aisément les définitions mathématiques simples associées aux concepts généraux non-flous précédents. Les Axiomes d'Euclide, le Théorème de Thalès généralisé et sa réciproque, le Théorème de Pythagore apparaissent alors comme des théorèmes de la TMP, c'est-à-dire des déductions logiques relationnelles dans la TMP des définitions précédentes. Le produit scalaire dans le Plan Euclidien permettant de

définir les concepts généraux non-flous « un *triangle rectangle dans Plan Euclidien* » et « *un angle droit dans le Plan Euclidien* »). On a donc montré qu'il existe dans la TMP des objets mathématiques vérifiant complètement les Axiomes d'Euclide. On pourra généraliser ceci en identifiant l'espace géométrique à 3 dimensions de même que les surfaces de la géométrie Riemannienne à des objets mathématiques de la TMP.

3.9 FONCTIONS-CONCEPT RECURSIVES

a)On peut définir une fonction-concept F,dite *fonction-concept récursive*, de la façon suivante :
On suppose :
-Qu'on a une définition mathématique simple générale (et donc non-floue) $P_{rF}(o)$ dite *propriété récursive associée* à F.
-Que A_1 et A_2 étant les symboles particuliers associés à $P_{rF}(o)$, A_1 et A_2 sont des concepts-particuliers non-flous.
-Qu'on a une définition mathématique simple (et donc non-floue) $D_{rF}(o,A_1,A_2)$, dite *définition récursive associée* à F et telle que si A_3 est le symbole particulier non-flou associée à cette définition, A_3 est un concept particulier non-flou défini uniquement en fonction de A_1,A_2 et de plus que tout objet A_{30} pouvant être représenté par A_3 correspond à $P_{rF}(o)$. (Ce qui est équivalent $P_{IF}(A_3)$ est vraie).

Alors par définition, le concept de départ de F pourra représenter :
-Tout couple $(1,a_{10})$, avec a_{10} correspond à $P_{rF}(o)$.
-Tout couple $(n,(a_{10},..,a_{n0}))$, avec n naturel strictement supérieur à 1 et $a_{10},..,a_{n0}$ correspondent à $P_{rF}(o)$.
On aura alors avec les notations précédentes, par définition d'une fonction-concept récursive :
$F((1,a_{10}))=a_{10}$.
Et pour i supérieur ou égal à 1, $F((i+1,(a_{10},.,a_{i+10}))$ sera défini par récursivité par :
$D_{rF}(F((i+1,(a_{10},.,a_{i+10})), F((i,(a_{10},.,a_{i0})),a_{i+10})$
On admet axiomatiquement comme évident qu'on a bien défini une fonction-concept.

b)Par exemple, on pourra définir la fonction-concept récursive *sommation multiple de réels* $F_{\Sigma R}$ en définissant la propriété récursive et la définition récursive associées :
$P_{\Sigma R}(o)$: « o est élément de **R** »
$D_{\Sigma R}(F_{\Sigma R}(i+1, (a_{10},..,a_{i+10})), F_{\Sigma R}(i, (a_{10},..,a_{i0})) ,a_{i+10}))$:
« $F_{\Sigma R}(i+1, (a_{10},..,a_{i+10}))= F_{\Sigma R}(i, (a_{10},..,a_{i0})+_{\mathbf{R}}a_{i+10}$ ».

3.10 REMARQUE

Supposons qu'on ait des concepts particuliers non-flous $O_1,..,O_n$. On définit alors les concepts généraux non-flous flottants (voir 3.1Bc et 3.4) $O_{1G},..,O_{nG}$, avec $O_{1G},..,O_{nG}$ peuvent être identifiés simultanément avec $O_{10G},..,O_{n0G}$ si et seulement si $O_{10},..,O_{n0}$ pouvant être représentés simultanément par $O_1,..,O_n$. On rappelle que par convention O_{i0G} est un concept général non-flou pouvant représenter uniquement O_{i0}. On dira $(O_{1G},.,O_{nG})$ *est identifié avec* $(O_{10G},.,O_{n0G})$.

On suppose qu'on a montré qu'une proposition mathématique simple générale utilisant $O_{1G},..,O_{nG}$ et notée $P(O_{1G},..,O_{nG})$ est vraie. Par définition, cela signifiera que si $(O_{1G},..,O_{nG})$ peut être identifié avec $(O_{10G},..,O_{n0G})$, $P(O_{10G},..,O_{n0G})$ est vraie. Or par définition, $P(O_{10G},..,O_{n0G},O'_{10},..,O'_{p0})$ est vraie si et seulement si $P(O_{10G},..,O_{n0G},O'_{10},..,O'_{p0})$ est vraie (O'_{i0} identifié avec un concept particulier non-flou pouvant représenter l'unique objet O'_{i0}). Et donc $P(O_1,..,O_n)$ est vraie.

Si on a une proposition mathématique simple générale $P(O_{1G},..,O_{kG},n_G)$, avec $O_{1G},..,n_G$ concepts généraux flottants avec n_G peut être identifié avec tout n_{0G}, n_0 naturel quelconque et qu'on a montré $P(O_{1G},..,O_{kG},0)$ est vraie de même que , n étant défini par « n est tel que n est élément de **N** », « Si $P(O_{1G},.,n)$, alors $P(O_{1G},..,s_N(n))$ », alors $P(O_{1G},..,O_{kG},n_G)$ est vraie (preuve par récurrence). Il en résulte qu'on a la même propriété remplaçant $O_{1G},..,n_G$ par des concepts particuliers non-flous $O_1,..O_k,n$. (*preuve par récurrence paramétrée*).

4.CONCLUSION

Nous avons dans cet article exposé les bases d'une Théorie Mathématique Platoniste (TMP). On a vu en Introduction que le concept primitif « existe », dans la proposition « O_0 existe dans l'EMP », avait une première signification intuitive qui était celle qu'elles ont dans les théories mathématiques classiques, et une seconde signification dans la TMP qui signifiait *existe dans une réalité abstraite*, de la même façon que les cercles et les droites existent dans le plan Euclidien dans la théorie philosophique du Platonisme.

On a donné les méthodes permettant de justifier théoriquement que les concepts mathématiques classiques peuvent être identifiés à des objets mathématiques existant dans l'Espace Mathématique Platoniste. On a donc justifié théoriquement l'existence Platoniste de ces concepts mathématiques classiques. Il est remarquable qu'on obtient l'existence de ces concepts mathématiques classiques à partir de l'ensemble vide. La TMP des ensembles apparaît consistante en résolvant les Paradoxes de Cantor et de Russel grâce à l'Axiome 2.14e). On a

introduit le concept fondamental de définition non-floue, et admis l' Axiome 2.5A permettant de justifier qu'une définition est non-floue.

Nous verrons dans un second article que la TMP donne une interprétation théorique Platoniste à l'ensemble des mathématiques classiques. Pour cela on établira une Logique Platonicienne des propositions de la TMP. La TMP est complètement nouvelle puisque bien qu'il existe beaucoup de théories philosophiques sur le Platonisme (voir les Références) et que la plupart des mathématiciens ont l'idée d'une signification Platoniste des mathématiques, une Théorie mathématique Platoniste et consistante s'appliquant à l'ensemble des mathématiques n'a jamais été proposée.

Références :

1.Nagel, Newman,Godel, Girard: Le théorème de Godel, Seuil, Paris 1992
2. E.J. Borowski, J.M Borwein, Mathematics, Collins Dictionnary (G.B, 1989)
3. E. Giusti, La naissance des objets mathématiques ,Ellipses, (Paris, 2000)
4. Largeault, Logique Mathematiques, Armand Colin,(Paris ,1992)
5. P.Thiry, Notions de logique,Deboeck Université,(Bruxelles ,1998)
6..Jennifer Bothamley, Dictionary of Theories, (visible ink press,2002)
7.Thierry Delort, Logique Platonicienne des propositions, Théories d'or 9e édition, Editions Books on Demand, Paris (2017).

Article:LOGIQUE PLATONICIENNE DES PROPOSITIONS
Auteur:Thierry DELORT
Date :Janvier 2017
Extrait du livre : Théories d'or 9e édition, Editions Books on Demand, Paris.

Résumé :

Dans un premier article [(1)], nous avons exposé les bases d'une Théorie Mathématique Platoniste (TMP), en montrant comment par cette théorie on pouvait obtenir l'existence au sens Platoniste des concepts mathématiques de base (**N**,**Q**,**R**, les espaces vectoriels…)

Dans ce second article, on montre comment la TMP permet d'interpréter l'ensemble des théories mathématiques de façon Platoniste. Pour cela on expose une Théorie de Logique Platonicienne (TLP) qui est la partie logique de la TMP .On montre que la TLP donne des justifications théoriques à des Lemmes correspondant au Principe du Tiers-exclu et au Principe de Non-contradiction de la théorie classiquement admise de logique formelle, ainsi qu'à la consistance des théories mathématiques classiques. De plus on verra que la TLP donne une interprétation de Platoniste de l'ensemble des théories basées ou utilisant les mathématiques, notamment l'ensemble des théories physiques.

Nous voyons donc dans ce second article que la TMP permet d'interpréter l'ensemble des théories mathématiques ou basées sur les mathématiques.

Mots clés : Logique - Platonisme - Principe du Tiers-exclu - Principe de Non-contradiction.

1.INTRODUCTION

Dans un article précédent [(1)], on a exposé les bases d'une Théorie Mathématique Platoniste (TMP), de logique et des fondations des mathématiques.

Dans cet article, nous montrons comment la TMP peut interpréter l'ensemble des théories mathématiques. Pour cela on expose une Théorie de Logique Platonicienne (TLP) qui est la partie logique de la TMP, en donnant une interprétation Platoniste à toutes les théories mathématiques classiques ainsi qu'aux propositions usuelles et aux démonstrations mathématiques. Nous verrons que cette interprétation est totalement nouvelle et qu'elle donne une justification théorique nouvelle à des lemmes de la TLP qui sont analogues aux Principe du Tiers-exclu et au Principe de Non-contradiction, ces derniers étant admis dans les théories

classiques de logique basées sur le formalisme. Elle donne aussi une justification théorique à la consistance des théories mathématiques classiques.

On rappelle l'Axiome fondamental de la TMP :

AXIOME 1.1 :

a) « α est *un objet mathématique* » est équivalent à « α existe dans l' *Espace mathématique Platonique* (EMP) ».

b)Si α est un objet mathématique alors α est un *objet mathématique relationnel* ou (exclusif) un *objet mathématique non-relationnel* ou (exclusif) un *objet mathématique non-relationnel mixte*.

c)Il existe un et un seul objet mathématique non-relationnel α tel que α est l' Espace Mathématique Platonique.

On rappelle que dans un premier article (1) , on a défini les symboles particuliers non-flous et les concepts particuliers et généraux non-flous. On a aussi défini l'ensemble des naturels **N** dans la TMP, ainsi que les séquences finies et aussi les relations non-floues d'ordre de multiplicité n (n naturel quelconque) et les relations mixtes non-floues. On a vu que toute relation non-floue était une relation mixte non-floue mais que la réciproque n'était pas vraie et qu' « une relation mixte non-floue » avait la même signification qu' « un objet mathématique relationnel ».

REMARQUE 1.2 :

a)On a vu dans le 1ier article 3 façons de définir un concept général non-flou :

-La première possibilité est de la définir par des définitions axiomatiques partielles, qui sont en général équivalentes à des propositions mathématiques simples ce qui est presque seulement utilisé pour définir les concepts généraux des fondations des mathématiques (un ensemble, l'EMP, une relation floue, un couple…)

-La 2ième possibilité est de le définir en l'associant à une définition générale (c'est-à-dire n'utilisant pas de concepts particuliers pré-définis) non-floue D(o) (ou $D(o_1,..,o_n)$). On pourra donc utiliser la proposition :

« « un C1 » est un concept général non-flou et « Si O est tel que O est un objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP, « O est un C_1 » est équivalent à « D(O) ».

-Il existe une 3ième possibilité :

$O(O_1,..,O_n)$ étant un concept particulier non-flou, on a défini dans le 1ier article le symbole « $O(O_1,..,O_n)$ sans paramètres fixes » et on a montré qu'il était un concept général non-flou. On pourra donc définir un concept général non-flou à partir de tout concept particulier non-flou.

On remarque cependant qu'on ne peut définir complètement un concept général non-flou « un C_1 » en utilisant seulement une proposition mathématique simple, puisque « un C_1 est un concept général non-flou » ne peut pas être utilisé par une proposition mathématique simple.

b)Pour définir une relation non-floue R, on procède comme suit :

On considère une définition générale non-floue $D(o_1,\dots,o_n)$. On définit alors une relation non-floue R d'ordre de multiplicité n par la proposition :

« R est une relation non-floue d'ordre de multiplicité n et pour tous $O_1,..,O_n$ objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP, $R(O_1,..,O_n)$ est équivalent à $D(O_1,..,O_n)$ ».

On ne peut pas définir complètement une relation non-floue R par une proposition mathématique simple puisque « R est une relation non-floue » ne peut pas être utilsé par une proposition mathématique simple.

2.THEORIE DE LOGIQUE PLATONICIENNE DES PROPOSITIONS

THEOREME 2.1 :

R_1 et R_2 étant des relations mixtes non-floues et O_{10} et O_{20} étant des objets mathématiques quelconques, on a chacune des 3 propositions « $Non(R_1(O_{10}))$ », « $R_1(O_{10})$ et $R_2(O_{20})$ », « $R_1(O_{10})$ ou $R_2(O_{20})$ » est vraie ou (exclusif) n'est pas vraie.

Preuve :

Pour justifier le Théorème précédent on écrit les tables de vérité correspondant à chacune des 3 propositions, analogues aux tables de vérité utilisées en logique formelle. On remarque que la 1^{ière} table a 2 cases, et les 2 autres ont chacune 4 cases. Les cases représentent tous les cas possibles. Dans chaque case on met V_{ex} pour « vraie exclusivement » et F_{ex} pour « n'est pas vraie exclusivement ». D'après la signification des concepts primitifs « Non », « et », « ou » ces tables sont analogues à celles en logique formelle, avec V_{ex} ou F_{ex} dans chaque case ce qui prouve le théorème.

REMARQUE 2.2 :

Une conséquence du Théorème précédent est que $R_1,..,R_k$ étant des relations non-floues d'ordre respectif m(1),..,m(k), utilisant ces relations et les concepts primitifs « et », « ou », « Non », on peut définir une multitude de relations. Mais celles-ci ne sont pas en général des relations non-floues mais des relations mixtes non-floues. Par exemple, R_1 étant une relation non-floue, si on définit R_2 par : R_2 est un objet mathématique relationnel tel que pour tout objet mathématique O_0, « « $R_2(O_0)$ » est vraie » est équivalent à « « Non($R_1(O_0)$) » est vraie », R_2 n'est pas une relation non-floue car $R_2(O_0)$ est vraie pour O_0 objet mathématique relationnel. Mais on a cependant R_2 est une relation mixte non-floue d'après le Théorème précédent.

Cependant, si on obtient une relation mixte non-floue notée R_m en utilisant $R_1,.,R_k$ et les concepts primitifs « et », « ou », « Non », on peut obtenir une relation non-floue qui est la restriction de R_m aux objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP, notée R_{mNF}, telle que pour tout O_0 objet mathématique, « « R_{mNF} (O_0) » est vraie » est équivalent à « « O_0 est un objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP et $R_m(O_0)$ » est vraie ».

De même, n étant un naturel quelconque supérieur ou égal à 2, on peut obtenir la restriction de R_m aux séquences finies à n termes notée $R_{mNF(n)}$ qui est une relation non-floue d'ordre de multiplicité n.

DEFINITION 2.5 :

R étant une relation d'ordre de multiplicité n (n>1), on pourra définir la *base* de R comme un concept général non-flou ($c_1,..,c_n$) représentant des séquences de n objets. Alors pour tous objets mathématiques $O_{10},.,O_{n0}$ $R(O_{10},..,O_{n0})$ ne peut être vraie que si la séquence ($O_{10},..,O_{n0}$) appartient à ($c_1,..,c_n$). Si on ne précise pas la base de R, celle-ci sera le concept général non-flou « une séquence finie à n termes ».

EXEMPLE 2.6 :

On pourrait par exemple considérer que la relation non-floue « est élément de » aura comme base le concept général non-flou (c_1,c_2) associé à la définition générale non-floue $D(o_1,o_2)$: « o_1 est un objet mathématique relationnel différent de l'EMP et o_2 est un ensemble ».

DEFINITION 2.7 :

a)On appellera *proposition élémentaire Platoniste stable de type relation* une expression P_{el} du type :P_{el} :$R(O_1,..,O_n)$ telle que :

(i) R est un concept relationnel général représentant une unique relation non-floue d'ordre de multiplicité n.

(En général R est définie en utilisant des concepts généraux non-flous ou des concepts généraux relationnels représentant chacun une relation non-floue. R pourra partiellement définir ceux-ci.)

(ii)$O_1,\ldots,O_n$ sont des concepts particuliers non-flous définis avant P ou des concepts généraux non-flous représentant chacun un unique objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP (**N**,**Q**,**R**…).

On remarque que O_{i0} étant un objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP, on peut remplacer O_i par O_{i0}, en définissant le concept général non-flou C_i pouvant représenter l'unique objet O_{i0}, et en remplaçant O_i par C_i. On identifie alors C_i avec O_{i0}. On peut aussi identifier O_{i0} avec le concept particuler non-flou prédéfini O_i associé à la définition D(o) : « o appartient au concept général C_i ».

b)P_{el} étant une proposition élémentaire Platoniste stable de type relation P_{el} :$R(O_1,..,O_n)$:

On dira que « P_{el} est *vraie* » si :

Pour toute séquence $(O_{10},..,O_{n0})$ pouvant être représentée par $(O_1,..,O_n)$, on a $R(O_{10},..,O_{n0})$ est vraie.(Ce qui entraîne $(O_1,..,O_n)$ sans paramètres fixes est un concept général inclus dans la base $(c_1,..,c_n)$ de R).

On dira que « P_{el} est *fausse* » si P_{el} n'est pas vraie.

c)Si P_{el} est une proposition élémentaire Platoniste stable de type relation, on dira que la *négation* de P_{el}, notée Non(P_{el}), est une proposition élémentaire Platoniste stable de type relation, avec « Non(P_{el}) vraie » est équivalent à « P_{el} fausse » et « Non(P_{el}) » fausse est équivalent à « P_{el} vraie ».

D'après la définition précédente, si une proposition élémentaire Platoniste de type relation $R(O_1,..,O_n)$ est vraie, elle est bien équivalente à des relations non-floues entre des objets mathématiques qui sont vraies, plus précisément à toutes les relations non-floues entre des objets mathématiques de la forme $R(O_{10},\dots,O_{n0})$ qui sont vraies, $O_1,..,O_n$ pouvant représenter simultanément $O_{10},..,O_{n0}$.

REMARQUE 2.8:

Par exemple si on a une proposition élémentaire Platoniste stable de type relation P_{el} :$R(O_1,..,O_n)$, où O_1 est un symbole non-flou associé à une définition générale non-floue $D_1(o)$ et ne peut représenter aucun objet mathématique, alors P_{el} n'est pas une proposition élémentaire Platoniste stable de type relation. On ne dira donc pas qu'elle est *fausse*, car d'après la définition précédente seules les propositions élémentaires stables peuvent être fausses.

DEFINITION 2.9 :

On appellera *Proposition élémentaire Platoniste stable de type définition* une expression du type :
P_{Def} :
$Def(O_1,..,O_i)$
$R(O_1,\dots,O_n)$

Telle que :

(i) R est définie comme dans le cas d'une proposition élémentaire Platoniste stable de type relation.

(ii) Si n>i, $O_{i+1},..,O_n$ sont des concepts particuliers non-flous associés à des définitions, définis avant P_{Def} ou des concepts généraux non-flous représentant chacun un unique objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP (**N**,**Q**,**R**…)

(iii) $O_1,..,O_i$ sont des nouveaux symboles.

DEFINITION 2.10:

a)Si on a une Proposition élémentaire Platoniste stable de type définition:

P_{Def} :
$Def(O_1,..,O_i)$
$R(O_1,..,O_n)$.

On dira que P_{Def} est *vraie* si on a :

Si $O_{i+1},..,O_n$ représentent simultanément $O_{i+10},..,O_{n0}$, alors il existe $O_{10},..,O_{i0}$ objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP tels que $R(O_{10},..,O_{n0})$ est vraie.

Si P_{Def} est vraie, alors par définition si $O_{i+1},..,O_n$ représentent simultanément $O_{i+10},.,O_{n0}$ alors $(O_1,..,O_i)$ pourra représenter toute séquence $(O_{10},..,O_{i0})$ telle que $R(O_{10},..,O_{n0})$ est vraie et $O_{10},..,O_{i0}$ sont des objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP.

On dira alors , en accord avec la définitition d'un concept particulier non-flou donnée dans le 1ier article [(1)], que $(O_1,.,O_i)$ de même que $O_1,..,O_i$, sont des *symboles particuliers non-flous* qui sont des *concepts particuliers non-flous*. Ceux -ci ne peuvent représenter ni l'EMP ni in objet mathématique qui n'est pas un objet mathématique non-relationnel.

b)On dira que P_{Def} est *fausse* si P_{Def} est une proposition élémentaire Platoniste stable de type définition et n'est pas vraie.
On dira alors que $O_1,..,O_i$ sont des symboles particuliers non-flous qui ne sont pas des concepts particulier non-flous. De plus, $O_1,.,O_i$ ne pourront alors représenter aucun symbole.

REMARQUE 2.11 :

a)D'après la définition précédente, si on a une proposition élémentaire Platoniste stable de type définition P_{Def} :$Def(O_1,..,O_i),R(O_1,..,O_n)$ avec pour j>i un symbole particulier non-flou O_j qui n'est pas un concept particulier non-flou alors P_{Def} n'est pas une proposition élémentaire Platoniste stable de type définition.

b)D'après la définition précédente, si une Proposition élémentaire Platoniste stable de type définition P_{Def} :Def(O_1,..,O_i),R(O_1,..,O_n) est fausse alors toute proposition élémentaire Platoniste postérieure à P_{Def} utilisant l'un des symboles O_1,..,O_i est instable et donc n'est pas vraie.

c)D'aprés les définitions précédentes, une proposition élémentaire Platoniste stable ne pourra pas utiliser des symboles particuliers non-flous prédéfinis qui ne sont pas des concepts particuliers non-flous. Elle pourra cependant être stable en utilisant des symboles particuliers non-flous qu'elle définit elle-même. C'est le cas d'une proposition élémentaire de type définition stable qui est fausse.

On admet comme conséquences immédiates des définitions précédentes des propositions élémentaires de type relation et de type définition , utilisant que si O_1,…,O_n sont des concepts non-flous, alors O_{10},..,O_{n0} étant des objets mathématiques quelconques, « O_1,..,O_n peuvent représenter simultanément O_{10},..,O_{n0} » ou (exclusif) « O_1,..,O_n ne peuvent représenter simultanément O_{10},.,O_{n0} » (Ce qu'on a démontré dans l'article précédent (1)) :

LEMME 2.12 :

a)Toute proposition élémentaire Platoniste stable de type relation est non-floue, c'est-à-dire est vraie ou (exclusif) n'est pas vraie.

b) Toute proposition élémentaire Platoniste stable de type définition est non-floue, c'est-à-dire est vraie ou (exclusif) n'est pas vraie.

Preuve :

Préambule : Pour démontrer ce lemme, on utilisera l'Axiome suivant, qui est la conséquence de la signification des concepts primitifs « Il existe » et « Pour tout » : « Si R est une relation non-floue d'ordre de multiplicité k, alors les propositions P1 :« Pour tous objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP O_{10},..,O_{k0}, R(O_{10},.,O_{k0}) » et P2 : « Il existe O_{10},.,O_{k0} tels que R(O_{10},..,O_{k0}) » sont non-floues.

On rappelle qu'O_1,.,O_k étant des concepts particuliers non-flous on a démontré dans l'article (1) que (O_1,..,O_k) *sans paramètres fixes* était un concept général non-flou.

a)Considérons une proposition élémentaire stable de type relation P_{elR} :R(O_1,..,O_n).

On a « P_{elR} est vraie » est équivalent à « Pour tous objets mathématiques $O_{10},..,O_{n0}$ pouvant être représentés simultanément par $O_1,.,O_n$, $R(O_{10},..,O_{n0})$ est vraie ». Cette proposition est équivalente à « Pour tous objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP $O_{10},.,O_{n0}$, si $(O_{10},..,O_{n0})$ appartient au concept général $(O_1,..,O_n)$ sans paramètres fixes, alors $R(O_{10},..,O_{n0})$ ».

D'après la signification du concept primitif « si..alors », la proposition précédente peut se mettre sous la forme : « Pour tous objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP $O_{10},..,O_{n0}$, $R_2(O_{10},.,O_{n0})$ », avec R_2 relation non-floue d'ordre de multiplicité n. Utilisant l'Axiome du Préambule, on obtient bien que la proposition précédente est non-floue, donc P_{elR} est non-floue, on a donc montré le a).

b)Considérons la proposition élémentaire stable de type définition P_{elD} :Def$(O_1,..O_i)$, $R(O_1,.,O_n)$. Supposons n>i.
« P_{elD} est vraie » est équivalent à « Pour tous $O_{i+10},.,O_{n0}$ objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP, si $(O_{i+10},..,O_{n0})$ appartient au concept général $(O_{i+1},..,O_n)$ sans paramètres fixes, alors il existe $O_{10},.,O_{i0}$ objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP tels que $R(O_{10},.,O_{n0})$ ».

Pour tous objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP $O_{i+10},..,O_{n0}$, on définit la relation non-floue $R_{3(Oi+10,..,On0)}$ d'ordre de multiplicité i, tels que pour tous objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP $O_{10},..,O_{i0}$, $R_{3(Oi+10,.,On0)}(O_{10},..,O_{i0})$ est équivalent à $R(O_{10},..,O_{n0})$. ($R_{3(Oi+10,..,On0)}$ est évidemment une relation non-floue puisque R est une relation non-floue).

On a donc « P_{elD} est vraie » est équivalent à « Pour tous objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP $O_{i+10},.,O_{n0}$, , si $(O_{i+10},..,O_{n0})$ appartient au concept général $(O_{i+1},.,O_n)$ sans paramètre fixe, il existe $O_{10},.,O_{i0}$ tels que $R_{3(Oi+10,..,On0)}(O_{10},..,O_{i0})$ ».

Et donc d'après l'Axiome du Préambule, il existe une relation non-floue R_4 d'ordre de multiplicité n-i telle que « P_{elD} est vraie » est équivalent à : « Pour tous objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP $O_{i+10},.,O_{n0}$, si $(O_{i+10},..,O_{n0})$ appartient au concept général $(O_{i+1},.,O_n)$ sans paramètre fixe, alors $R_4(O_{i+10},.,O_{n0})$ ».

Et donc d'après la signification du concept primitif « si..alors », « P_{elD} est vraie » est équivalent à « Pour tous objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP $O_{i+10},.,O_{n0}$, $R_5(O_{i+10},..,O_{n0})$ », avec R_5 relation non-floue d'ordre de multiplicité n-i. Utilisant l'Axiome du Préambule, on obtient que P_{elD} est non-floue.

(Le cas où n=i se traite exactement de la même façon).

On a donc démontré le lemme.

DEFINITION 2.15 :

a)On appellera *proposition stable Platoniste* P une séquence finie (*ensembliste*) (P_1,..,P_k) de propositions élémentaires Platonistes (de type définition ou relation) stables, celles-ci pouvant utiliser des concepts particuliers non-flous définis avant P, et P_j pouvant aussi utiliser des concepts particuliers non-flous prédéfinis (c'est à dire définis dans (P_1,…,P_{j-1}), ou des symboles particuliers non-flous définis dans P_j . On supposera toujours implicitement que (P_1,..,P_k) est une *séquence finie ensembliste*, c'est-à-dire qu'elle est identique à l'ensemble {(1,P_1),..,(k,P_k)}. Donc à partir d'une séquence à 3 termes, séquence finie et séquence finie ensembliste auront même signification et une séquence finie ensembliste pourra n'avoir qu'un terme.

b)On dira qu'une proposition stable Platoniste P :(P_1,..,P_k) est est *vraie* si P_1,..,P_k sont toutes vraies et que P est *fausse* si P n'est pas vraie, c'est-à-dire au moins une des propositions P_1,..,P_k est fausse.

c)Si P est une proposition Platoniste stable, on définit la *négation* de P, notée Non(P), telle que « Non(P) est *vraie* » signifie « P est fausse », « Non(P) est *fausse* » signifie « P est vraie ». On dira aussi que Non(P) est une proposition Platoniste stable.

d)Si P1 et P2 sont des propositions Platonistes stables et que les mêmes propositions définissent les concepts particuliers non-flous prédéfinis utilisés par P1 et P2 , alors par définition « P1 ou P2 » et « P1 et P2 », « Non(P1) » sont aussi des *propositions Platonistes stables*.appelées aussi *propositions Platonistes stables composées*. Si P(O_1,..,O_n) est une proposition stable composée, O_{10},..,O_{n0} étant des objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP, on obtiendra les valeurs de vérité de P(O_{10},..,O_{n0}) en utilisant les tables de vérité classiques. Par définition, de la même façon que pour une propostion mathématique simple, P(O_1,..,O_n) sera vraie si pour tous O_{10},..,O_{n0} pouvant être représentés simultanément par O_1,..,O_n , P(O_{10},..,O_{n0}) est vraie.

On montre sans difficultés que la définition donnée en a) d'une proposition stable Platoniste la séquence ensembliste (P_{el1},..,P_{elk}) vraie utilisant les concepts particuliers non-flous pré-définis O_1,..,O_n est équivalente à la précédente.

Pour cela, on considère les propositions Q_1 et Q_2 suivantes :

Q_1 : « $P(O_1,..,O_n)$ est vraie (au sens du a)) » , Q_2 : « Pour tous $O_{10},..,O_{n0}$ pouvant être représentés simultanément par $O_1,..,O_n$, $P(O_{10},..,O_{n0})$ est vraie (au sens du a). »

On justifiera plus loin Q_1 est vraie ou(exclusif) n'est pas vraie, de même que Q_2. On montrera ensuite « Si Q_1 alors Q_2 » et « Si Q_2 alors Q_1 ».

Pour montrer la première assertion, on suppose Q_1 est vraie, puis on montre par récurrence sur i : « Pour tous $O_{10},..,O_{n0}$ pouvant être représentés simultanément par $O_1,..,O_n$, P_{eli} est vraie dans $P(O_{10},..,O_{n0})$ (au sens du a)). »

Pour montrer la 2[ième] assertion, on suppose que Q_2 est vraie et on montre par récurrence sur i : P_{eli} est vraie dans $P(O_1,..,O_n)$ (au sens du a)).

On peut montrer simultanément les 2 assertions précédentes en montrant par récurrence T(i): « Si $P_{el1},.,P_{eli-1}$ sont vraies dans $P(O_1,..,O_n)$ et pour tous $O_{10},..,O_{n0}$ pouvant être représentés simultanément par $O_1,.,O_n$, $P_{el1},.,P_{eli-1}$ sont vraies dans $P(O_{10},..,O_{n0})$, alors « P_{eli} est vraie dans $P(O_1,..,O_n)$» est équivalent à « Pour tous $O_{10},.,O_{n0}$ pouvant être représentés simultanément par $O_1,.,O_n$, P_{eli} est vraie dans $P(O_{10},..,O_{n0})$ ». (On distinguera si P_{eli} est de type définition P_{elDi} :$Def(D_0),R(D_0,D_1,..,D_k)$ ou de type relation P_{elRi} :$R(D_1,.,D_k)$. On utilisera alors, d'après la définition d'objets mathématiques pouvant être représentés simultanément par des concepts particuliers non-flous donnée dans le 1[ier] article, que « $D_1,..,D_k$ peuvent représenter simultanément $D_{10},..,D_{k0}$ dans $P(O_1,..,O_n)$ » est équivalent à : « Il existe $O_{10},.,O_{n0}$ pouvant être représentés simultanément par $O_1,..,O_n$ tels que $O_{10},.,O_{n0},D_{10},..,D_{k0}$ peuvent être représentés simultanément par $O_1,..,O_n$, $D_1,.,D_k$ » et : « $D_1,..,D_k$ peuvent représenter simultanément $D_{10},..,D_{k0}$ dans $P(O_{10},..,O_{n0})$ » est équivalent à « $O_{10},.,O_{n0},D_{10},..,D_{k0}$ peuvent être représentés simultanément par $O_1,..,O_n$, $D_1,.,D_k$ »).

D'après la définition d'une proposition élémentaire Platoniste stable de type relation ou de type définition qui est fausse, on a le Lemme suivant équivalent au Lemme 2.12 (utilisant « fausse » à la place de « n'est pas vraie »:

LEMME 2.17 :

a)Toute proposition élémentaire Platoniste stable (de type relation ou définition) est vraie ou fausse.

b)Aucune proposition élémentaire stable Platoniste n'est pas (vraie et fausse).

LEMME 2.18 :

a)Toute proposition Platoniste stable est vraie ou fausse.

b)Toute proposition Platoniste stable n'est pas vraie et fausse.

Preuve :

Si une proposition stable Platoniste est de la forme $P(P_{el1},..,P_{eln})$, $P_{el1},..,P_{eln}$ étant des propositions élémentaires stables Platonistes, alors d'après la définition d'une proposition stable Platoniste vraie, $P(P_{el1},..,P_{eln})$ est vraie ou (exclusif) n'est pas vraie. Ceci est la conséquence immédiate du Lemme 2.17 obtenue par une démonstration par récurrence immédiate sur les signes distinctifs 1,..,n.

Il est évident, et on admettra qu'à cause de la définition des concepts relationnels « et », « ou », « Non », si P_1 et P_2 sont des propositions Platonistes stables non-floues, alors « P_1 ou P_2 », « P_1 et P_2 », « NonP_1 » sont non-floues.

On a donc démontré le lemme.

REMARQUE 2.19A :

On remarque qu'on pourrait appeler le a) des Lemmes 2.17 et 2.18 *Principes du Tiers exclu* pour les propositions élémentaires Platonistes stables et les propositions Platonistes et le b) des Lemmes 17 et Lemme 18 Principes de Non-contradiction pour les Propositions élémentaires Platonistes et les propositions Platonistes.

Cependant, ces Principes ne sont plus admis axiomatiquement comme dans les théories mathématiques de logique formelle, mais sont des Lemmes qui sont déduits des axiomes de la TLP. Nous adopterons pour eux les dénominations précédentes.

DEFINITION 2.19B :
PROPOSITION PLATONISTE

On a déjà défini un exemple de symbole particulier non-flou. On généralise cette définition en admettant que si $O_1,..,O_i$ sont définis par une proposition P_{el} :Def$(O_1,..,O_i)$,R$(O_1,..,O_n)$, analogue à une proposition élémentaire stable Platoniste de type définition mais avec $O_{i+1},..,O_n$ symboles particuliers non-flous (non nécessairement des concepts particuliers non-flous), alors $O_1,..,O_i$ sont des symboles particuliers non-flous.

Par définition, un symbole particulier non-flou qui n'est pas un concept particulier non-flou ne pourra représenter aucun objet mathématique.

a)Une *proposition élémentaire Platoniste de type relation* est définie comme étant une expression analogue à une proposition élémentaire Platoniste stable de type relation $R(O_1,..,O_n)$, mais avec les O_i qui sont des *symboles particuliers non-flous*. Si l'un des O_i n'est pas un concept particulier non-flou, elle ne sera pas vraie.

De même une *proposition élémentaire Platoniste de type définition* est définie comme étant analogue à une proposition élémentaire Platoniste stable de type définition P_{Def} :$Def(O_1,.,O_i),R(O_1,..,O_n)$ mais avec certains O_j, pour j>i, qui sont des *symboles particuliers non-flous* pré-définis. Si l'un des O_j n'est pas un concept particulier non-flou, $O_1,..,O_i$ seront des symboles particuliers non-flous qui ne sont pas des concepts particuliers non-flous et ne pourront représenter aucun objet mathématique.

b)Si P_{el} est une proposition élémentaire Platoniste de type relation ou de type définition, on aura « P_{el} est *vraie* » est équivalent à « P_{el} est une proposition élémentaire stable Platoniste (de type relation ou de type définition) qui est vraie ».

c)Si une proposition P est une séquence finie $(P_1,.,P_k)$ de propositions élémentaires Platonistes, on dira que P est une *proposition Platoniste.*

d) Si une proposition P est une séquence finie $(P_1,.,P_k)$ de propositions élémentaires Platonistes, (et donc P est une *proposition Platoniste.*), on dira que P est vraie si toutes les propositions élémentaires Platonistes sont vraies, et que P est n'est pas vraie si au moins l'une d'elle n'est pas vraie.

e)Si P1 et P2 sont des propositions Platonistes dont les symboles particuliers non-flous qu'elles utilisent sont définis par les mêmes propositions, alors « P1 et P2 » et « P1 ou P2 » et « Non(P1) » seront aussi appelées *propositions Platonistes*.

f)On peut élargir la définition d'une proposition stable Platoniste en admettant que si P est une proposition Platoniste et si tous les symboles particuliers non-flous prédéfinis utilisés par P sont des concepts particuliers non-flous, alors on dira que P est une *proposition stable Platoniste* et on représentera P par $P(O_1,..,O_n)$, $O_1,.,O_n$ étant les concepts particuliers non-flous prédéfinis utilisés par P.

LEMME 2.19C:

a)Toute proposition élémentaire Platoniste est vraie ou (exclusif) n'est pas vraie.

b)Toute proposition Platoniste est vraie ou (exclusif) n'est pas vraie.

Preuve :

a) $O_1,..,O_n$ étant des symboles particuliers non-flous pré-définis, on a « $O_1,..,O_n$ sont tous des concepts particuliers non-flous » ou « O_1 n'est pas un concept particulier non-flou ou..ou O_n n'est pas un concept particulier non-flou ».

Il en résulte que si on a une proposition élémentaire Platoniste de type P_{elD} :Def($O_1,..,O_i$),R($O_1,..,O_n$) ou P_{elR} :R($O_1,..,O_n$), alors « P_{elD} est stable » ou « P_{elD} n'est pas stable » et de même pour P_{elR}. Or on a vu si P_{elD} est stable « P_{elD} est vraie ou(exclusif) n'est pas vraie » et si P_{elD} n'est pas stable alors « P_{elD} n'est pas vraie (exclusivement) ». Il en résulte (à cause de la signification du concept primitif « ou ») que P_{elD} est vraie ou(exclusif) n'est pas vraie. Et de même pour P_{elR}.

On peut déduire de ce qui précède que tout symbole particulier non-flou est un concept particulier non-flou ou(exclusif) n'est pas un concept particulier non-flou. Dans le cas où P_{elR} est de la forme « P_{elR1}ou P_{elR2} » ou « P_{elR1} et P_{elR2} » ou « Non (P_{elR1}) », avec P_{elRi} est vraie ou(exclusif) n'est pas vraie (pour i=1,2), alors d'après la signification des concepts relationnels primitifs « ou », « et », « Non », P_{elR} est vraie ou(exclusif) n'est pas vraie. On obtient les différents cas avec les tables de vérité classiques qui sont vraies dans la TMP à cause de la signification des concepts primitifs relationnels « et », « ou », « Non ». Par exemple si P_{elR1} est vraie exclusivement et P_{elR2} n'est pas vraie exclusivement, alors « P_{elR1} et P_{elR2} » n'est pas vraie exclusivement et « P_{elR1} ou P_{elR2} » est vraie exclusivement.

Et donc toute proposition élémentaire Platoniste de type relation ou définition est vraie ou(exclusif) n'est pas vraie.

b)Et on obtient immédiatement par récurrence que toute proposition Platoniste est vraie ou (exclusif) n'est pas vraie. (Si P_i ($P_{eli1},.,P_{elip}$), on montre par récurrence que ($P_{eli1},.,P_{elij}$) est vraie ou (exclusif) n'est pas vraie.)

REMARQUE 2.19D :

a)Si pour tous objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP $O_{10},.,O_{n0}$, identifiant O_{i0} avec le symbole particulier non-flou pouvant représenter seulement O_{i0}, on a défini une proposition Platoniste P($O_{10},..,O_{n0}$) alors on peut définir la relation non-floue R d'ordre de multiplicité n, telle que $O_{10},\ldots,O_{n0}$ étant des objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP, « R($O_{10},..,O_{n0}$) est vraie » est équivalent à « P($O_{10},..,O_{n0}$) est vraie ».

Alors $O_1,..,O_n$ étant des concepts particuliers non-flous prédéfinis, on pourra identifier R($O_1,..,O_n$) avec une proposition élémentaire Platoniste stable de type relation.

b) Si P_{elR1} et P_{elR2} sont des propositions élémentaires Platonistes de type relation telles que les symboles particuliers non-flous pré-définis qu'elles utilisent sont définis par les mêmes propositions élémentaires Platonistes de type définition, alors « P_{elR1} et P_{elR2} », « P_{elR1} ou P_{elR2} », « Non(P_{elR1}) », « Si P_{elR1} alors P_{elR2} » (Noté aussi « Cond(P_{elR1} , P_{elR2})»), « P_{elR1} est équivalent à P_{elR2} » (Noté aussi « Eq(P_{elR1} , P_{elR2}) »), seront des propositions élémentaires Platonistes dites *des propositions élémentaires Platonistes composées*. On pourra toujours identifier ces propositions élémentaires Platonistes de type relation.

Par exemple supposons qu'on ait la proposition élémentaire Platoniste P_{elR1} :R(O'$_1$,.,O'$_p$). On considère alors la proposition élémentaire Platoniste composée P_{elC}:Non(P_{elR1}). On pourra alors exprimer P_{elC} sous la forme d'une proposition élémentaire Platoniste de type relation P_{elC} :R_C(O'$_1$,.,O'$_p$), R_C étant définie comme une relation non-floue d'ordre de multiplicité p et telle que pour tous objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP O'$_{10}$,.,O'$_{p0}$, R_C (O'$_{10}$,.,O'$_{p0}$) est équivalent à Non(R(O'$_{10}$,.,O'$_{p0}$)).

En accord avec la définition d'une proposition élémentaire Platoniste vraie P_{elC} sera vraie si O'$_1$,.,O'$_p$ sont des concepts particuliers non-flous pré-définis ou des concepts généraux non-flous pouvant représenter un unique objet et de plus, pour tous O'$_{10}$,.,O'$_{p0}$) pouvant être représentés simultanément par O'$_1$,.,O'$_p$, R_C(O'$_{10}$,.,O'$_{p0}$) est vraie. Dans le cas où l'un des O'$_j$ est un symbole particulier non-flou qui n'est pas un concept particulier non-flou, alors P_{elC} sera fausse.

On obtient de la même façon les propositions élémentaires Platonistes de type relation auxquelles on peut identifier les autres types de proposition élémentaires Platonistes composées.

DEFINITION 2.19E :

(PROPOSITIONS PLATONISTES IRREDUCTIBLES-DEFINITIONS AUXILIAIRES PLATONISTES).

Préambule : On a vu précédemment qu'une proposition Platoniste du type P(O$_1$,.,O$_n$) avec O$_1$,..,O$_n$ concepts particuliers non-flous pré-définis était non-floue. On montre de la même façon qu'une proposition Platoniste du type P(O$_1$,.,O$_n$) avec O$_1$,..,O$_n$ symboles particuliers non-flous est non-floue.(On utilise que tout symbole particulier non-flou est un concept particulier non-flou ou(exclusif) n'est pas un concept particulier non-flou.)

a)Par définition on dira qu'une proposition Platoniste P est *irréductible au sens strict* si elle est constituée d'une séquence de propositions élémentaires Platonistes, c'est à dire P n'est pas de la forme « Non(P_{p1}) » ou « P_{p1} et P_{p2} » ou « P_{p1} ou P_{p2} » avec P_{p1} et P_{p2} propositions Platonistes. On admettra comme évident

que toute proposition Platoniste P peut s'exprimer en fonction de propositions Platonistes irréductibles $P_{ir1},..,P_{irk}$ et des concepts primitifs relationnels « ou », « et », « non », « si…alors », « est équivalent à ». Dans le cas où P utilise seulement le concept primitif relationnel « et » et le cas où P est irréductible au sens strict, on dira qu'elle est irréductible au sens large. On dira aussi simplement « P est irréductible » pour « P est irréductible au sens strict ».

b)$O_{i+1},.,O_n$ étant des symboles pariculiers pré-définis, on pourra définir une proposition élémentaire Platoniste de type définition d'une proposition stable Platoniste irréductible P par:
« P_{elD} :Def($O_1,.,O_i$),R($O_1,..,O_n$), avec R($O_1,..,O_n$) a *la même signification* que la *proposition Platoniste auxiliaire* P_{aux}($O_1,.,O_n$) ». Ceci signifiera que pour tous objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP $O_{10},..,O_{n0}$, R($O_{10},..,O_{n0}$) est équivalent à P_{aux}($O_{10},.,O_{n0}$). On dira que ((Def($O_1,.,O_i$),R($O_1,..,O_n$)), P_{aux}($O_1,.,O_n$)) est *une définition auxiliaire Platoniste* (de ($O_1,.,O_i$)).

De même on pourra définir une poposition élémentaire Platoniste de type relation par :

«P_{elR} : R($O_1,.,O_n$) avec R($O_1,..,O_n$) a la même signification que la proposition Platoniste auxiliaire P_{aux}($O_1,.,O_n$) ».

Si P_{aux}($O_1,.,O_n$) est une proposition Platoniste auxiliaire utilisée par P, elle aussi pourra utiliser des propositions Platonistes auxiliaires, et on pourra considérer qu'elles aussi sont utilisées par P. On notera P_{aux}(P) l'ensemble (éventuellement vide) des couples (R($O_1,..,O_n$),P_{aux}($O_1,..,O_n$)), avec P_{aux}($O_1,..,O_n$) proposition Platoniste auxiliaire utilisée par P.

Si P est la proposition Platoniste irréductible ($P_{el1},..,P_{elk}$) et qu'elle utilise la proposition Platoniste irréductible P_{aux}($P_{elaux1},..,P_{elauxr}$), on dira:

-Chaque proposition élémentaire Platoniste P_{elj} *appartient à* et et une des proposition élémentaires Platonistes *constituant* P, mais n'appartient à aucune proposition auxilaire utilisée par P.

-P_{aux} *appartient* à P, et toute proposition auxiliaire P_{elauxj} *appartient* à P_{aux} et à P et est une des propositions élémentaires Platonistes *constituant* P_{aux} mais n'est pas une des propositions élémentaires Platonistes constituant P ou une autre proposition auxiliaire utilisée par P.

On généralise les définitions précédentes dans le cas où P et Paux ne sont pas des propositions Platonistes irréductibles.

On pourra, de la même façon que les définitions auxiliaires dans une proposition mathématique simple, ordonner les définitions Platonistes auxiliaires.

On remarque que si toutes les propositions auxiliaires Platonistes utilisées par une proposition Platoniste irréductible P sont irréductibles, on obtient par récurrence que tous les symboles particuliers définis dans P sont des concepts particuliers non-flous.

c)On remarque que si P1 et P2 sont 2 propositions Platonistes dont les mêmes propositions définissent les symboles particuliers non-flous pré-définis qu'elles utilisent, alors nécessairement elles sont *indépendantes*, c'est-à-dire que P1 ne peut utiliser de symbole particulier non-flou défini dans P2 et réciproquement. En effet si P1 définit un symbole O_j utilisé par P2, alors O_j est un symbole pré-défini utilisé par P2 et défini par P1 et donc ce ne sont pas les mêmes propositions qui définissent les symboles particuliers pré-définis utilisés par P1 et P2. Il en résulte que si P1 et P2 sont des propositions Platonistes irréductibles au sens strict dont les mêmes propositions définissent les symboles particuliers non-flous pré-définis qu'elles utilisent, alors « P1 et P2 » est équivalente à une proposition Platoniste irréductible au sens strict . Par exemple, si P1 est la proposition (P_{ei11},..,$P_{el1k(1)}$) et P2 est la proposition (P_{el21},..,$P_{elk(2)}$), alors il est évident que « P1 et P2 » est équivalent à la proposition Platoniste irréductible (P_{el11},..,$P_{el2k(2)}$).

De même si P est une proposition Platoniste ne contenant aucune proposition élémentaire Platoniste de type définition, alors P est équivalente à une proposition irréductible.

DEFINITION 2.20 :

a)On appelle « *ensemble de symboles élémentaires Platonistes* » un sous-ensemble fini S de $\mathbf{Q}^2$ (dont on a établi l'existence dans l'article [(1)]), dont un symbole élémentaire *«blanc »*. et un symbole élémentaire « *point* » et deux symboles élémentaires « *guillemets* («) et(») ». Les éléments de S seront donc appelés *symboles élémentaires* de S. (Dans ce qui suit, tout symbole élémentaire utilisé en mathématique classique sera identifié avec un élément de S.)

b)On appellera *chaine* ou *symbole composé* de S une séquence finie de symboles élémentaire de S.

c)On dira que les symboles élémentaires ou composés de S sont des *symboles* de S.

DEFINITION 2.21 :

S étant un ensemble de symboles élémentaires de Platonistes, on appelle *proposition sur* S une chaine de S, finissant par le symbole élémentaire « point » (pouvant contenir plusieurs « points »), ou commençant par le symbole guillemet « « » et finissant par le symbole guillemet « » ». (Notons que dans la pratique, on utilisera plus généralement des guillements pour représenter des chaînes de symboles élémentaires).

DEFINITION 2.22 :

a)S étant un ensemble de symboles élémentaires Platonistes, on appelle *Texte sur* S, une séquence finie de propositions sur S.

b)Si T :(P_1,..,P_n) et T' :(Q_1,..,Q_r) sont des textes sur S, on pourra noter (T,Q_1,..,Q_r) ou (T,T') le texte (P_1,.P_n,Q_1,..,Q_r).

DEFINITION 2.23 :

a)On appelle *code Platoniste* C un couple (S,R_C), S étant un ensemble de symboles Platonistes et R_C une relation tels que pour tout texte T(P_1,..,P_n) sur S, et toute proposition P_i de T, alors R_C soit une relation reliant P_i avec ce qu'on appellera une *signification Platoniste* de P_i dans T sur C, qui pourra être l'ensemble vide ou (exclusif) une proposition Platoniste ou (exclusif) une *proposition Platoniste relationnelle*. (Nous définirons plus loin cette dernière expression). $Pl_C(P_i)$ représentera une une signification Platoniste quelconque de P_i, et on aura donc $P_iR_CPl_C(P_i)$. De plus si on a P_iR_CØ, P_i ne sera pas vrai dans T sur C et Ø sera l'unique signification Platoniste de P_i. Si $Pl_C(P_i)$ est une proposition Platoniste, alors $Pl_C(P_i)$ pourra représenter différentes propositions Platonistes. De plus on dira alors que P_i est *équivalente (dansT sur C)* à la proposition Platoniste $Pl_C(P_i)$ (Qui sera aussi sa *signification Platoniste*).

La relation R_C sera définie par des règles appelées *règles syntaxiques du code Platoniste* C. Par définition, P_i étant une proposition mathématique simple, P_i sera vraie s'il existe une proposition Platoniste $Pl_C(P_i)$ telle que $P_iR_CPl_C(P_i)$ et que de plus $Pl_C(P_i)$ soit vraie (Et donc soit nécessairement une proposition stable Platoniste).

On aura les règles syntaxiques du code Platoniste suivantes :

Considérons un texte sur T(P_1,..,P_n) sur un ensemble S et un code C (S,R_C).
(i)Pour i=1, supposons P_1 est irréductible au sens strict (On rappelle qu'une proposition mathématique simple irréductible au sens large est une proposition

mathématique simple du type « R_1 et..et R_k », avec les R_i propositions irréductibles au sens strict et indépendantes entre elles.)
-$Pl_C(P_1)$ sera nécessairement une proposition stable Platoniste irréductible au sens strict.
De plus :

(j1)On a vu que d'après la définition d'une proposition mathématique simple, P_1 pouvait utiliser une expression du type $F(O_1,..,O_n)$, F étant une fonction-concept, $O_1,..,O_n$ étant des symboles particuliers non-flous pré-définis par des définitions auxiliaires ou des concepts généraux non-flous pouvant représenter un unique objet. On peut considérer que $F(O_1,..,O_n)$ n'est pas associé ou implicitement associé à une définition auxiliaire mais est *implicitement associé à une définition auxiliaire au sens d'une fonction-concept*, (utilisant F,$O_1,..,O_n$). $F(O_1,..,O_n)$ sera aussi définie implicitement par une proposition élémentaire Platoniste appelée *définition implicite* de $F(O_1,..,O_n)$ et notée impl($F(O_1,..,O_n)$). Cependant, dans le cas où $O_1,..,O_n$ sont des concepts généraux non-flous et $F(O_1,..,O_n)$ peut représenter un objet mathématique on identifiera $F(O_1,..,O_n)$ avec un concept général non-flou pouvant représenter un unique objet. Si $O_1,.,O_i$ sont des symboles particuliers non-flous pré-définis et $O_{i+1},.,O_n$ des concepts généraux non-flous pouvant représenter un unique objet, la définition implicite de $F(O_1,..,O_n)$ sera : impl($F(O_1,..,O_n)$) :Def($F(O_1,..,O_n)$),R($F(O_1,..,O_n)$,$O_1,.,O_i$), avec R($F(O_1,..,O_n)$,$O_1,.,O_i$) : « ($F(O_1,..,O_n)$, ($O_1,..,O_n$)) appartient au concept général F ».

On dira que $F(O_1,..,O_n)$ est un *symbole particulier obtenu par une fonction-concept.*.

D'après sa définition, une proposition mathématique simple pourra aussi contenir une expression du type E($O_1,.,O_n,C_1,.,C_p$), contenant au moins un « O_1 » ou un « C_1 » , avec $O_1,..,O_n$ symboles particuliers non-flous pré-définis par des définitions auxiliaires et donc n'étant pas définis en utilisant des fonction-concepts (Car sinon ils seraient définis par des définitions auxiliaires implicites et au sens d'une fonction-concept), $C_1,.,C_p$ concepts généraux non-flous pré-définis pouvant représenter chacun un unique objet, E($O_1,..,C_p$) pouvant utiliser des fonction-concepts. On rappelle que :
-E($O_1,..,O_n$, $C_1,..,C_p$) ne contient aucune relation non-floue ni concept primitif relationnel ni symboles de ponctuation excepté des symboles « parenthèses » ou « virgule » ou « accolades » ni symboles « blanc » ni symbole « point » si celui-ci est le dernier symbole de E($O_1,..,O_n$, $C_1,..,C_p$).
- E($O_1,..,O_n$, $C_1,..,C_p$) est immédiatement précédé d'un symbole « blanc » ou d'un symbole représentant une unique relation non-floue ou d'un « guillemet ouvert » et est immédiatement suivi d'un symbole représentant une unique relation non-

floue ou d'un symbole parmi « blanc » ou « point » ou « guillemet fermé » ou « virgule », celle-ci étant suivi d'un symbole « blanc ».

En général $E(O_1,.,O_n,C_1,.,C_p)$ sera défini implicitement par une proposition Platoniste notée $impl(E(O_1,.,O_n,C_1,.,C_p))$ et constituée de propositions élémentaires Platonistes de type définition de type P_{elDi} :$impl(F_i(O'_{i1},..,O'_{it(i)}))$, et obtenues à partir de règles de convention *appelées règles syntaxiques de convention (symbolique) du code Platoniste* C. Cependant, pour j parmi 1,.,t(i), O'_{ij} pourra lui-même être de la forme $F_{k(j)}(O'_{k(j)1},..,O'_{k(j)t(k(j))})$ en étant défini par une proposition $P_{elDk(j)}$ précédant P_{elDi}. Cette proposition Platoniste $impl(E(O_1,.,O_n,C_1,.,C_p))$ utilisera donc des fonction-concepts pré-définies et sera appelée *définition implicite* de $E(O_1,.,O_n,C_1,.,C_p)$. On pourra alors identifier $E(O_1,.,O_n,C_1,.,C_p)$ avec F_{COMB} $(O_1,.,O_n,C_1,.,C_p)$, F_{COMB} étant une fonction-concept telles que pour tous $O_{10},.,O_{n0},C_{10},.,C_{p0}$ objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP, $F_{COMB}(O_{10},.,O_{n0},C_{10},.,C_{p0})$ peut représenter le même objet que $E(O_{10},.,O_{n0},C_{10},.,C_{p0})$. Les règles syntaxiques permettant de d'obtenir $impl(E(O_1,.,O_n,C_1,.,C_p))$ permettront d'obtenir aussi des propositions Platonistes définissant $F_{COMB}(O_{10},.,O_{n0},C_{10},.,C_{p0})$ ou F_{COMB}. Ces dernières seront appelées *définition implicite* de $F_{COMB}(O_{10},.,O_{n0},C_{10},.,C_{p0})$ ou de F_{COMB} et seront représentées par $impl(F_{COMB}(O_{10},.,O_{n0},C_{10},.,C_{p0}))$ ou $impl(F_{COMB})$. On dira que F_{COMB} est une *combinaison de fonction-concepts* et que $E(O_1,.,O_n,C_1,.,C_p)$ est un symbole particulier *obtenu par une combinaison de fonction-concepts*.

Dans le cas où les régles syntaxiques de convention (symbolique) ne permettent pas d'identifier $E(O_1,..,O_n, C_1,..,C_p)$ avec $F_{COMB}(O_1,.,O_n,C_1,.,C_p)$, F_{COMB} étant une fonction-concept, par définition $E(O_1,..,O_n, C_1,..,C_p)$ sera alors identifié avec un symbole particulier non-flou ne pouvant représenter aucun objet mathématique. On pourra alors représenter $E(O_1,.,O_n,C_1,.,C_p)$ par $F_{IMP}(O_1,.,O_n,C_1,.,C_p)$, qui par définition est un symbole particulier non-flou ne pouvant représenter aucun objet. On dira que F_{IMP}, qui n'est pas une fonctio-concept, est la *fonction-concept impossible*. On verra dans des exemples que des fonctions-concepts pourront être utilisées pour définir des relations non-floues.

Les définitions implicites précédentes n'appartiendront pas à la signification Platoniste $Pl_C(P_1)$ de la proposition Platoniste considérée d'où le qualificatif « implicite ».

Par exemple, x, et y étant des symboles particuliers pré-définis, le symbole particulier $(x+_{\mathbf{N}}3)\times_{\mathbf{N}}y$ est obtenu par une combinaison de fonction-concepts et pourra être noté $E(x,y,+_{\mathbf{N}},\times_{\mathbf{N}},3)$.

(j2)DEFINITION AUXILIAIRE PRINCIPALE

Par convention et en accord avec la définition donnée dans le 1ier article, toutes les définitions auxiliaires contenues par une proposition mathématique simple seront représentées par une expression du type $D_{auxj}(o, D_1,..,D_k)$ avec pour i parmi 1,.,k D_i symbole particulier non-flous pré-définis au sens large par une définitions auxiliaire ou une définition mathématiques simple et donc ne sera pas obtenu par une fonction-concept ou une combinaison de fonction-concepts (car alors ils seraient définis par une définition auxiliaire implicite *au sens d'une fonction-concept*).

On a vu qu'on pouvait associer à une proposition Platoniste et donc à $Pl_C(P_1)$, un ensemble $P_{aux}(Pl_C(P_1))$, contenant tous les couples $(R_i(O_1,.,O_n),P_{auxi}(O_1,.,O_n))$, $P_{auxi}(O_1,.,O_n)$ proposition Platoniste auxiliaire utilisée par $Pl_C(P_1)$.

Si dans la proposition mathématique simple P_1 un symbole x est associé, (implicitement ou explicitement d'après la définition donnée dans le 1ier article) à une définition auxiliaire de type $D_{auxj}(o, D_1,..,D_k)$ alors d'après les règles syntaxiques du code C, $Pl_C(P_1)$ ou une proposition auxiliaire utilisée par $Pl_C(P_1)$ contiendra nécessairement une proposition élémentaire Platoniste de type définition de la forme « P_{elD} :Def(x),$R_j(x,D_1,..,D_k)$, avec pour tous $x_0,D_{10},..,D_{k0}$ objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP, $D_{auxj}(x_0,D_{10},.,D_{k0})$ est équivalent à $R_j(x_0,D_{10},..,D_{k0})$. Dans le cas où, x étant un symbole particulier, $D_{auxj}(x, D_1,..,D_k)$ a une signification Platoniste $Pl_C(D_{auxj}(x, D_1,..,D_k))$ qui est une proposition Platoniste non-irréductible ou constituée d'au moins une proposition élémentaire Platoniste de type définition , d'après les règles syntaxiques du code Platoniste C, $R_j(x, D_1,..,D_k)$ aura la signification de la proposition Platoniste auxiliaire $Pl_C(D_{auxj}(x, D_1,..,D_k))$. Réciproquement toute proposition élémentaire de type définition contenue par $Pl_C(P_1)$ correspondra à une définition auxiliaire contenue par P_1.

On aura cependant des exceptions à la règle précédente, c'est-à-dire que certains symboles particuliers définis dans P_1 par des définitions auxiliaires ne le seront pas dans $Pl_C(P_1)$ que nous allons définir :

Si $D_{auxj}(x, D_1,..,D_k)$ n'a pas de signification Platoniste qui soit une proposition Platoniste, alors $Pl_C(P_1)$ ne contiendra aucune des définitions élémentaires Platonistes de type définition correspondant aux définitions auxiliaires contenues par $D_{auxj}(o,D_1,..,D_k)$, R_j sera la relation impossible R_{imp} et x sera un symbole particulier ne pouvant représenter aucun objet mathématique. Ce sera aussi le cas si R_j est la relation impossible R_{imp}. Nous verrons plus loin d'autres exceptions.

Si dans P_1, x est associé à une définition auxiliaire de niveau 0 n'appartenant pas à une expression du type « Non(R_1) » ou « Si R_1 alors R_2 » ou

« R_1 ou R_2 » ou « R_1 est équivalent à R_2 », R_1 et R_2 propositions indépendantes, alors dans $Pl_C(P_1)$, on dira alors que la définition auxiliaire définissant x est une *définition auxiliaire principale*. Alors d'après les règles syntaxiques du code C x sera défini par une proposition Platoniste élémentaire de type définition n'appartenant à aucune proposition Platoniste auxiliaire. Réciproquement toute proposition élémentaire Platoniste de type définition constituant $Pl_C(P_1)$ correspondra à une définition auxiliaire principale contenue par P_1.

On généralise ce qui précède dans le cas où on a $(x_1,..x_t)$ est un symbole particulier associé à une définition auxiliaire $D_{auxj}(o_1,.,o_t,D_1,.,D_k)$.

(j3)PROPOSITION AUXILIAIRE PRINCIPALE.

Si P_1 contient une proposition auxiliaire (ou est elle-même du type) $P_{aux}(D_1,..,D_k,C_1,.,C_p)$ telle que:

-Les symboles particuliers pré-définis au sens strict associés à des définitions auxiliaires de niveau 0 (pas au sens d'une fonction-concept) utilisés par $P_{aux}(D_1,..,D_k, C_1,.,C_p)$ sont $D_1,..,D_k$. De plus, les définitions de $D_1,..,D_k$ sont des définitions auxiliaires principales.
-$C_1,..,C_p$ sont les concepts généraux non-flous pouvant représenter un unique objet utilisés par $P_{aux}(D_1,..,D_k,C_1,.,C_p)$ qui n'appartiennent à aucune définition auxiliaire ou qui sont utilisés pour définir implicitement par des combinaisons de fonctions-concepts des symboles particuliers n'appartenant pas à des définitions auxiliaires.
- $P_{aux}(D_1,..,D_k,C_1,.,C_p)$ ne contient pas de définition auxiliaire principale.
- $P_{aux}(D_1,..,D_k,C_1,.,C_p)$ est nécessairement vraie si P_1 est vraie, d'après les concepts primitifs relationnels utilisés par P_1.
- $P_{aux}(D_1,..,D_k, C_1,.,C_p)$ ne contient pas (strictement) de proposition correspondant aux critères précédents. (Il en résulte qu'elle ne pourra pas être une proposition irréductible au sens large qui n'est pas irréductible au sens strict).

Alors on dira que $P_{aux}(D_1,..,D_k,C_1,.,C_p)$ est *une proposition auxiliaire principale.*

Par exemple si P_1 est de la forme : Pour tout x tel que D(x), « Q(x) est équivalent à R(x) » , alors « Q(x) est équivalent à R(x) » sera *une proposition auxiliaire principale.*

Alors, d'après les règles syntaxiques du code Platoniste C :
-Si $P_{aux}(D_1,..,D_k, C_1,.,C_p)$ est irréductible au sens strict, $Pl_C(P_1)$ contiendra nécessairement une proposition élémentaire Platoniste stable de type relation de la forme P_{elR} :$R(D_1,.,D_k,C_1,..,C_p)$, n'appartenant à aucune proposition Platoniste

auxiliaire (et donc étant l'une des propositions élémentaires auxiliaires constituant P_1) et avec pour tous objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP $D_{10},.,D_{k0},C_{10},..,C_{p0}$, $P_{aux}(D_{10},..,C_{p0})$ est équivalent à $R(D_{10},.,C_{p0})$. On dira que P_{elR} :$R(D_1,.,D_k,C_1,..,C_p)$ est *la signification Platoniste* de $P_{aux}(D_1,..,D_k,C_1,.,C_p)$.

Dans le cas où, $P_{aux}(D_1,..,D_k, C_1,.,C_p)$ contient au moins une définition auxiliaire et que de plus, $D_{C1},.,D_{Cp}$ étant des symboles particuliers pré-définis quelconques, $P_{aux}(D_1,..,D_k, D_{C1},.,C_{Cp})$ a une signification Platoniste qui est une proposition Platoniste notée $Pl_C(P_{aux}(D_1,..,D_k, D_{C1},.,D_{Cp}))$, alors R sera définie par : Pour tous objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP $D_{10},..,D_{k0}$, $D_{C10},.,D_{Cp0}$, « $R(D_{10},..,D_{k0}, D_{C10},.,D_{Cp0})$ est équivalent à $Pl_C(P_{aux}(D_{10},..,D_{k0}, D_{C10},., D_{Cp0})$ ». On dira que dans $Pl_C(P_1)$, $R(D_1,..,D_k, C_1,.,C_p)$ a $Pl_C(P_{aux}(D_1,..,D_k, C_1,.,C_p))$ comme signification Platoniste et que $Pl_C(P_1)$ contient la proposition auxiliaire $Pl_C(P_{aux}(D_1,..,D_k, C_1,.,C_p))$. Dans le cas où $P_{aux}(D_1,..,D_k, C_1,.,C_p)$ n'a pas de proposition Platoniste comme signification Platoniste ou si R est la relation impossible, alors $Pl_C(P_1)$ ne contiendra pas les propositions élémentaires Platonistes de type définition définissant les symboles particuliers définis dans $P_{aux}(D_1,..,D_k, C_1,.,C_p)$ par des définitions auxiliaires et R sera R_{imp} la *relation impossible*.

-Si $P_{aux}(D_1,..,D_k, C_1,.,C_p)$ n'est pas irréductible au sens strict mais s'exprime en fonction des propositions irréductibles au sens strict $P_{ir1}(O'_{11},\ldots,O'_{1k(1)}),..,P_{irp}(O'_{p1},..,O'_{pk(p)})$ et de concepts primitifs relationnels, avec les O'_{rs} parmi $D_1,..,C_p$, et chaque P_{irj} contenant au moins un O'_{jt}, alors $Pl_C(P_1)$ contiendra nécessairement une proposition élémentaire Platoniste stable de type relation composée et la constituant en remplaçant dans $P_{aux}(D_1,..,D_k, C_1,.,C_p)$ pour j parmi 1,..,p $P_{irj}(O'_{j1},\ldots,O'_{jk(j)})$ par la proposition élémentaire stable Platoniste de type relation P_{elRj} :$R_j(O'_{j1},\ldots,O'_{jk(j)})$ avec pour tous objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP $O'_{j10},\ldots,O'_{jk(j)0}$, $P_{irj}(O'_{j10},\ldots,O'_{jk(j)0})$ est équivalent à $R_j(O'_{j10},\ldots,O'_{jk(j)0})$. Si $R(D_1,..,D_k, C_1,.,C_p)$ est la proposition élémentaire Platoniste de type relation obtenue, on aura alors comme précédemment, de façon évidente, pour tous objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP $D_{10},..,D_{k0}$, $C_{10},.,C_{p0})$, « $P_{aux}(D_{10},..,D_{k0}, C_{10},.,C_{p0})$ est équivalent à $R(D_{10},..,D_{k0}, C_{10},.,C_{p0})$ » .

Comme dans le cas précédent, d'après les règles syntaxiques du code Platoniste C, si $P_{irj}(O'_{j1},\ldots,O'_{jk(j)})$ contient au moins une définition auxiliaire et que de plus a comme signification Platoniste une proposition Platoniste $Pl_C(P_{irj}(O'_{j1},\ldots,O'_{jk(j)}))$, alors $R_j(O'_{j1},\ldots,O'_{jk(j)})$ aura $Pl_C(P_{irj}(O'_{j1},\ldots,O'_{jk(j)}))$ comme signification Platoniste. Si $P_{irj}(O'_{j1},\ldots,O'_{jk(j)})$ n'a pas de signification Platoniste qui soit une proposition Platoniste ou si R_j est la relation impossible, alors $Pl_C(P_1)$ ne contiendra pas les définitions de symboles particuliers définis par des définitions

auxiliaires contenues par $P_{irj}(O'_{j1},\ldots,O'_{jk(j)})$ et on prendra comme relation R_j la relation impossible R_{imp}.

Dans le cas où P_{irj} ne contient aucun O'_{jt}, d'après les règles syntaxiques du code Platoniste, si P_{irj} n'a pas de signification Platoniste qui soit une proposition Platoniste, R_j sera la relation impossible R_{imp}.et alors $Pl_C(P_1)$ ne contiendra pas les propositions élémentaires de type définition définissant les symboles particuliers définis par des définitions auxiliaires contenues par P_{irj}. Sinon on remplacera P_{irj} par la proposition irréductible au sens large $P_{irj}(1)$: « P_{irj} et « 1=1 »). Si $R_j(1)$ a $Pl_C(P_{irj}(1))$ comme signification Platoniste, on remplacera P_{irj} par $R_j(1)$ dans $P_{aux}(D_1,..,D_k, C_1,.,C_p)$ pour obtenir la proposition élémentaire Platoniste de type relation correspondant à $P_{aux}(D_1,..,D_k, C_1,.,C_p)$.

Réciproquement, toute proposition élémentaire Platoniste de type relation constituant $Pl_C(P_1)$ (et donc n'appartenant pas à une proposition Platoniste auxiliaire), correspondra nécessairement à une proposition auxiliaire Principale contenue par P_1.

De plus, pour que P_1 (ou P_i avec i>1) ait une signification Platoniste qui soit une proposition Platoniste, nécessairement, d'après les règles syntaxiques du code Platoniste C, tout symbole particulier, tout concept général, tout symbole représentant une relation non-floue contenue par P_1, appartiendront à une définition auxiliaire principale ou à une proposition auxilaire principale ou sera un symbole particulier associé à une définition auxiliaire principale. On pourra donner des règles syntaxiques définissant formellement les cas de proposition auxiliaire principale, obtenue à partir de la définiton générale donnée plus haut. Par exemple si P_1 (ou P_i) ne contient aucune proposition auxiliaire exceptée elle-même, alors P_1 (ou P_i) sera une proposition auxilaire principale.

(j4)La dernière règle syntaxique du code Platoniste C concernant une proposition mathématique simple irréductible, appelée « règle finale syntaxique du code Platoniste C » (Même si on pourra rajouter des règles syntaxiques, elle sera toujours considérée comme la dernière) sera que si d'après toutes les autres règles syntaxiques du code Platoniste C on a « P est équivalent à (ou a comme signification Platoniste) une proposition Platoniste » est indécidable, alors on aura : « P n'est pas équivalent à une proposition Platoniste ».

(j5)Si P_1 est une proposition mathématique simple irréductible qui n'est pas équivalente (dans T sur C) à une proposition stable Platoniste (d'après les points j1 à j4), alors on aura par définition $Pl_C(P_1)$ est Ø.

Dans le cas où P_1 est une proposition mathématique simple qui n'est irréductible au sens strict:

(h1)Si P_1 est une proposition mathématique simple utilisant les propositions auxiliaires mathématiques simples irréductibles au sens strict indépendantes $Q_1,..,Q_h$, alors P_1 sera équivalente à $Pl_C(P_1)$, $Pl_C(P_1)$ étant obtenu en remplaçant dans P_1 Q_i par $Pl_C(Q_i)$ si Q_i est équivalente à une proposition stable Platoniste $Pl_C(Q_i)$ et par « 1=2 » sinon. Dans ce dernier cas, $Pl_C(Q_i)$ ne contiendra pas les propositions élémentaires Platonistes de type définition définies dans les définitions auxiliaires contenues par Q_i. Et donc on aura alors nécessairement P_1 a une proposition stable comme signification Platoniste à laquelle elle sera équivalente dans T sur C.

(ii)Si P_1 est une proposition mathématique simple telle que $Pl_C(P_1)$ est une proposition Platoniste stable qui est vraie, on dira que P_1 est *vraie* dans le texte T sur le code C. Si elle est une proposition mathématique simple avec $Pl_C(P_1)$ est une proposition Platonsite qui n'est pas vraie, on dira alors qu'elle n'est pas vraie (ou qu'elle est fausse) dans le texte T sur le code C. Si $Pl_C(P_1)$ est Ø, on dira que P_1 n'est pas vraie dans T sur C.

Si P_1 n'est pas vraie, alors on admettra par définition d'un code Platoniste C que dans T, pour i>1, $Pl_C(P_i)$=Ø.

Par exemple si on a la proposition P_1 :« ($\mathbf{N}$,$+_{\mathbf{N}}$) est un groupe » (identifiant ($\mathbf{N}$,$+_{\mathbf{N}}$) avec un concept général non-flou représentant un unique objet), P_1 pourra être mis sous la forme de la proposition auxiliaire principale irréductible $P_{aux}((\mathbf{N},+_{\mathbf{N}}))$, et aura comme signification Platoniste P_{elR} :$R((\mathbf{N},+_{\mathbf{N}}))$: « ($\mathbf{N}$,$+_{\mathbf{N}}$) est un groupe ». On aura bien alors pour tous objets non-relationnels et différent de l'EMP O_{10} et O_{20}, $R(O_{10}, O_{20})$ est équivalent à $P_{aux}(O_{10}, O_{20})$.

Si on a la proposition P_1 : « $(1+_{\mathbf{N}}2)\times_{\mathbf{N}}3=6$ », P_1 sera elle-même une proposition auxiliaire principale de la forme $P_{aux}(1,+_{\mathbf{N}},2,\times_{\mathbf{N}},3,6)$, et on pourra identifier « $(1+_{\mathbf{N}}2)\times_{\mathbf{N}}3$ » avec un symbole particulier obtenu par une combinaison de fonction-concepts et noté : $E(1,+_{\mathbf{N}},2,\times_{\mathbf{N}},3)$.

(iii)Si $P_1,\ldots,P_{i-1}$ sont des propositions vraies de T, et si $Pl_C(P_1),..,Pl_C(P_{i-1})$ entraînent que P_i est *équivalente* (dans le texte T sur C) à une proposition stable platoniste, celle-ci sera une signification platoniste de P_i dans T et sera notée $Pl_C(P_i)$.
(On définira « P_i est *équivalente* (dans le texte T sur C) à une proposition stable Platoniste $Pl_C(P_i)$ de la même façon que « P_1 est *équivalente* à une proposion stable Platoniste $Pl_C(P_1)$ », (P_i étant donc nécessairement une proposition mathématique simple) en ajoutant, dans le cas où P_i est irréductible au sens strict:

-Dans (j3) et (j2) (de (i)), P_i étant une proposition mathématique simple irréductible, $D_1,..,D_k$ pourront être parmi les concepts particuliers pré-définis $O_1,..,O_n$ utilisés par $P_i(O_1,..,O_n)$.

-Dans le cas où P_i est une proposition mathématique simple qui n'est pas irréductible au sens strict, on obtient $Pl_C(P_i)$ de la même façon que pour P_1 dans le cas où P_1 n'est pas irréductible.

(iv)Comme pour P_1, si $Pl_C(P_i)$ est une proposition Platoniste vraie, on dira que P_i est *vraie* dans le texte T sur le code et si c'est une proposition Platoniste fausse, que P_i n'est pas vraie ou qu'elle est *fausse* dans le texte T sur le code C.

Si pour i on a $Pl_C(P_i)$ est fausse alors pour j>i, $Pl_C(P_j)=Ø$.

On remarque que notre définition d'une proposition mathématique simple vraie donnée dans le 1ier article (1) ne sera valide que si elle appartient à un texte T sur un code C, toutes les propositions la précédant dans ce texte étant vraies.

On verra plus loin qu'un autre type de proposition qu'une proposition mathématique simple, appelée *proposition mathématique conditionnelle*, pourra avoir une signification Platoniste qui est une proposition stable Platoniste.

b)Tout code Platoniste C (S,R_C) admettra un Texte sur S appelé *hypothèses* de C et noté H(C) contenant des propositions équivalentes à des relations (ou objets mathématiques relationnels) entre des objets mathématiques qui sont vraies. H(C) contiendra les fondements de la TMP notamment l'Axiome 1.1 (1), la définition d'une relation floue et celles des ensembles ou d'un couple. H(C) sera utilisé pour obtenir $Pl_C(P_i)$, P_i étant une des propositions d'un texte T.

c)On a vu que les propositions Platonistes stables ne permettaient pas de définir un concept général non-flou « un C_1 » ou un concept relationnel général représentant une unique relation non-floue « R_G », puisque « « un C_1 »est un concept général non-flou » et « R_G est un concept relationnel général représentant une unique relation non-floue non-floue » n'étaient pas équivalents à des propositions mathématiques simples. Pour qu'un texte T puisse définir un concept général non-flou « un C_1 » et une relation non-floue R_G, on admettra que dans tout code Platoniste C un texte T peut aussi contenir des propositions $Q_{i,1}$ ($Q_{i,1}$ étant une proposition succédant immédiatement à P_i) de la forme:
$Q_{i,1}$ ((un) C_1) : « « (un) C_1 » est un concept général non-flou (pouvant représenter un unique objet mathématique (flottant (1)))) ». On rappelle que si C_1 est un *concept général flottant* pouvant représenter un seul objet, il pourra être identifié

avec plusieurs concepts généraux pouvant représenter un unique objet. Dans ce cas, d'après les règles syntaxiques de convention, si $Q_{i,1}(C_1)$ est immédiatement suivi d'une proposition P_{i+1}, avec $Pl_C(Pi+1)$:$R(C_1)$, R relation non-floue (n'étant pas la relation impossible), alors C_1 pourra être identifié avec tout concept général non-flou pouvant représenter seulement O_0, avec O_0 tel que $R(O_0)$ est vraie. Une proposition Platoniste pourra utiliser un concept général flottant comme un concept général non-flou pouvant représenter un unique objet mathématique ordinaire. De même pour la signification Platoniste d'une proposition mathématique simple utilisant un concept général flottant.

$Q_{i,1}$ (*F*) : « *F* est une fonction-concept » (On a défini dans le 1ier article [1] une fonction-concept comme un concept général non-flou particulier).

$Q_{i,1}(R)$ « R_G (ou $R_{GnG1,..,nGk}$) est un concept relationnel général (*flottant*) représentant une unique une relation non-floue (d'ordre de multiplicité n_G) » (n_G étant un concept général représentant un unique naturel non nul). (Les parenthèses indiquent que les temes qu'elles contiennent peuvent être omis).

(Si $R_{GnG1,..,nGk}$ est définie en utilisant des concepts généraux flottants n_{G1},..,n_{Gk} et que les n_{Gi} étant identifiés avec des concepts généraux avec lesquels ils peuvent être identifiés, $R_{nG1,.,nGk}$ peut être identifié avec un concept général relationnel représentant une unique relation non-floue, alors on dira que $R_{nG1,.,nGk}$ est un *concept général relationnel flottant*. (ou une *relation non-floue flottante*.).

Pour exprimer une définition récursive, on utilisera :

$Q_{i,1}(t_{0DR})$: « t_{0DR} est (un concept général non-flou (flottant)) premier terme de la définition récursive D_R ».

$Q_{i,1}(D_{PRDR})$: « D_{PRDR} (ou $D_{PRDRGnG1,..,nGk}$) est la (relation non-floue(flottante)) propriété récursive de D_R »

$Q_{i,1}(D_{RCDR})$: « D_{RCDR} (ou $D_{RCDRGnG1,..,nGk}$) est la (relation non-floue(flottante)) clause de récursion de D_R ».

Si on définit D_R en utilisant les concepts généraux flottants n_{G1},…,n_{Gk}, (par exemple si t_{0DR} est un concept général flottant) alors « est un terme de D_R » sera identifiée avec une relation non-floue flottante $R_{nG1,..,nGk}$.

On dira que les propositions précédentes $Q_{i,1}$ sont des *propositions Platonistes relationnelles*.

Si toutes les propositions précédant $Q_{i,1}$ dans le texte T considéré sont vraies, alors on dira $Q_{i,1}$ est vrai dans le texte T sur C et $Pl_C(Q_{i,1})=Q_{i,1}$. Sinon, on dira que $Q_{i,1}$ n'est pas vraie (ou est fausse) dans le texte T sur C et $Pl_C(Q_{i,1})=\emptyset$.

Après une proposition Platoniste relationnelle du type $Q_{i,1}$(un C_1) ou $Q_{i,1}$(*F*) ou $Q_{i,1}(R_G)$, une proposition mathématique simple du texte T considéré pourra utiliser « *F* », « R_G » ou « un C_1 ».

d)On a vu que $O(O_1,..,O_n)$ étant un concept particulier non-flou, on pouvait définir $O(O_1,..,O_n)$ *sans paramètres fixes* qui était un concept général non-flou. On pourra donc utiliser ce type de concept général non-flou dans des propositions pour définir des concepts généraux non-flous ou des relations non-floues.

e)On admettra par définition que dans tout texte vrai $T(P_1,..,P_n)$ et dans tout code Platoniste C, pour qu'une proposition P_i puisse utiliser un concept particulier non-flou pré-défini O_1, on doit avoir une proposition vraie P_j avec $j<i$ telle que P_j est constituée d'une unique définition auxiliaire principale définissant O_1.

f)On verra plus loin qu'un texte T pourra contenir aussi des propositions mathématiques appelées propositions mathématiques conditionnelles et de la forme Cond(« Q_{H1}») ou Cond(« Q_{H1}) »/../Cond(« Q_{Hp}») ou U_i/Cond(« Q_{H1} »/../Cond(« Q_{Hp} »), U_i, Q_{Hj} étant des propositions mathématiques simples particulières ayant des significations Platonistes. De telles propositions mathématiques simples pourront aussi avoir des signfications Platonistes qui sont des propositions Platonistes d'après les règles syntaxiques du code Platoniste C.

REMARQUE 2.23A :

a)On remarque qu' « une proposition stable Platoniste » n'est pas un concept général non-flou car on ne l'a pas associé à une définition générale non-floue. De même R_C n'est pas non plus une relation non-floue. R_C et « une proposition Platoniste » ou « un concept particulier non-flou » sont des outils para-mathématiques permettant d'étudier les objets de l'EMP.

b)(S,R_C) étant un code Platoniste, un texte sur S noté T pourra donc contenir des propositions mathématiques simples, le code C permettant d'obtenir leur signification Platoniste, et des propositions mathématiques relationnelles. P_i étant une proposition d'un texte T sur un code C, pour obtenir $Pl_C(P_i)$, le code C utilisera $Pl_C(P_1),..,Pl_C(P_{i-1})$, mais aussi les propositions $Q_{j,1}$ avec $j<i$, et aussi l'hypothèse de C noté H(C).

c)Dans ce qui suit on pourra noter $T(P_1,.,P_n)$ un texte sur un code C sans expliciter les propositions Platonistes relationnelles de type $Q_{i,1}$ contenues par T.

d)L'Axiome 2.5Adu premier article [(1)] est alors une conséquence de la définition d'une proposition mathématique simple vraie telle qu'on l'a donné dans la section 2.23. En effet, P_i étant une proposition d'un texte $T(P_1,.,P_n)$ sur un code C, avec $P_1,..,P_{i-1}$ vraie, si P_i est une proposition mathématique simple irréductible, P_i est

équivalente ou(exclusif) n'est pas équivalente à une proposition Platoniste (A cause de la règle sytaxique finale du code Platoniste C). De plus, si P_i est équivalente à une proposition Platoniste, alors d'après un Théorème fondamental P_i est vraie ou(exclusif) n'est pas vraie. Et donc, puisque si P_i n'est pas équivalente à une proposition Platoniste alors P_i n'est pas vraie (exclusivement), on a bien P_i est vraie ou(exclusif) n'est pas vraie.

La relation R_C d'un code Platoniste C permet donc d'obtenir le contenu mathématique d'une proposition mathématique simple (Si elle en possède). Les règles syntaxiques qu'on a données en 2.23 permettent d'obtenir une signification Platoniste qui est une proposition Platoniste pour la plupart des propositions mathémtiques simples couramment utilisées en mathématique.

e)On pourra aussi considérer que les règles définissant une proposition mathématique simple données dans la section 2.5 du premier article sont des règles syntaxiques du code Platoniste C. En effet, on a vu que pour qu'une proposition P puisse avoir une signification Platoniste $Pl_C(P)$ qui soit une proposition Platoniste avec donc $PR_CPl_C(P)$, P était nécessairement une proposition mathématique simple. Par exemple les *règles syntaxiques de convention (symbolique)* mais aussi les *règles de ponctuation* et des *règles d'utilisation des concepts primitifs relationnels* constituent des règles syntaxiques du code Platoniste C.

On a les exemples suivants de règles syntaxiques de convention symbolique : f et a étant des symboles particuliers pré-définis « f(a) » aura la signification de « im(f,a) ». a et b étant des symboles particuliers pré-définis et R un symbole représentant une unique relation non-floue d'ordre de multiplicité 2, « aRb » aura la signification de « R(a,b) ». A étant un concept particulier pouvant représenter seulement des (ou un) ensemble, « Pour tout x élément de A » aura la même signification que « Pour tout x tel que x est élément de A ». a et b étant des symboles particuliers pouvant représenter seulement des éléments de **N**, « ab » aura la même signification que « $\times_{\mathbf{N}}$(a,b) ». (Et de même pour des éléments de **Z**,**Q** ou **R**).

On admettra, dans tout code Platoniste C, toutes les règles syntaxiques induites par les conventions symboliques universellement admises dans toutes les théories mathématiques classiques.

f)Si on a une proposition auxiliaire du type P_{aux1} : « Il existe un et un seul x tel que $P_1(x,O_1,..,O_n)$ », avec une relation non-floue d'ordre de multiplicité n+1 R_1 telle que pour tous objets non-relationnels et différents de l'EMP $x_0,O_{10},..,O_{n0}$, « $P_1(x_0,O_{10},..,O_{n0})$ est équivalent à $R_1(x_0,O_{10},..,O_{n0})$ » alors d'après les règles syntaxiques du code Platoniste C, P_{aux1} aura $Pl_C(P_{aux1})(P_{el1},P_{el2},P_{el3})$ comme

signification Platoniste avec : P_{el1} :Def(x),R_1(x,O_1,.,O_n), P_{el2} :Def(y),R_1(O_1,.,O_n), P_{el3} :=(x,y).

On aura donc une exception à une règle introduite en 2.23 puisque $Pl_C(P_{aux1})$ définira le symbole particulier « y » qui n'est pas défini dans P_{aux1}. Cepndant on utilisera la notation $Pl_C(P_{aux1})$: (P_{el1S}), avec P_{el1S} :Def_{1S}(x),R_1(x,O_1,..,O_n), et avec cette notation le symbole « y » sera implicitement utilisé par $Pl_C(P_{aux1})$.

g)On pourra vérifier que les Axiomes propositions mathématiques simples ou équivalentes à des propositions mathématiques simples introduits dans le 1^{ier} article auront tous des significations Platonistes qui sont des propositions stables Platonistes.

DEFINITION 2.24 :

Soit C(S,R_C) un code Platoniste, et P_i une proposition d'un texte (P_1,..,P_n).

Si $Pl_C(P_i)$ est une proposition Platoniste stable (resp vraie, fausse) on dira que P_i est *stable* (resp.*vraie*, *fausse*) dans le texte T sur le code C (ou dans (T,C)). Sinon on dira que P_i est *instable* dans (T,C). (On écrira seulement « stable (ou vraie,fausse, instable) dans T » si on a introduit un seul code C et seulement « stable » si on a introduit un seul code C et un seul texe T).

Une conséquence du Lemme 2.18 est le Lemme :

LEMME 2.25 :

Si on a une proposition P_i d'un texte T(P_1,..,P_n) et un code C :

a)Si P_i est stable, P_i est vraie ou P_i est fausse.

b)Si P_i est stable P n'est pas vraie et fausse.

On voit que le Lemme 2.25 peut être considéré comme le Principe du Tiers exclu et le Principe de Non-contradiction pour les propositions dans la Théorie de logique Platoniste(TLP). Cependant, dans cette théorie ce sont des Lemmes justifiés théoriquement et conséquences des Axiomes de la TLP, alors qu'ils sont admis axiomatiquement dans les théories mathématiques de logique formelle.

DEFINITION 2.26 :

(S,R_C) étant un code Platoniste, $T(P_1,..,P_n)$ étant un texte sur S, on dira que $T(P_1,..,P_n)$ est *un texte vrai (dans C)* si pour tout i dans $\{1,..,n\}$ P_i est vraie (dans (C,T)). On dira aussi que l'ensemble vide est un Texte vrai dans tout code Platoniste C.

REMARQUE 2.27 :

Une conséquence immédiate du Lemme 2.25, est que dans un code C, tout texte T est ou bien vrai ou bien n'est pas vrai, et ne peut pas être vrai et n'être pas vrai.

DEFINITION 2.28 :

(S,R_C) étant un code Platoniste C et $T(P_1,..,P_n)$ étant un texte vrai dans C, on dira que Q est *une déduction logique relationnelle* de $T(P_1,….,P_n)$ si on a d'après les relations exprimées par $Pl_C(P_1),..,Pl_C(P_n)$: « Q est vraie dans $(P_1,.,P_n,Q)$ », c'est à dire « H(C), $Pl_C(P_1),..,Pl_C(P_n)$ vraies » entraînent « Q est vraie dans $(P_1,.,P_n,Q)$ ». (« entraîne » est un concept primitif qu'on a déjà utilisé).

REMARQUE 2.29 :

Le concept primitif de *déduction logique relationnelle* est important car c'est toujours cette sorte de déduction logique qui est utilisé en mathématique.

DEFINITION 2.30 :

(S,R_C) étant un code Platoniste, et T $(P_1,..,P_n)$ un texte vrai sur S, on dira que $(Q_1,..,Q_k)$ est une *démonstration sur* T dans C de Q_k si Q_1 est déduction logique relationnelle de T , et pour tout i dans $\{2,..,k\}$, Q_i est déduction logique relationnelle de $(T,Q_1,..,Q_{i-1})$.

D'après la définition d'une déduction logique relationnelle donnée en 2.28, on a alors $(T,Q_1,…,Q_k)$ est un texte vrai. Par convention on utilisera le terme « démonstration », seulement si $Q_1,..,Q_k$ sont des déductions logiques relationnelles évidentes.

DEFINITION 2.31 (DEMONSTRATION PAR RECURRENCE) :

T étant un texte vrai dans un code C, supposons qu'on ait une proposition P_{REC} : « Pour tout n dans **N***, P(n) », avec P(n) proposition utilisant n comme seul concept particulier prédéfini et P_{REC} proposition mathématique simple équivalente à une proposition stable Platoniste dans (T,P_{REC}). Un texte vrai contenant T pourra utiliser une démonstration par récurrence sur T , définie par :

(R_1,..,R_{k+1}) est une *démonstration par récurrence* sur T de P_{REC} si :

-(R_1,..,R_s) est une démonstration sur T de P(1). (pour un naturel s donné dans {1,..,k-3})
-R_{s+1},..,R_{k+1} sont des propositions vraies du type, U_{s+3},..,U_k étant des propositions mathématiques simples:

R_{s+1} : Soit n élément de **N***
R_{s+2} : Cond(P(n)).
R_{s+3} : U_{s+3}/Cond(P(n))
…
R_k : U_k/Cond(P(n)) (U_k étant la proposition P(n+1)).
R_{k+1} :P_{REC}.

(On dira que R_{s+2},..,R_k sont des *propositions mathématiques conditionnelles (simples)* .On pourra généraliser la définition précédente R_1 étant précédé d'un texte vrai T_0(S_1,..,S_p)).

On aura par définition d'une démonstration par récurrence, si P(n) est vraie dans (T,R_1,.,R_{s+1},P(n)), U_{s+3} est déduction logique relationnelle (par convention évidente) de (T,R_1,..,R_{s+1},P(n)). Pour tout i dans {s+4,..,k}, si P(n) est vraie dans (T,R_1,.,R_{s+1},P(n)). U_i est déduction logique relationnelle (par convention évidente) de (T, R_1,..,R_{s+1}, P(n), U_{s+3},.,U_{i-1}).

Par définition, dans tout code Platoniste, R_{s+2} :Cond(P(n)) sera vraie si P(n) est une proposition mathématique simple équivalente à une proposition Platoniste stable. De plus, R_{s+2} étant vraie, R_j :U_j/Cond(P(n)) sera vraie dans (R_1,..,R_j) si on a « P(n) n'est pas vraie dans (R_1,..,R_{s+1},P(n)) (c'est-à-dire Non(P(n)) vraie dans (R_1,.., R_{s+1},Non(P(n)))) » ou « P(n) est vraie dans (R_1,..,R_{s+1},P(n)) et U_{s+3},..,U_j sont des propositions mathématiques simples vraies dans (R_1,.R_{s+1},P(n),U_{s+3},..,U_j) ». Si P(n) est équivalent à une proposition stable Platoniste qui n'est pas vraie, R_j aura comme signification Platoniste Pl_C(Non(P(n)), de même que Cond(P(n)). Si P(n) est vraie de même que R_1,..,R_{j-1}, si U_j est une proposition mathématique simple, R_j aura comme signification Platoniste Pl_C(U_j), signification Platoniste de U_j dans (R_1,.,R_{s+1},P(n), U_{s+3},..,U_j). Alors R_j n'est pas vraie, et en particulier dans le cas où U_j n'est pas une proposition mathématique simple, on aura Pl_C(R_m)=Ø pour m>j. Si P(n) est une proposition mathématique simple vraie, Cond(P(n)) aura Pl_C(P(n))

comme interprétation Platoniste. Une conséquence des définitions précédentes est qu'on aura nécessairement dans une démonstration par récurrence $R_1,.,R_k$ seront vraies. De plus R_{k+1} sera une déduction logique relationnelle évidente de $(R_1,..,R_k)$.

On pourra cependant éviter l'utilisation de propositions mathématiques conditionnelles en considérant la proposition vraie R_{As+2} : « n est tel que P(n) » et en considérant le texte vrai $(R_1,.,R_s, R_{As+2},U_{s+3},..,U_k)$.

On pourra remplacer P(n) par $P(n,O_1,..,O_p)$, $O_1,..,O_p$ étant des concepts particuliers pré-définis.

Dans tout code Platoniste C, les propositions de la séquence définie précédemment $(R_{s+2},..,R_k)$ auront la même signification Platoniste que les propositions de la séquence finie (« On suppose P(n) »,$U_{s+3},..,U_k$).

R_{k+2} étant une proposition qui n'est pas une proposition mathématique conditionnelle, R_{k+2} sera vraie dans $(R_1,..,R_{k+2})$ si et seulement si R_{k+2} est vraie dans $(R_1,..,R_s,R_{k+1},R_{k+2})$.

DEFINITION 2.32 (DEMONSTRATION PAR L'ABSURDE) :

Soit T un texte vrai dans un code C et Q_H une proposition équivalente à une proposition stable Platoniste $P_{lC}(Q_H)$ dans (T,Q_H). Un texte vrai contenant T pourra contenir une démonstration par l'absurde sur T définie par :

$(R_1,..,R_{k+2})$ est une *démonstration par l'absurde (simple)* sur T de $Non(Q_H)$ si $R_1,..,R_{k+2}$ sont des propositions vraies du type (on dira qu'elles sont des propositions conditionnelles simples), $U_2,..,U_{k+1}$ étant des propositions mathématiques simples:

R_1 :Cond(Q_H)
R_2 :U_2/Cond(Q_H)
…
R_k :U_k/Cond(Q_H)
R_{k+1} :U_{k+1}/Cond(Q_H), Avec U_{k+1} est la proposition Non(U_k)
(Avec « Non(U_k) » définie comme la négation de U_k c'est-à-dire « Pl_C(Non(U_k)) est vraie » est équivalent à « $Pl_C(U_k)$ n'est pas vraie »).
R_{k+2} :Non(Q_H).

$U_2,..,U_{k+1}$ vérifiant :

Si Q_H est vraie dans (T,Q_H), U_2 est déduction logique relationnelle (par convention évidente) de (T,Q_H). Pour j dans {3,.,k+1}, si Q_H est vraie dans (T,Q_H), U_j est déduction logique relationnelle (par convention évidente) de $(T,Q_H,U_2,..,U_{j-1})$. $R_1,..,R_{k+1}$ seront des *propositions mathématiques conditionnelles (simples))*.

Comme dans la section précédente, par définition, dans tout code Platoniste C, R_1 :Cond(Q_H) sera vraie si Q_H est une proposition Platoniste stable. R_1 étant vraie, R_j :U_j/Cond(Q_H) sera vraie si on a « Q_H n'est pas vraie (C'est-à-dire Non(Q_H) est vraie) » ou « Q_H est vraie et U_2,..,U_j sont des propositions mathématiques simples vraies dans (Q_H,U_2,..,U_j) ». Dans le cas où Non(Q_H) est vraie, par définition, R_1,.,R_{k+2} seront donc vraies et auront par définition pour signification Platoniste, dans tout code Platoniste C Pl_C(Non(Q_H)). R_1,..,R_{j-1}, étant vraies, si R_j est une proposition mathématique simple, R_j aura Pl_C(U_j) comme signification Platoniste, Pl_C(U_j) étant la signification Platoniste de U_j dans (Q_H,U_2,..,U_j). Si R_j n'est vraie, on aura Pl_C(R_m)=Ø pour m>j. R_1 omme sera vraie et aura comme signification Platoniste Pl_C(Q_H). Il en résulte que dans une démonstration par l'absurde telle que définie plus haut, R_1,.., R_{k+1} seront toujours vraies dans (R_1,…,R_{k+1}).

Supposons que Q_H soit vraie dans (T,Q_H). Alors U_k et Non(U_k) sont vraies ce qui est impossible car si Q_H est vraie P_{lC}(U_k) est une proposition Platoniste stable et donc Pl_C(U_k) est vraie ou (exclusif) n'est pas vraie. Ceci justifie que R_{k+2} soit déduction logique relationnelle évidente de (T,R_1,.,R_{k+1}).

R_{k+3} étant une proposition qui n'est pas une proposition mathématique conditionnelle, R_{k+3} sera vraie dans (R_1,..,R_{k+3}) si et seulement si R_{k+3} est vraie dans (R_{k+2},R_{k+3}).

Dans tout code Platoniste C, les propositions de la séquence définie précédemment (R_1,..,R_{k+1}) auront la même signification Platoniste que les propositions de la séquence (« On suppose Q_H »,U_2,..,U_{k+1}). On pourra utiliser aussi des propositions équivalentes à des propositions conditionnelles simples pour montrer des propositions du type « Si P_1 alors P_2 » ou « P_1 est équivalent à P_2 », P_1 et P_2 étant équivalentes à des propositions Platonistes stables.

On pourra définir une démonstration par l'absurde de niveau 1 de la manière suivante :

Considérons le texte suivant :

P_1 :Cond(Q_H)
P_2 :Cond(R_H)/Cond(Q_H)
P_3 :U_3/Cond(R_H)/Cond(Q_H)
..
P_k :U_k/Cond(R_H)/Cond(Q_H)
P_{k+1}:U_{k+1}/Cond(R_H)/Cond(Q_H).
P_{k+2} :Non(R_H)/Cond(Q_H).

On dira que $P_2,..,P_{k+1}$ sont *des propositions mathématiques conditionnelles* (*de niveau 1*).

On suppose que Q_H est équivalente à une proposition stable Platoniste et que si Q_H est vraie, alors R_H est équivalente à une proposition stable Platoniste dans (Q_H,R_H).

On suppose aussi que si Q_H et R_H sont vraies dans (Q_H,R_H), alors pour j parmi 3,..,k+1 U_j est une proposition mathématique simple déduction logique relationnelle (par convention évidente) de $(Q_H,R_H,U_3,..,U_{j-1})$ et que de plus si Q_H et R_H sont vraies dans (Q_H,R_H), alors dans $(Q_H,R_H,U_3,..,U_{k+1})$, $Pl_C(U_k)$ est équivalent à $Non(Pl_C(U_{k+1}))$.

Alors on aura P_{k+2} déduction logique relationnelle évidente de $(P_1,.,P_{k+1})$ et on dira que $(P_1,..,P_{k+2})$ est une *démonstration par l'absurde (de niveau 1)*.

Par définition des propositions mathématiques conditionnelles, dans tout code Platoniste C, P_1 étant vraie, P_2 :Cond(R_H)/Cond(Q_H) sera vraie si « Q_H n'est pas vraie » ou « Q_H est vraie et R_H est une proposition mathématique simple équivalente à une proposition stable Platoniste qui n'est pas vraie dans (Q_H,R_H) » ou « Q_H et R_H sont des propositions mathématiques simples vraies dans (Q_H,R_H) ».

P_1 et P_2 étant vraies, P_j :U_j/Cond(R_H)/Cond(Q_H) sera vraie si « Q_H n'est pas vraie » ou « Q_H est vraie et R_H n'est pas vraie » dans (Q_H,R_H) ou « Q_H est R_H sont des propositions mathématiques simples vraies dans (Q_H,R_H) et $U_3,.,U_j$ sont des propositions mathmatiques simples vraies dans $(Q_H,R_H,U_3,..,U_j)$ ». $P_1,.,P_{j-1}$ étant vraies, si P_j n'est pas une proposition mathématique simple vraie on aura P_m n'est pas vraie et $Pl_C(P_m)=Ø$ pour m>j.

Par définition des propositions mathématiques conditionnelles, dans tout code Platoniste C, si Q_H est équivalente à une proposition stable Platoniste qui n'est pas vraie, alors pour j parmi 2,..,k+1, $Pl_C(P_j)$ sera $Non(Pl_C(Q_H))$, si Q_H est équivalente à une proposition stable Platoniste qui est vraie et R_H est équivalent à une proposition stable Platoniste qui n'est pas vraie dans (Q_H,R_H) pour j dans 3,..,k+1, $Pl_C(P_j)$ sera $Non(Pl_C(R_H))$ et si Q_H et R_H sont vraies dans (Q_H,R_H), $Pl_C(P_2)$ sera $Pl_C(R_H)$ et pour j parmi 3,..,k+1, $P_1,..,P_{j-1}$ étant vraies, si U_j est une proposition mathématique simple, $Pl_C(P_j)$ sera $Pl_C(U_j)$ dans $(Q_H,R_H,U_3,..,U_j)$, si U_j n'est pas une proposition mathématique simple, on aura $Pl_C(P_j)=Ø$.

On a P_{k+2} déduction logique relationnelle évidente de $(P_1,..,P_{k+1})$ car on est dans l'un des 3 cas suivants:

(i)Si Q_H n'est pas vraie, d'après la définition d'une proposition mathématique conditionnelle dans tout code Platoniste C, P_{k+2} : Non(R_H)/Cond(Q_H) est vraie.

(ii)Si Q_H est vraie et R_H n'est pas vraie dans (Q_H,R_H), Non(R_H) est vraie dans (Q_H,Non(R_H)) et donc d'après la définition d'une démonstration par l'absurde simple, P_{k+2} :Non(R_H)/Cond(Q_H) est vraie.

(iii)Si Q_H est R_H sont vraies dans (Q_H,R_H) , alors nécessairement P_k et P_{k+1} sont vraies, et donc $Pl_C(U_k)$ et Non($Pl_C(U_k)$) sont vraies, $Pl_C(U_k)$ signification Platoniste de U_k dans $(Q_H,R_H,U_3,..,U_k)$ ce qui est impossible puisque $Pl_C(U_k)$ est une proposition Platoniste stable.

On pourra généraliser la définition précédente P_1 étant précédé d'un texte vrai $T_0(S_1,..,S_p)$ sur un code C. $T(R_1,.,R_p)$ étant un texte vrai sur un code C, $R_{t(1)},..,R_{t(q)}$ étant les propositions vraies de T qui ne sont pas des propositions mathématiques conditionnelles avec $t(1)<..<t(q)$, on aura par définition dans tout code Platoniste C que nécessairement $(R_{t(1)},..,R_{t(q)})$ est un texte vrai sur le code C.

REMARQUE 2.35 :

a)Si on a une définition non-floue $D(o,O_1,..,O_n)$, alors on peut considérer la proposition élémentaire stable Platoniste de type définition:

P_{Def}:Def(A)

$R(A,O_1,..,O_n)$: A={x tel que $D(x,O_1,.,O_n)$}.

D'après le précédent article [1], si $D(o,O_1,..,O_n)$ est basique et non-floue, alors A est un concept existant non-flou défini uniquement en fonction de $O_1,..,O_n$. La définition précédente est alors vraie.

D'après la définition qu'on a donnée d'un texte vrai, on ne pourra pas définir une relation dans un ensemble A, A étant un concept particulier non-flou pouvant représenter seulement des ensembles, car les propositions Platonistes ne peuvent pas définir des concepts particuliers mixtes pouvant représenter des objets mathématiques relationnels. On donne la définition suivante permettant d'utiliser implicitement de tels concepts particuliers mixtes.

DEFINITION 2.35 A :(RELATION FONCTIONNELLE)

Une *relation fonctionnelle* est un concept général non-flou pouvant représenter toutes les applications de $A\times A$ dans{0,1}, A étant un concept particulier non-flou pouvant représenter seulement un ou plusieurs ensembles non vides.

F_A étant une relation fonctionnelle de $A\times A$ dans{0,1}, on dira que F_A est une *relation fonctionnelle dans* A. De plus dans tout code Platoniste C, on écrira « xF_Ay » pour « $F_A((x,y))=1$ » et donc Non(« xF_Ay ») pour Non(« $F_A((x,y))=1$ », c'est-à-dire « $F_A((x,y))=0$ ».

On définit alors de façon évidente et analogue avec les définitions classiques les concepts généraux non-flous *une relation fonctionnelle transitive,symétrique, anti-symétrique, d'ordre ou d'équivalence*.

On peut définir alors la fonction-concept « Classe d'équivalence » F_{CE} dont le concept de départ peut représenter tous les couples (x,F_A), avec F_A relation fonctionnelle d'équivalence dans A et x est élément de A, avec :
$F_{CE}((x,A))=\{a$ tel que xF_Aa (c'est-à-dire $F_A((x,a))=1\}$.

A pourra être défini en fonction de concepts particuliers non-flous $O_1,..,O_n$ et F_A en fonction de concepts particuliers non-flous $O'_1,..,O'_p$.
Nous allons maintenant donner des exemples illustrant les notions précédentes.

EXEMPLE 2.36A :

On supposera que « un groupe commutatif » et « un corps commutatif » sont des concepts généraux non-flous associés aux définitions classiques de ces concepts.

On pourra définir « un espace vectoriel dans sa forme étendue» avec les propositions stables Platonistes suivantes:

On définit tout d'abord la relation non-floue R_{EV} par la proposition Platoniste relationnelle et la proposition stable Platoniste suivantes :
Q_{REV} : « R_{EV} est une relation non-floue d'ordre de multiplicité 6 ».
P_{REV} :
P_{REVel1} :$Def(E,+_E,K,+_K,\times_K,._{K,E}),R_{A1}(E,+_E,K,+_K,\times_K,._{K,E})$: « $(E,+_E,K,+_K,\times_K,._{K,E},)$ est une séquence finie à 6 termes ».
P_{REVel2} : $R_{A2}(E,+_E,K,+_K,\times_K,._{K,E})$: « $R_{EV}(+_E,K,+_K,\times_K,._{K,E})$ est équivalent à (Pel1,…,Pel7)($E,+_E,K,+_K,\times_K,._{K,E}$) ».
Avec :

Pel1 :$R1(E,+_E)$: $(E,+_E)$ est un groupe commutatif.

Pel2 :$R2(K,+_K,\times_K)$: $(K,+_K,\times_K)$ est un corps commutatif.

Pel3 :$R3((E,K, ._{K,E})$: « $._{K,E}$ » est élément de $F(K\times E,E)$.

Pel4: $Def4(x,y,\alpha,\beta)$:
$R4(x,y,\alpha,\beta,E,K)$: (x,y) est élément de E^2 et (α,β) est élément de K^2.

Pel5 :$R5(\alpha,+_K , \beta,._{K,E} , x)$:$(\alpha+_K\beta)._{K,E}x= \alpha._{K,E}x+_E\beta._{K,E}x$.

Pel6 :R6(α,$._{K,E}$, β, x, $\times_K$) :$\alpha._{K,E}(\beta._{K,E}x)=(\alpha\times_K\beta)._{K,E}x$.

Pel7 :R7 (α, $._{K,E}$, x, $+_E$, y) : $\alpha._{K,E}(x+_Ey)=(\alpha._{K,E}x)+_E(\alpha._{K,E}y)$.

On peut identifier par exemple $\alpha._{K,E}x+_E\beta._{K,E}x$ avec un symbole particulier obtenu par une combinaison de fonction-concepts et noté E(α,$+_K$, β,$._{K,E}$, x). De même pour les autres expressions.

P_{REV} est la signification Platoniste d'une proposition mathématique simple définissant la relation non-floue R_{EV}.

On définit alors « un espace vectoriel dans sa forme étendue » par la proposition relationnelle Platoniste et la proposition Platoniste suivantes :
Q_{EV} : « « Un espace vectoriel dans sa forme étendue» est un concept général non-flou ».
P_{EV} :
P_{elEV1} :Def(O),R_{B1}(O) :« O est un objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP .
P_{elEV2} :R_{B2}(O) : « O est un espace vectoriel dans sa forme étendue » est équivalent à R_{EV}(O) ».

P_{EV} est la signification Platoniste d'une proposition mathématique simple définissant « un espace vectoriel dans sa forme étendue ».

Notons que souvent on représente un espace vectoriel sous la forme (E,+,.) qu'on appellera simplement « un espace vectoriel » et on obtient facilement, utilisant le concept général « un espace vectoriel dans sa forme étendue », les propositions stables Platonistes permettant d'établir que c'est aussi un concept général non-flou.

La méthode précédente est générale pour obtenir les propositions stables Platonistes permettant de montrer formellement qu'un symbole est un concept général non-flou ou est un concept relationnel général pouvant représenter une unique relation non-floue.

REMARQUE 2.37 :

En introduisant le concept de *relation mixte* analogue au concept d' une relation non-floue mais pouvant être définie entre des objets mathématiques non-relationnels et des objets mathématiques relationnels (On rappelle que les relations non-floues sont définies uniquement entre des objets mathématiques non-relationnels), il est possible de montrer que tous les Axiomes de la TMP qui ne sont pas des propositions mathématiques simples (Excepté l'Axiome 2.5A du premier

article permettant de justifier qu'une proposition mathématique simple P est non-floue. Mais on a vu que pour cela, il suffisait d'obtenir une signification Platoniste de P qui soit une proposition Platoniste stable.) de même que toutes les définitions d'objets mathématiques non non-relationnels sont équivalents à des relations non-floues mixtes ou à des relations non-floues entre des objets mathématiques qui sont vraies, c'est-à-dire qu'ils peuvent s'exprimer sous la forme de propositions appelées *propositions mathématiques mixtes* équivalentes à des *propositions Platonistes mixtes stable*, celles-ci étant totalement analogues aux propositions Platonistes stables qu'on a définies.

Ainsi on définit « une relation non-floue » par la définition axiomatique suivante, utilisant *le concept relationnel général (non-flou)* « un objet mathématique relationnel », et le *concept mixte général (non-flou)* (C'est-à-dire pouvant représenter des objets mathématiques relationnels, non-relationnels et non-relationnels mixtes) « un objet mathématique » :

DEFINITION 2.37A :

a) « R est une *relation non-floue* » est équivalent à :
« (i) R est un objet mathématique relationnel (On rappelle qu'on a admis dans le premier article (1) que tout objet mathématique relationnel était non-flou, c'est-à-dire : « Si R est telle que R est un objet mathématique relationnel, pour tout O tel que O est un objet mathématique, R(O) ou(exclusif) Non(R(O)) »).
(ii)R est la relation impossible ou pour tout O tel que O est un objet mathématique, si R(O) est vraie, alors O est un objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP . »

b)Si n est élément de **N***/{1} et R une relation non-floue, alors « n *est un ordre de multiplicité* de R » est équivalent à :
« R est la relation impossible ou pour tout objet mathématique O tel que R(O) est vraie, O est une séquence finie à n termes. »

c)Si R est une relation non-floue, alors « 1 *est un ordre de multiplicité* de R.

(On rappelle qu'on a montré l'existence de **N** en utilisant seulement des relations non-floues d'ordre de multiplicité 1 et 2).

Notons que dans la définition précédente on peut identifier « *est un ordre de multiplicité de* » à un objet mathématique relationnel défini entre une relation non-floue et un naturel. On pourra admettre que c'est une *relation mixte non-floue*.

On peut exprimer la proposition mathématique mixte précédente définissant une *relation non-floue* sous la forme d'une *proposition mixte stable Platoniste*, analogue à une proposition stable Platoniste. On peut en effet définir une *proposition mixte stable Platoniste* comme étant une séquence de *propositions élémentaires mixtes stables Platonistes* et de propositions élémentaires stables Platonistes, comprenant au moins une *proposition élémentaires mixte stable Platoniste*.

Les propositions mixtes stables Platonistes utiliseront le concept général relationnel non-flou R_{mxf} pouvant représenter un seul et unique objet mathématique relationnel, et tel que pour tout objet mathématique U_0, « $R_{mxf}(U_0)$ est vraie » est équivalent à :
(i)U_0 est de la forme $(R_0,O_0)_m$, avec $(R_0,O_0)_m$ est un *objet mathématique non-*relationnel mixte appelé *couple mixte* de premier terme R_0 objet mathématique relationnel et de 2ième terme O_0 objet mathématique différent de l'EMP.
(ii)$R_0(O_0)$ est vraie.

On utilisera aussi R_{mxf} pour obtenir les propositions stables mixtes Platonistes équivalentes aux propositions mathématiques mixtes suivantes.

L'Axiome d'existence d'un ensemble dont les éléments correspondent à une définition sera exprimé sous la forme :

AXIOME 2.37B :

Si R est une relation non-floue et si il existe A tel que A est un ensemble et pour tout objet U tels que R(U), U est élément de A, alors il existe un et un seul B tel que B={O tel que R(O)}.

On en déduit la proposition para-mathématique :

Si $C_1,\ldots,C_p$ sont des concepts particuliers pré-définis et R une relation non-flue d'ordre de multiplicité p+1 telle que il existe un ensemble $A(C_1,..,C_p)$ tel que pour tout U tel que $R(C_1,..,C_p,U)$, U est élément de $A(C_1,..,C_p)$ alors il existe un et un seul $B(C_1,..,C_p)$ tel que $B(C_1,..,C_p)=\{O$ tel que $R(C_1,.,C_p,O)\}$.

Pour montrer la proposition précédente, $C_1,..,C_p$ représentant simultanément $C_{10},.,C_{p0}$ on considère la relation non-floue $R_1(C_{10},.,C_{p0})$ définie par, pour tout V objet mathématique, $R_1(C_{10},..,C_{p0})(V)$ est équivalent à $R(C_{10},..,C_{p0},V)$. Puis on applique l'Axiome 2.37B.

L'Axiome sur l'ensemble dont les éléments correspondent à une définition récursive D_R sera exprimé de la façon suivante:

DEFINITION 2.37C :

Par définition, « D_R est une *définition récursive Platoniste* » est équivalent à « D_R est une séquence finie mixte à 3 termes et si $(P,R_{DR}, R_{PR})_m$ est tel que $D_R=(P,R_{DR}, R_{PR})_m$:
-P objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP, (appelé *premier terme* de D_R).
-R_{PR}, appelée *propriété récursive* de D_R, est une relation non-floue, R_{RC} appelée *clause de récursion* de $D_{R,}$ est une relation non-floue d'ordre de multiplicité 2.
(i)$R_{PR}(P)$ est vraie.
(ii)Pour tout O tel que $R_{PR}(O)$ est vraie, alors il existe un et un seul objet mathématique $s_{DRP}(O)$ tel que $R_{RC}(s_{DRP}(O),O)$ est vraie.
(iii)$R_{PR}(s_{DRP}(O))$ est vraie. »

AXIOME (DE RECURSION) 2.37 D :

a)Pour toute définition récursive $D_R=(P,R_{DR}, R_{PR})_m$, il existe une et une seule relation non-floue « *est un terme* de D_R » telle que :
« T_n est un terme de D_R » est équivalent à « T_n est identique à P ou il existe T_{n-1} tel que T_{n-1} est un terme de D_R et $T_n=s_{DRP}(T_{n-1})$ ».
On en déduit qu'on peut définir la relation non-floue « *est le successeur dans* D_R de » définie par :
« T_n est le successeur dans D_R de T_{n-1} » est équivalent à : « T_{n-1} est un terme de D_R et $s_{DRP}(T_{n-1})=T_n$ »

b)D_R étant une définition récursive Platoniste, alors il existe un et un seul ensemble $A(D_R)$ tel que $A(D_R)=\{x$ tel que x est un terme de $D_R\}$.

REMARQUE 2.37E :

a)Pour définir une définition récursive Platoniste D_R dans un texte vrai sur un code Platoniste C, On devra utiliser les propositions $Q_{i,1},..,Q_{i,4}$ les propositions Platonistes relationnelles :

$Q_{i,1}$: « un terme de D_R » est un concept général non-flou.

$Q_{i,2}$: « P_{0DR} est (un concept général non-flou) premier terme de D_R . »

$Q_{i,3}$: « D_{CRDR} est (une relation non-floue d'ordre de multiplicité 2) clause de récursion de D_R ».

$Q_{i,4}$: « D_{PRDR} est (une relation non-floue) la propriété récursive de D_R ».

Ces propositions seront suivies de propositions $P_{i+1},..,P_{i+4}$ équivalentes à des propositions stable Platonistes qui pour être vraies devront être en accord avec la définition d'une définition récursive Platoniste.

On rappelle qu'on a établi le 1ier article en utilisant l'Axiome de récursion des *Propositions des ensembles récursifs ordonnés*. Ces Propositions sont fondamentales car elles permettent d'éviter l'utilisation explicite des définitions récursives Platonistes. De plus elles généralisent l'Axiome de récursion dans le cas où le premier terme, la clause de récursion et la propriété récursive d'une définition récursive sont définies en fonction de concepts particuliers non-flous pré-définis.

De même on peut exprimer l'Axiome de démonstration par récurrence sous la forme :

AXIOME 2.37F :

Si on R est telle que:
(i)Rest une relation non-floue.
(ii)R(1) est vraie.
(iii)Pour tout i tel que i est élément de **N***, (Si R(i) est vraie alors R(i+1) est vraie).

Alors pour tout i dans **N***, R(i) est vraie.

2.38 EXEMPLES DE PROPOSITIONS VRAIES

a)Considérons un texte $T(P_1,..,P_n)$ sur un code Platoniste C. On suppose que T contient juste après la proposition P_i la proposition Platoniste relationnelle $Q_{i,1}$(un C_1) : « « un C_1 » est un concept général non-flou », avec $P_1,..,P_i$ propositions vraies dans T sur C.
On suppose que juste après $Q_{i,1}$ on a la proposition mathématique simple P_{i+1} :
P_{i+1}: « Pour tout O tel que O est un objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP, « O est un C_1 » est équivalent à « R_{i+1}(O) » », avec R_{i+1} relation non-floue connue qui n'est pas la relation « impossible ».

Alors on admettra comme évident que P_{i+1} est vraie dans T sur C, et on dira que P_{i+1} est déduction logique relationnelle (évidente) des propositions la précédant dans T. En effet, si les propositions précédant $Q_{i,1}$ sont vraies, il est évident qu'il existe bien un concept général non-flou « un C_1 » défini par $Q_{i,1}$ et P_{i+1}.

On dira que P_{i+1} est une *définition d'un concept général non-flou vraie*, et qu'elle est une *définition complète* de « un C_1 ». On définit de façon analogue une *définition complète de relation non-floue, de premier terme ou de propriété récursive ou de clause de récursion d'une définition récursive*. Si un concept

général non-flou ou une relation non-floue sont définis par des Axiomes (Par exemple « un ensemble », « est élément de », l'EMP, l'ensemble vide..) on dira qu'ils ont des *définitions Axiomatiques*.

b) On remarque que la proposition Platoniste relationnelle Q_1 : « « un C_1 »est un concept général non-flou » est équivalent aux propositions (Q_2,P_2), avec Q_2 : « « est un C_1 » est une relation non-floue » et P_2 ; « Il existe O tel que O est un objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP et O est un C_1 ».

Dans certains cas, on utilise des propositions mathématiques simples vraies qui ne sont pas des déductions logique relationnelles des propositions vraies dans H(C) ou dans le texte T sur un code C qui les contiennent et sont appelées *Axiomes* . Ces Axiomes définissent partiellement ou complètent les définitions des concepts généraux non-flous ou des relations non-floues définis Axiomatiquement.

c)On verra que l'Axiome du choix sera appelé « Axiome » alors qu'il peut être considéré comme une déduction logique relationnelle, obtenue par des déductions logiques relationnelles intuitivement évidentes, de la TMP. Plus généralement, on pourra par convention appeler *Axiome* une proposition obtenue par des déductions logiques relationnelles intuitivement évidentes, mais celles-ci n'étant pas des *déductions formelles*, celles-ci étant définies comme suit :

Considérons un texte vrai T(P_1,..,P_i) sur un code Platoniste C. La signification formelle de P_1,..,P_i ainsi que celle des propositions de H(C) (notamment les propositions para-mathématiques) aura comme conséquence que certaines propositions notées P_{i+1} seront entraînées par H(C) et (P_1,..,P_i), c'est à dire que P_{i+1} est déduction logique relationnelle de (P_1,..,P_i). On dira alors que P_{i+1} est une *déduction formelle* de (P_1,..,P_i).

De plus dans H(C), certaines propositions, appelées *règles de déduction formelle* définiront des *déductions formelles élémentaires*. Par définition, une *déduction formelle* sera une déduction formelle élémentaire ou une déduction logique relationnelle obtenue par une séquence finie de déductions formelles élémentaires.

Par convention chaque proposition d'une démonstration (sur un texte T dans un code Platoniste C) sera obtenue par une déduction formelle évidente.

Par exemple, si on a un texte vrai T(P_1,..,$Q_{i,1}$) sur un code Platoniste C avec $Q_{i,1}$: « « Un C_1 » est un concept général non-flou »), alors si P_{i+1} est une définition complète de « un C_1 », d'après les règles de déduction formelle P_{i+1} sera une déduction formelle élémentaire de (P_1,..,$Q_{i,1}$).

Si on a un texte vrai T(P_1,.,P_i) et que P_{i+1} est une proposition ayant comme signification Platoniste dans (T,P_{i+1}) une proposition élémentaire Platoniste stable

de type définition, alors d'après les règles de déduction formelle P_{i+1} sera déduction formelle élémentaire de T.

Les règles de déduction formelles seront donc déterminées par la signification formelle des Axiomes, définitions, théorèmes, propositions para-mathématiques qu'on a admis ou établis. On pourra obtenir cependant des déductions formelles sans utiliser explicitement des règles de déduction formelle, mais en utilisant seulement la signification formelle des propositions du texte T et des hypothèses H(C) du code Platoniste considérés. Cependant, même dans ce cas on utilisera implicitement des règles de déduction formelle.

d)La quasi-totalité des théories mathématiques classiques pourront être identifiées avec des théories mathématiques Platonistes n'utilisant comme Axiomes que ceux appartenant aux hypothèse H(C) de tout code Platoniste c'est-à-dire ceux des fondements de la TMP.

3.CONSISTANCE,COMPLETUDE ET PARADOXES

A)CONSISTANCE

On sait que toute théorie classique mathématique utilise des Axiome évidents. On peut modéliser mathématiquement une telle théorie dans la TLP par les définitions suivantes :

DEFINITION 3.1 :

a)$C(S,R_C)$ étant un code Platoniste, on appelle *théorie mathématique Platoniste sur* C un couple (C,T_{AX}), où T_{AX} est un texte vrai sur C, et tel que si T_{AX} est le texte $(P_1,..,P_n)$, alors toute proposition mathématique simple P_i de ce texte n'utilise aucun concept particulier non-flou pré-défini dans $P_1,\ldots,P_{i-1}$.

b)Une Théorie mathématique Platoniste pourra contenir des propositions Platonistes relationnelles, des Axiomes, des définitions complètes de concepts généraux non-flous ou de relations non-floues et des *Théorèmes*. Un *Théorème* sera une proposition mathématique simple qui n'est pas un Axiome ni une définition complète de concept génénal non-flou ou de relation non-floue mais qui s'obtient par une démonstration sur le texte constitué des propositions le précédant dans T_{AX}. (On généralise immédiatement la définition précédente en remplaçant P_i par une séquence finie de propositions mathématiques simples $P_{i,1},..,P_{ik(i)}$).

DEFINITION 3.2 :

(C,T_{AX}) étant une théorie mathématique Platoniste, on appelle *démonstration sur* (C,T_{AX}) (ou sur T_{AX} dans C) tout texte $(P_1,\dots,P_n)$ telle que pour i dans $\{1,..,n\}$, P_i soit déduction logique relationnelle de $H(C),T_{AX},P_1,\dots,P_{i-1}$. (Définition 2.28. Ceci entraine que $(T_{AX},(P_1,..,P_n))$ est un texte vrai sur C).

(Cette définition est analogue à la définition 2.30. Cependant par convention, on emploiera le terme « démonstration », seulement si $P_1,..,P_n$ sont des déductions formelles évidentes).

DEFINITION 3.3 :

On dira qu'une proposition Platoniste Q_0 *appartient à une théorie mathématique Platoniste* (C,T_{AX}) si :

(i) Q_0 est stable dans (T_{AX},Q_0)

(ii) Il existe une démonstration $(P_1,..,P_n)$ sur (C,T_{AX}) telle que $Pl_C(Q_0)$ soit équivalente à $Pl_C(P_n)$

Une conséquence immédiate des définitions précédentes est le Lemme suivant de consistance :

LEMME 3.4 : (de consistance) :

a)Pour toute démonstration $(P_1,..,P_n)$ sur une théorie (C,T_{AX}), et pour tout i dans $\{1,..,n\}$, on a $Pl_C(P_i)$ est vraie.(Dans $(T_{AX},\dots,P_n)$).

b)Toute proposition Q_0 appartenant à une théorie mathématique Platoniste est vraie.

c)Toute théorie mathématique Platoniste (C,T_{AX}) *est consistante*, c'est-à-dire qu'il est impossible qu'une proposition Q_0 et sa négation $Non(Q_0)$ appartiennent à la théorie (C,T_{AX}).

Preuve :
a) et b) sont la conséquence de la définition d'une déduction logique relationnelle.
Avec les hypothèses du c), on a d'après b) que Q_0 est vraie et n'est pas vraie ce qui est impossible d'après le Lemme de non-contradiction (Lemme 2.25).

REMARQUE-DEFINITION 3.5 :

On devra distinguer les théories mathématiques Platonistes définies précédemment de LA Théorie Mathématique Platoniste (TMP), qu'on écrira toujours avec des majuscules et précédée de l'article défini « La » et qu'on appelera aussi *Théorie Mahématique Platoniste Primitive*. La TMP sera cependant dans les hypothèses H(C) du code Platoniste C de toute théorie mathématique Platoniste sur C. H(C) pourra cependant inclure des théories mathématiques Platonistes définies en 3.1.

B)COMPLETUDE

Pour étudier la complétude d'une théorie (C,T_{AX}), on doit modéliser mathématiquement les déductions logiques relationnelles utilisées dans les théories mathématique classiques.

DEFINITION 3.6 :

On appelle *théorie mathématique Platoniste déductive* un triplet (C,T_{AX},R_D), où (C,T_{AX}) est une théorie Platoniste et R_D est une relation, qui peut exister entre une proposition P_n et un texte $(T_{AX},P_1,..,P_{n-1})$, P_n étant toujours une déduction logique relationnelle de $(P_1,..,P_{n-1})$. On dira alors que P_n est déduction logique relationnelle de $(P_1,..,P_{n-1})$ dans la théorie Platoniste déductive (C,T_{AX},R_D).

On peut modéliser les théories classiques par des *théorie mathématique Platoniste déductive* , où R_D est telle que une déduction logique P_n de $(P_1,..,P_{n-1})$ dans (C,T_{AX},R_D) est toute déduction logique relationnelle « évidente » (par le mathématicien) de $(P_1,..P_{n-1})$. C'est-à-dire que le mathématicien est modélisé par un *système déductif*. Ce *système déductif* peut obtenir des déductions logiques relationnelles d'un texte $T(P_1,.,P_{n-1})$, mais seulement certaines d'entre elles, en particulier toutes celles modélisées dans les systèmes formels. Si P_n est l'une d'entre elle, d'après la définition précédente on aura : $R_D(P_n,T(P_1,..,P_{n-1}))$ est vraie.

R_D sera défini par des *règles de déduction formelle*, définies dans la section 3.8. On rappelle que celles-ci permettent de définir des *déductions formelles élémentaires* et des *déductions formelles*.

Par exemple si on a un texte vrai $T(P_1,..,P_i)$ sur un code C, avec pour un j dans {1,..,i-1} P_j est la définition complète d' « un C_1 », c'est à dire :
P_j :« Pour tout O tel que O est un objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP, « O est un C_1 » est équivalent à « R(O) » », alors si P_i a comme signification Platoniste la proposition élémentaire Platoniste de type définition

vraie P_{eli} :Def(A)R_i(A), avec R_i(A) : « A est un C_1 », alors la proposition P_{i+1} ayant comme signification Platoniste P_{eli+1} :R(A) sera une déduction formelle élémentaire T(P_1,.,P_i) (D'après les règles de déduction formelle de H(C).).

Si on a un texte vrai T(P_1,..,P_i) sur un code C, avec pour un j dans {1,..,i-1} P_j est un Théorème dont la signification Platoniste est de la forme (P_{elTj1},P_{elTj2}), avec P_{elTj1} :Def(O_1,..,O_p),R_1(O_1,..,O_p) et P_{elTj2} :R_2(O_1,.,O_p), alors si P_i a comme signification Platoniste la proposition élémentaire Platoniste vraie P_{eli} :R_1(P_1,.,P_p), P_{i+1} ayant comme signification Platoniste P_{eli+1} :R_2(P_1,..,P_p) sera une déduction formelle élémentaire de T.(D'après les règles de définition formelle de H(C)).

Si P_i a comme signification Platoniste P_{eli} :Non(R_2(P_1,.,P_p)), P_{i+1} ayant comme signification Platoniste P_{eli+1} :Non(R_1(P_1,..,P_p)) sera une déduction formelle élémentaire de T.

Si on a un texte vrai T(P_1,..,P_i) sur un code C, avec O_1,..,O_n concepts particuliers non-flous définis dans (P_1,..,P_{i-2}) et Pl_C(P_{i-1}) : Def(A_1,..,A_p), R_2(A_1,..,A_p,O_1,..,O_n) et Pl_C(P_i) : R_3(A_1,..,A_p,O_1,..,O_n) alors la proposition P_{i+1} : « Il existe B_1,..,B_p tels que R_3(B_1,..,B_p,O_1,..,O_n) » sera déduction formelle élémentaire de T.(Avec Pl_C(P_{i+1}) : Def(B_1,..,B_p), R_3(B_1,..,B_p,O_1,..,O_n)).

On suppose qu' on a un texte vrai T(P_1,..,P_i) sur un code C, H(C) (ou (P_1,..,P_{i-2})) contenant un Théorème du type P_T : « Si y est tel que P_{auxT1}(y), alors «P_{auxT2}(y) est équivalent à P_{auxT3}(y) » », avec Pl_C(P_T) :(P_{elT1}, « P_{elT2} est équivalent à P_{elT3} ») avec P_{elT1} :Def(y),R_{T1}(y), P_{elT2} :R_{T2}(y), P_{elT3} :R_{T3}(y).

Alors si Pl_C(P_{i-1}) :R_{T1}(z) et Pl_C(P_i) :R_{T2}(z), P_{i+1}, avec Pl_C(P_{i+1}) :R_{T3}(z) sera déduction formelle élémentaire de (P_1,..,P_i). Si on a Pl_C(P_{i-1}) :R_{T1}(z) et Pl_C(P_i) :Non(R_{T2}(z)), P_{i+1}, avec Pl_C(P_{i+1}) :Non(R_{T3}(z)) sera déduction formelle élémentaire de T. On pourra aussi intervertir dans ce qui précède « R_{T2}(z) » et « R_{T3}(z) ».

On peut définir de nombreuses déductions formelles élémentaires en généralisant les exemples précédents.

DEFINITION 3.7 :

On définit une *démonstration* sur une théorie mathématique Platoniste déductive, et qu'une proposition Platoniste *appartient* à une théorie mathématique Platoniste déductive de la même façon que pour une théorie mathématique Platoniste, en remplaçant « déduction logique relationnelle » par « déduction

logique relationnelle dans la théorie mathématique Platoniste déductive (C,T_{AX},R_D) ».

On obtient alors pour une théorie déductive un *Lemme de consistance* totalement analogue au Lemme de consistance obtenu pour une théorie Platoniste.

On peut alors définir la complétude d'une théorie mathématique Platoniste déductive de la façon suivante :

DEFINITION 3.8 :

(C,T_{AX},R_D) étant une théorie mathématique Platoniste déductive, on dira qu'une proposition Platoniste Q_0 est *stable* dans (C,T_{AX},R_D) si Q_0 est stable dans (T_{AX},Q_0)

DEFINITION 3.9 :

(C,T_{AX},R_D) étant une théorie Platoniste déductive, on dira qu'elle *est complète* si pour toute proposition stable Q_0 dans (C,T_{AX},R_D), ou bien Q_0 appartient à (C,T_{AX},R_D) ou bien Non(Q_0) appartient à (C,T_{AX},R_D).

A priori, il n'y a pas de raison qu'une théorie Platoniste déductive soit complète, puisque seules certaines déductions logiques relationnelles peuvent être utilisées pour obtenir des propositions vraies appartenant à la théorie. Nous allons cependant dans la section suivante voir si le Théorème d'incomplétude de Godel obtenu pour les systèmes formels peut s'appliquer aux théories déductives Platonistes.

C)PARADOXES

Il est donc intéressant d'examiner si le théorème de Godel peut se généraliser aux théories mathématiques Platonistes déductives.
(C,T_{AX},R_D) étant une théorie Platoniste déductive identifiée à une théorie classique, R_D ne permettant que les déductions logiques relationnelles évidentes, on considère la proposition :
P : « P n'est pas démontrable dans (C,T_{AX},R_D) ».

Si on veut obtenir que P est vrai, procédant classiquement comme dans le Théorème de Godel, on suppose que P est fausse, alors P est démontrable, ce qui contredit P et est donc impossible, et donc P est vraie.

Cependant, cette démonstration est inacceptable pour justifier que P est vraie, car elle est une démonstration dans (C,T_{AX},R_D), n'utilisant que des déductions logiques évidentes, et donc si on l'accepte comme démonstration de P, P est contredite.
Donc P ne peut être fausse ni vraie.

Or ceci s'explique dans la TLP par le fait que P est instable : Il n'y a pas de propositions Platonistes stables qui soient signification Platoniste de P et P n'est même pas une proposition mathématique simple. Et donc le fait qu'on ne puisse démontrer P ne prouve pas l'incomplétude de (C,T_{AX},R_D).

Il en est de même pour la proposition P : « P est vraie », le fait qu'elle ne soit ni vraie ni fausse se justifie si elle est instable.

On voit donc que le Théorème de Godel ne se généralise pas pour prouver l'incomplétude des théories mathématiques Platonistes déductives.

On a d'autres justifications possibles: En effet, à priori on n'a jamais supposé que (C,T_{AX},R_D) est un concept particulier ou général non-flou. Comme on l'a dit, c'est un concept paramathématique permettant d'étudier les objets de l'EMP. De plus, on ne peut pas définir dans la TMP une proposition P en utilisant P, comme la proposition de Godel. On retrouve donc que P est instable, et donc on n'a pas prouvé l'incomplétude de (C,T_{AX},R_D), telle qu'on l'a défini dans la définition 3.9.

Cependant, on peut penser que la théorie des nombres classiques peut être identifiée à une théorie mathématique Platoniste déductive incomplète. En effet, il est possible que certaines propriétés ne puissent pas se démontrer un nombre fini de déductions logiques relationnelles évidentes, et alors elles ne sont pas démontrables dans la théorie mathématque Platoniste correspondant à la théorie des nombres classiques. C'est vraisemblablement le cas pour la Conjecture de Goldbach (qui est équivalente à une proposition Platoniste stable si on admet la théorie mathématique Platoniste correspondant à la théorie des nombres classique) , pour laquelle on a défini dans la Théorie Aléatoire des Nombres de nouveaux outils mathématiques n'existant pas dans les théories mathématiques actuelles, et permettant de donner une justification théorique à cette conjecture.

On peut utilisant des propositions Platonistes définir un système formel classique, et donc montrer qu'un système formel peut être identifié à un concept

non-flou de la TLP. Dans certains cas on peut identifier un système formel avec une théorie Platonique déductive, et alors on peut lui appliquer le Lemme de consistance. Ainsi pour justifier théoriquement la consistance d'un système formel, il suffit de montrer qu'on peut l'identifier à une théorie Platoniste déductive (C,T_{AX},R_D), C étant un code Platoniste (S,R_C).

4.EXEMPLES

Nous allons expliciter dans cette partie les relations existant entre des objets mathématiques équivalentes à des théorèmes célèbres.

PREAMBULE :

(i)On a vu qu'une proposition mathématique simple pouvait utiliser des expressions de type $F(O_1,..,O_n)$, F étant une fonction-concept. On a vu dans la définition 2.23, que $F(O_1,..,O_n)$ était implicitement défini par une proposition élmentaire Platoniste. Celle-ci est du type , $O_1,..,O_r$ symboles particuliers non-flous pré-définis par des définitions auxiliaires et $O_{r+1},.,O_n$ concepts généraux non-flous pouvant représenter un unique objet :
$D_{elC}(F(O_1,..,O_n))$: $Def(F(O_1,..,O_n)),R(F(O_1,..,O_n), O_1,..,O_n)$: « $(O_1,..,O_n)$ appartient à Dep(F) et $(F(O_1,..,O_n),(O_1,..,O_r))$ appartient à F »).

On utilisera donc le symbole $D_{elC}(F(O_1,..,O_n))$ pour représenter la proposition élémentaire Platoniste de type définition précédente.

Cependant si $O_1,..,O_n$ sont des concepts généraux non-flous pouvant chacun représenter un seul objet, et $F(O_1,..,O_n)$ peut représenter un objet mathématique, alors on identifiera $F(O_1,..,O_n)$ avec un concept général non-flou.

(ii)Considérons une proposition élémentaire Platoniste de type relation P_{elR} :$R(O_1,..,O_n)$ ou une proposition élémentaire Platoniste de type définirion P_{elD} :$Def(O_1,.,O_r)R(O_1,.,O_n)$ appartenant à la signification Platoniste d'une proposition mathématique simple P.

Ou bien $R(O_1,.,O_n)$ sera équivalent à une proposition Platoniste auxiliaire $P_{aux}(O_1,.,O_n)$ appartenant à $Pl_C(P)$, ou bien R sera défini implicitement par une proposition notée impl(R) du type « R est un relation non-floue d'ordre de multiplicité n_G et pour tous $O_{10},..,O_{nG0}$ objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP, $R(O_{10},.,O_{nG0})$ est équivalent à $Exp(O_{10},.,O_{nG0},C_1,..,C_p,R_1,.,R_k, F_1,..,F_t)$ (L'expression précédente pourra ne pas contenir de C_j ou(et) de F_j), avec $C_1,.,C_p$ concepts généraux non-flous pouvant représenter chacun un unique objet et $Exp(O_{10},.,O_{n0G},C_1,..,C_p,R_1,.,R_k, F_1,..,F_t)$ est une expression utilisant $O_{10},.,C_p$, des relations non-floues pré-définies $R_1,..,R_k$ (R_i pouvant être de la forme « est un C_i »),

des concepts relationnels primitifs parmi « et », « ou », « Non », « est équivalent à « , « si..alors », des fonction-concepts $F_1,..,F_t$, certaines pouvant être des combinaisons de fonction-concepts définies implicitement telles que définies en 2.23 ou la fonction-concept impossible F_{IMP} et les symbole de ponctuation parmi « parenthèse », « virgule » et « guillemets ». On dira que impl(R) est la *définition implicite* de R et celle-ci n'appartiendra pas à $Pl_C(P)$,d'où son qualificatif « implicite ».

Par définition, si $Exp(O_{10},.,O_{n0G},C_1,..,C_p,R_1,.,R_k, F_1,..,F_t)$ contient une expression de type $F_i(O'_{10},.,O'_{r0})$ ou $F_{IMP}(O'_{10},.,O'_{r0})$ ne pouvant représenter aucun objet, alors $Exp(O_{10},.,O_{n0G},C_1,..,C_p,R_1,.,R_k, F_1,..,F_t)$ ne sera pas vraie.

(iii)On rappelle qu' on peut avoir dans une proposition mathématique simple une expression du type $E(O_1,.,O_n,C_1,.,C_p)$, $O_1,.,O_n$ symboles particuliers non-flous pré-définis par des définitions auxiliaires (et donc non obtenus par des combinaisons de fonction-concepts) et $C_1,.,C_p$ concepts généraux non-flous pouvant représenter un unique objet, avec :

-$E(O_1,..,O_n, C_1,..,C_p)$ ne contient aucune relation non-floue ni concept primitif relationnel ni symboles de ponctuation excepté des symboles « parenthèses » ou « virgule » ou « accolades » ni symboles « blanc » ni symbole « point » celui-ci étant le dernier symbole de l'expression.

- $E(O_1,..,O_n, C_1,..,C_p)$ est immédiatement précédé d'un symbole « blanc » ou d'un symbole représentant une unique relation non-floue ou d'un « guillemet ouvert » et est immédiatement suivi d'un symbole représentant une unique relation non-floue ou d'un symbole parmi « blanc » ou « point » ou « guillemet fermé » ou « virgule », celle-ci étant suivi d'un symbole « blanc ».

On a vu dans la définition 2.23 qu'on pourra alors en général définir une fonction-concept F_{COMB} telle que $F_{COMB}(O_1,.,O_n,C_1,.,C_p)$ a la même signification que $E(O_1,.,O_n,C_1,.,C_p)$. $E(O_1,.,O_n,C_1,.,C_p)$ sera défini implicitement par une proposition Platoniste notée $impl(E(O_1,.,O_n,C_1,.,C_p))$, constituée de propositions élémentaires Platonistes de type définition $P_{elDi}:D_{elC}(F(O'_{i1},..,O'_{it(i)}))$ (voir (i)). Cependant, pour j parmi 1,.,t(i), O'_{ij} pourra lui-même être de la forme $F_{k(j)}(O'_{k(j)1},..,O'_{k(j)t(k(j))})$ en étant défini par une proposition $P_{elDk(j)}$ précédant P_{elDi}. On obtiendra $impl(E(O_1,.,O_n,C_1,.,C_p))$ d'après les règles syntaxiques de convention (symbolique) du code Platoniste C, de même que F_{COMB}. F_{COMB} pourra être utilisée dans la définition implicite d'une relation telle qu'on l'a définie au point précédent (ii).

On rappelle (voir section 2.23) que $E(O_1,.,O_n,C_1,.,C_p)$, lorsqu'il ne sera pas identifié à une expression du type $F_{COMB}(O_1,.,O_n,C_1,.,C_p)$ sera identifié avec un

symbole particulier non-flou ne pouvant représenter aucun objet et sera alors identifié avec $F_{IMP}(O_1,.,O_n,C_1,.,C_p)$, F_{IMP} fonction-concept impossible.

Une proposition ayant la même signification qu'une proposition mathématique simple dans un code Platoniste C pourra utiliser un symbole S ayant la même signification dans le code C qu'un symbole $E(O_1,.,O_n,C_1,.,C_p)$ tel que défini précédemment, ou que $F(O_1,..,O_n)$, F étant une fonction-concept pré-définie, d'après les règles syntaxiques de convention (symbolique) du code Platoniste C.

(iv)$O_1,.,O_n$ étant des symboles particuliers non-flous pré-définis, on pourra aussi utiliser des expressions du type $(O_1,..,O_n)$ (n concept général non-flou pouvant représenter un unique naturel supérieur ou égal à 2). De même cela signifiera qu'on définit implicitement $(O_1,.,O_n)$ par la proposition élementaire Platoniste de type définition que l'on notera $D_{elS}((O_1,..,O_n))$. (Avec $D_{elS}((O_1,..,O_n))$:Def$((O_1,..,O_n))$,R$((O_1,..,O_n),O_1,..,O_n)$:
« $(O_1,..,O_n)$ est une séquence finie à n termes et O_1 est le premier terme de $(O_1,..,O_n)$ et..et O_n est le nième terme de $(O_1 ,..,O_n)$ ».

(v)On rappelle aussi qu'on pourra identifier $\{O_1,.,O_n\}$ avec $F_E(O_1,..,O_n)$, F_E étant une fonction-concept. On pourra aussi identifier un ensemble contenant un unique élément x noté $\{x\}$ avec $F_E(x,x)$. On rappelle aussi que f étant une fonction, on identife f(x) avec im(f,x), im étant une fonction-concept.

(vi)On remarque cependant que si on a une proposition élémentaire Platoniste de type définition P_{elD1} :Def(B)$R_1(B,O_1,..,O_r)$ qui n'est pas générale (Avec donc au moins un O_i), on pourra considérer la proposition élémentaire Platoniste de type relation P_{elR1} :$R_{12}(O_1,..,O_r)$, avec R_{12} est une relation non-floue d'ordre de multiplicité r telle que pour tous $O_{10},..,O_{r0}$ objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP « $R_{12}(O_{10},..,O_{r0})$ est équivalent à Def(B),$R_1(B, O_{10},..,O_{r0})$ ».

On rappelle que par définition « Cond$(R_{ij}(O'_{j1},.,O'_{jk(j)}), R_{im}(O'_{m1},.,O'_{mk(m)}))$ » aura la même signification que « Si $R_{ij}(O'_{j1},.,O'_{jk(j)})$ alors $R_{im}(O'_{m1},.,O'_{mk(m)})$ » et « Eq$(R_{ij}(O'_{j1},.,O'_{jk(j)}), R_{im}(O'_{m1},.,O'_{mk(m)}))$ » aura la même signification que « $R_{ij}(O'_{j1},.,O'_{jk(j)})$ est équivalent à $R_{im}(O'_{m1},.,O'_{mk(m)})$ ».

On rappelle que P_{eli1} et P_{eli2} étant des propositions élémentaires Platonistes de type relation, on pourra en utilisant P_{eli1} et P_{eli2} et des concepts primitifs relationnels parmi « ou », « et », « si..alors », « est équivalent à », « Non » définir des propositions élémentaires Platonistes composées qu'on pourra identifier avec des propositions élémentaires Platonistes de type relation.

(vii)Dans les exemples suivants, les définitions implicites des relations utilisées dans les propositions élémentaires Platonistes de même que celles des combinaisons de fonction-concepts s'obtiennent de façon évidente. On donnera cependant des exemples de définition implicite de symboles de type $E(O_1,.,O_n,C_1,..,C_p)$ définis en (iii) (ou ayant la même signification).

(viii)On a vu dans le 1[ier] article qu'une proposition mathématique simple P_i pouvait contenir une expression du type P_{Ai} « A est tel que A={x tel que $Q_{auxiA}(x,O_1,..,O_n)$} », $O_1,.,O_n$ symboles particuliers non-flous pré-définis.

On ne pourra pas identifier l'expression {x tel que $Q_{auxiA}(O_1,..,O_n)$} avec un symbole $E(O_1,.,O_n)$ tel qu'on l'a définie en (iii) puisqu'elle contient le concept relationnel primitif « tel que ». Cependant, P_{Ai} aura comme signification Platoniste la proposition élémentaire Platoniste de type définition (P_{eliA}) avec P_{eliA} :Def(A)$R_{iA}(A,O_1,..,O_n)$, et $R_{iA}(A,O_1,..,O_n)$ a la signification d'une proposition stable Platoniste auxiliaire $P_{RiAaux}(A,O_1,..,O_n)$ contenue dans $P_{lC}(P_i)$.

Si on a la relation non-floue R_Q d'ordre de multiplicité n telle que pour pour tous objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP x_0, $O_{10},.,O_{n0}$, « $R_Q(x_0,O_{10},.,O_{n0})$ est équivalent à $Q_{auxiA}(x_0,O_{10},.,O_{n0})$ », alors $P_{RiAaux}(A,O_1,..,O_n)$ sera la séquence (P_{elR1}, P_{elR2}, P_{elR3}) avec P_{elR1} : $R_1(A)$: « A est un ensemble, P_{elR2} :Def(x)$R_2(x)$: et $R_2(x)$:« x est un objet mathématique non-relationnel et différent de l'EMP », P_{elR3} : « $R_3(x,A)$ est équivalent à $R_Q(x,O_1,.,O_n)$ » , avec $R_3(x,A)$: « x est élément de A ».

EXEMPLE 4.1 :

Dans cette section nous allons donner l'interprétation Platoniste de certains Théorèmes célèbres, dont la formulation a exactement la même signification qu'une proposition mathématique simple.

Soit par exemple le Théorème de Bezout :

Si (p,q) est un élément de $\mathbf{N_Z}^2$ (On rappelle $\mathbf{N_Z}=\mathbf{Z}^+=\mathbf{N}\times\{1\}$), alors « p est premier avec q est équivalent à Il existe (u,v) tel que « (u,v) est élément de $\mathbf{Z}^2$ et $pu+_{\mathbf{Z}}qv=1_{\mathbf{Z}}$ » » (On rappelle $1_{\mathbf{Z}}=(1,1)$) ».

Le théorème précédent aura comme proposition auxiliaire principale une proposition du type $P_{aux}(p,q)$. La proposition auxiliaire « Il existe (u,v) tel que « (u,v) est élément de $\mathbf{Z}^2$ et $pu+_{\mathbf{Z}}qv=1_{\mathbf{Z}}$ » » n'est pas une proposition auxiliaire principale car elle n'est pas vraie considérant la définition de(p,q).

On suppose qu'on a défini la relation non-floue pouvant exister entre 2 naturels « est premier avec ». Le Théorème précédent a alors comme signification Platoniste les 2 propositions élémentaires Platonistes suivantes (P1,P2):

P1:Def1(p,q),R1(p,q) :p est élément de $\mathbf{N}_{\mathbf{Z}}$ et q est élément de $\mathbf{N}_{\mathbf{Z}}$.

P2 :Eq(H(p,q),C(p,q)) (Signification Platoniste de la Proposition auxiliaire principale).

Avec H(p,q) et C(p,q) sont les propositions élémentaires stables Platonistes de type relation suivantes :

H(p,q) : R2(p,q):« p est premier avec q ».
C(p,q) : R3(p,q) :Def(u,v), R4(u,v,p,q), R4(u,v,p,q) ayant la signification de la proposition Platoniste auxiliaire suivante P_{aux}(u,v,p,q)(P_{aux1},P_{aux5}) :

P_{aux1} : R_{aux1}(u,v) : (u,v) est élément de $\mathbf{Z}^2$.

On donne alors la définition implicite du symbole « up$+_{\mathbf{Z}}$qv », obtenue d'après les règles syntaxiques de convention du code Platoniste C.
(implicitement)P_{aux2} : D_{elC}(im($\times_{\mathbf{Z}}$, (u,p)) (noté « up » d'après les règles syntaxiques de convention de C) (Voir préambule. On rappelle que (u,v) est implicitement défini par une proposition élémentaire Platoniste de type définition D_{elS}((u,v)). On a défini dans le préambule les expressions « D_{elC}» et « D_{elS}»).
(implicitement)P_{aux3} :D_{elC}(im($\times_{\mathbf{Z}}$,(q,v)) (noté « qv »)
(implicitement)P_{aux4} :D_{elC}(im(,$+_{\mathbf{Z}}$,(up,qv))) (noté « up$+_{\mathbf{Z}}$qv»).

P_{aux5} :R_{aux5}(p,q,u,v): up$+_{\mathbf{Z}}$qv=$1_{\mathbf{Z}}$.

(Dans P_{aux2},P_{aux3},P_{aux4} on a explicité les définitions implicites permettant de définir le symbole particulier up$+_{\mathbf{Z}}$qv qui a la même signification qu'un symbole de type E_4(p,q,u,v,$+_{\mathbf{Z}}$,$\times_{\mathbf{Z}}$), obtenu par une combinaison de fonction-concepts). R_{aux5} utilise implicitement la fonction-concept F_{COMB4} telle que F_{COMB4}(p,q,u,v,$+_{\mathbf{Z}}$,$\times_{\mathbf{Z}}$) a la même signification que le symbole E_4(p,q,u,v,$+_{\mathbf{Z}}$,$\times_{\mathbf{Z}}$) identifié avec le symbole particulier noté up$+_{\mathbf{Z}}$qv. On rappelle que p_0,q_0,u_0,v_0,$+_{\mathbf{Z0}}$,$\times_{\mathbf{Z0}}$ étant des objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP quelconques, les propositions élémentaires Platonistes définissant implicitement F_{COMB4}(p_0,q_0,u_0,v_0,$+_{\mathbf{Z0}}$,$\times_{\mathbf{Z0}}$) sont totalement analogues aux propositions élémentaires Platonistes P_{aux2},P_{aux3},$P_{aux 4}$).

EXEMPLE 4.2 :

Considérons le théorème permettant d'obtenir les solutions d'une équation réelle du second degré. :

Si (a,b,c) est tel que « (a,b,c) est élément de $\mathbf{R}^3$ et a $\neq 0_{\mathbf{R}}$, F est tel que « F est élément de *F*(**R**,**R**) et pour tout x tel que x est élément de **R**, $F(x)=ax^2+_{\mathbf{R}}bx+_{\mathbf{R}}c$ » , S est tel que S={y tel que F(y)=0} et Δ est tel que $\Delta=b^2-_{\mathbf{R}}4ac$ » alors « « si $\Delta<_{\mathbf{R}}0_{\mathbf{R}}$, alors S=Ø », « si $\Delta=0_{\mathbf{R}}$, alors $S=\{-_{\mathbf{R}0}b/_{\mathbf{R}}2a\}$ » et « si $\Delta>_{\mathbf{R}}0_{\mathbf{R}}$, alors « si (r_1 ,r_2) est tel que « $r_1=(-_{\mathbf{R}0}b+_{\mathbf{R}}\sqrt{}_{\mathbf{R}+}\Delta)/_{\mathbf{R}}2_{\mathbf{R}}a$ et $r_2=(-_{\mathbf{R}0}b-_{\mathbf{R}}\sqrt{}_{\mathbf{R}+}\Delta)/_{\mathbf{R}}2_{\mathbf{R}}a$ » alors $S = \{r_1,r_2\}$» » ».

Le Théorème précédent aura comme propositions auxiliaires principales des propositions, de type $P_{aux1}(\Delta,S,0_{\mathbf{R}},\emptyset)$, $P_{aux2}(\Delta,S,b,a,0_{\mathbf{R}},/_{\mathbf{R}},-_{\mathbf{R}0}, 2_{\mathbf{R}},\times_{\mathbf{R}})$ ($\times_{\mathbf{R}}$ est implicitement utilisé) et $P_{aux3}(\Delta,S,a,b,0_{\mathbf{R}})$.

La proposition auxiliaire « si (r_1 ,r_2) est tel que « $r_1=(-_{\mathbf{R}0}b+_{\mathbf{R}}\sqrt{}_{\mathbf{R}+}\Delta)/_{\mathbf{R}}2_{\mathbf{R}}a$ et $r_2=(-_{\mathbf{R}0}b-_{\mathbf{R}}\sqrt{}_{\mathbf{R}+}\Delta)/_{\mathbf{R}}2_{\mathbf{R}}a$ » alors $S = \{r_1,r_2\}$» n'est pas une proposition principale car elle n'est pas vraie considérant les définitions de S,Δ, a,b,c.

On utilise alors comme concepts généraux prédéfinis la multiplication, la division, l'addition et la soustraction dans **R** , la racine carrée d'un réel positif ($\sqrt{}_{\mathbf{R}+}$)et l'opposition d'un réel ($-_{\mathbf{R}0}$) et $0_{\mathbf{R}}$. On utilise aussi les relations non-floues $>_{\mathbf{R}}$ et $<_{\mathbf{R}}$.On pourra omettre l'indice « $_{\mathbf{R}}$ » à ces fonctions pour plus de simplicité.

Le théorème a alors comme signification Platoniste les propositions élémentaires Platonistes suivantes (P1,P2,P3,P4,P5,P6,P7):

P1 :Def1(a,b,c)
R1(a,b,c) : « (a,b,c) est élément de $\mathbf{R}^3$, et a est différent de 0 ».

P2 :Def2(F)
R2(F,a,b,c) : « F est élément de *F*(**R**,**R**) et pour tout x tel que x est élément de **R**, $F(x)=ax^2+_{\mathbf{R}}bx+_{\mathbf{R}}c$ ».

(On trouve aisément une proposition Platoniste auxilaire $P_{aux2}(F,a,b,c)$ ayant la même signification que R2(F,a,b,c), en utilisant la même méthode que dans l'exemple précédant).

P3 :Def3(S)
R3(S,F) : « S={y tel que y est élément de **R** et F(y)=0 }».

(On trouve aisément une proposition Platoniste auxilaire $P_{aux3}(S,F)$ ayant la signification de à R3(S,F)).

P4 :Def4(Δ)
R4A(Δ, a,b,c) : « $\Delta = b^2 - 4ac$ »

(On n'a pas écrit les propositions élémentaires Platonistes de type définition de type:D_{elC}(im(f,x)) définissant implicitement b^2-4ac et {-b/2a} Celles-ci s'obtiennent facilement comme dans le premier exemple, obtenues d'après les règles syntaxiques de convention du code Platoniste C).

P5 : RP5(Δ, S,$0_{\mathbf{R}}$,Ø) :Cond (P5A(Δ, $0_{\mathbf{R}}$),P5B(S,Ø)) (Signification Platoniste de la 1^{ière} Proposition auxiliaire principale).
Avec :
P5A(Δ, $0_{\mathbf{R}}$) : R5A(Δ,$0_{\mathbf{R}}$) : « $\Delta <_{\mathbf{R}} 0_{\mathbf{R}}$ »

P5B(S,Ø) : « R5B(S,Ø) : « S =Ø ».

P6 :RP6(Δ,S,b,a,$0_{\mathbf{R}}$, $/_{\mathbf{R}}$,$-_{\mathbf{Ro}}$,$2_{\mathbf{R}}$,$\times_{\mathbf{R}}$) :Cond (P6A(Δ,$0_{\mathbf{R}}$) ,P6B(S,b,a,$\times_{\mathbf{R}}$,$/_{\mathbf{R}}$,$-_{\mathbf{Ro}}$,$2_{\mathbf{R}}$)) (Signification Platoniste de la 2ième Proposition auxiliaire principale).

Avec:
P6A :R6A(Δ,$0_{\mathbf{R}}$) : « $\Delta = 0_R$ »

P6B:R6B(S,b,a,$\times_{\mathbf{R}}$,$/_{\mathbf{R}}$,$-_{\mathbf{Ro}}$,$2_{\mathbf{R}}$) :« S={$-_{\mathbf{Ro}}$b$/_{\mathbf{R}}$2$_{\mathbf{R}}$a} »

P7 : RP7(Δ,S,a,b,$0_{\mathbf{R}}$) :Cond (P7A(Δ, $0_{\mathbf{R}}$),P7B(Δ,S,a,b)). (Signification Platoniste de la 3ième Proposition auxiliaire principale).

Avec P7A (Δ, $0_{\mathbf{R}}$): R7A(Δ,$0_{\mathbf{R}}$): « $\Delta >_{\mathbf{R}} 0_{\mathbf{R}}$ » .

P7B:R7B(S, a,b, Δ):
R7B(S, a,b, Δ) ayant la signification de la propositions Platoniste auxiliaire:
P7Ba:Def(r_1,r_2)
R7Ba(r_1,r_2,b,a,Δ):« r_1=($-_{\mathbf{Ro}}$b$+_{\mathbf{R}}$$\sqrt{}_{\mathbf{R}}$Δ)$/_{\mathbf{R}}2_{\mathbf{R}}$a et r_2=($-_{\mathbf{Ro}}b-_{\mathbf{R}}$$\sqrt{}_{R}$Δ) $/_{\mathbf{R}}$2$_{\mathbf{R}}$a »
(Pour définir formellement la relation R7Ba(r_1,r_2,b,a,Δ), on utilisera la fonction-concept F_{COMB1} telle que F_{COMB1}(b,a,Δ, $-_{\mathbf{Ro}}$, $+_{\mathbf{R}}$,$\sqrt{}_{\mathbf{R}}$, $/_{\mathbf{R}}$, $2_{\mathbf{R}}$) a la même signification que le symbole "($-_{\mathbf{Ro}}$b$+_{\mathbf{R}}$$\sqrt{}_{\mathbf{R}}$Δ)$/_{\mathbf{R}}2_{\mathbf{R}}$a)").

On donne alors la définition implicite du symbole "{r_1,r_2}":
(implicitement)P7Bb:D_{elC}({r_1,r_2}) ("D_{elC}" étant défini dans le préambule).

P7Bc:R7Bc(S,r_1,r_2): « S={r_1,r_2} ».

EXEMPLE 4.3

Considérons le Théorème de Cailey-Hamilton :

Si n est élément de **N*** , A est élément de Mn(**C**), X_A est tel que « X_A est élément de *F*(**C**,**C**) et pour tout x tel que x est élément de **C**, $X_A(x)=det_n(A-_{M,n}\ x._{M,n}\ Id_{M,n})$ », alors $X_A(A)=0_{M,n}$.

Le théorème précédent aura comme proposition auxiliaire principale la proposition du type $P_{aux}(X_A,A,n)$.

Dans la proposition précédente, Mn(**C**), Id_{Mn}, 0_{Mn}, $-_{M,n}$, det_n, $._{M,n}$ sont identifiées à l'image par n de fonctions-concepts distinctes dont le concept de départ peut représenter tout naturel non nul. Ces fonctions-concepts ont leurs significations classiques.

De plus on utilise implicitement la fonction-concept $F_{C(x),M}$, dont le concept de départ peut représenter tous les couples $(P_0(x),M_0)$, avec $P_0(x)$ élément de **C**(x_S) (qu'on identifie avec un concept général pouvant représenter l'ensemble classique des polynomes sur **C**) et M_0 est tel qu'il existe n naturel non nul tel que M_0 est élément de Mn(C).

On notera alors $P_0(M_0)$ $F_{C(x),M}(P_0,M_0)$.

Le théorème précédent a alors comme signification Platoniste suivante les propositions élémentaires Platonistes suivantes(P1,P3,P5,P7):

P1 : Def1 (n)
R1(n) : n est un élément de **N*** .

(implicitement)P2:D_{elC}(Mn(**C**)) ("Mn(**C**)" a la même signification que "F_M(n,C)" , F_M fonction-concept pré-définie, d'après les règles syntaxiques de convention du code Platoniste C).

P3 :Def3(A)
R3(A,n): A est un élément de Mn(**C**).

On a alors les définitions implicites des symboles $Id_{M,n}$, $-_{M,n}$, $._{M,n}$, det_n,$0_{M,n}$ (Les symboles précédents ont respectivement la même signification que F_1(n), F_2(n),F_3(n), F_4(n), F_5(n), chaque F_i étant une fonction-concept pré-définie) :

(implicitement)P4A: $D_{elC}(Id_{M,n})$ ("D_{elC}" étant défini dans le préambule).
(implicitement)P4B :$D_{elC}(-_{M,n})$
(implicitement)P4C :$D_{elC}(._{M,n})$

(implicitement)P4D :$D_{elC}(det_n)$
(implicitement)P4E :$D_{elC}(0_{M,n})$

P5 :Def5(X_A)
R5(X_A,A,n)

Avec R5(X_A,A,n) ayant la signification de la proposition Platoniste auxiliaire $P_{aux}5(X_A$,A, n)(PA,P5B,P5G):

P5A :R5A(X_A, **C**(x_S)) : X_A est élément de **C**(x_S).

P5B :Def5B(x), R5B(x,**C**) : x est élément de **C**.

On donne alors les définitions implicites de $Det_n(A-_{M,n}x._{M,n}Id_{M,n}$) et de X_A(x), obtenues d'après les règles syntaxiques de convention du code Platoniste C).

(implicitement)P5C :D_{elC}(im($._{M,n}$, (x,$Id_{M,n}$))) (noté « x$Id_{M,n}$ » d'après les règles syntaxiques de convention du code Platoniste C)
(implicitement)P5D :D_{elC}(im($-_{M,n}$, (A,x$Id_{M,n}$))) (noté « $A-_{M,n}x._{M,n}Id_{M,n}$ »)
(implicitement)P5E :D_{elC}(im(det_n, $A-_{M,n}x._{M,n}Id_{M,n}$)) (noté « $Det_n(A-_{M,n}x._{M,n}Id_{M,n}$)»)
(implicitement)P5F :D_{elC}(im(X_A,x)) (noté X_A(x))

P5G :R5G(X_A,x,A,n): $X_A(x)=Det_n(A-_{M,n}x._{M,n}Id_{M,n})$.

La proposition élémentaire Platoniste P5G utilise implicitement la fonction-concept F_{COMB5} telle que F_{COMB5}(A,n,x) a la même signification que $Det_n(A-_{M,n}x._{M,n}Id_{M,n})$. Les propositions élémentaires Platonistes définissant implicitement F_{COMB5} (A_0,x_0,n_0), pour tous objets mathématiques non-relationnels et différents de l'EMP A_0,x_0,n_0, sont totalement analogues aux propositions élémentaires Platonistes P5C à P5E.)

On donne alors la définition implicite du symbole « X_A(A) » :
(implicitement)P6 :D_{elC}(X_A(A))

P7 : R7(X_A,A,n) :$X_A(A)=0_{M,n}$. (Signification Platoniste de la Proposition auxiliaire principale).

(On aurait cependant pu écrire le Théorème précédent sous la forme de la proposition "Si n est tel que n est élément de **N*** et A est tel que A est élément de

$M_n(\mathbf{C})$, alors $X_A(A)=0$", en identifiant d'après les règles syntaxiques de convention du code Platoniste considéré X_A avec $F_{PC}(A)$, F_{PC} étant une fonction-concept.)

EXEMPLE 4.4 :

On démontre facilement l'Axiome du choix dans la TLP :

On rappelle cet Axiome, exprimé sous forme d'une proposition mathématique simple :

Si E est tel que « E est un ensemble non vide et pour tout (A,B) tel que A et B sont des éléments de E, « A est un ensemble non vide et B est un ensemble non vide et $A \cap B = \emptyset$ » », alors il existe G tel que « « G est un ensemble et pour tout C tel que C est élément de E, il existe un et un seul g tel que « g est élément de C et g est élément de G » » et « pour tout h tel que h est élément de G, il existe D tel que « D est élément de E et h est élément de G » » .

Preuve :

Soit E un concept non-flou représentant un unique ensemble non vide dont les éléments sont des ensembles disjoints non vides. On note A le concept particulier non-flou défini par « A est tel que A est élément de E »

D'après l'Axiome d'existence d'ensemble donné dans l'article précédent [(1)] (Axiome 2.14e), il existe un ensemble non-flou unique $F=U_E(A)$ dont les éléments sont les éléments des ensembles A appartenant à E. En général les ensembles A sont des sous-ensembles d'un ensemble F, et donc on peut plus simplement utiliser cet ensemble F.

D'après le premier article [(1)], il existe donc un concept non-flou F(E,F) dont les éléments sont toutes les applications de E dans F.

On a vu dans l'article précédent que si on avait 2 ensembles A et B non vides et a étant le concept particulier défini par « a est tel que a est élément de A », et si on avait une définition non-floue D(o,a,A,B) telle qu'on ait un concept non-flou f(a,A,B) défini par « f(a,A,B) est tel que D(f(a,A,B),a,A,B) », défini uniquement on fonction de a,A,B et tel que f(a,A,B) est élément de B, alors il existait un concept particulier non-flou f défini uniquement en fonction de A,B défini par :

« f est élément de F(A,B) et pour tout a tel que a est élément de A, f(a) est tel que D(f(a),a,A,B) ».

On peut généraliser le théorème précédent au cas où f(a,A,B) est un concept particulier non-flou mais n'est pas défini uniquement en fonction de a,A,B.

Alors on admet axiomatiquement que de façon évidente, f est un concept particulier non-flou, mais n'est pas défini uniquement en fonction de A,B.

Appliquant l'Axiome précédent pour (E,F) à la place de (A,B) et prenant comme définition D(o,A,E,F) : «o est élément de A », on obtient un concept particulier non-flou f, telle que f est élement de *F*(E,F) et pour tout A tel que A est élément de E, f(A) est élément de A.

On considère alors l'ensemble G(f,E)={x tel que « il existe A tel que « A et élément de E et x est identique à f(A) » »}.

D'après l'Axiome d'existence d'ensemble G(f,E) est un concept particulier non-flou défini uniquement en fonction de f,E, et il est évident que tout objet G_0 pouvant être représenté par G(f,E) convient.

5.CONSEQUENCES DE LA TMP EN PHYSIQUE (ET AUTRES SCIENCES)

Toutes les sciences del'Univers ou disciplines utilisant des mathématiques (physique, chimie, biométrie, économie, comptabilité) ont pour principe (implicitement) d'identifier les concepts de la réalité concrète qu'elles étudient avec des concepts généraux de la TMP.

Ainsi par exemple en physique, on peut identifier le concept d'espace-temps avec le concept général non-flou $\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^3$, et un évènement de l'espace-temps avec le concept général non-flou pouvant représenter tous les éléments de $\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^3$ du type (t,(x,y,z)).

Alternativement (dans la Théorie de l'Ether) on pourra identifier le concept d'espace-temps avec le concept général non-flou g(t), avec g application de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}^+\times P(\mathbf{R}^3)$ telle que pour tout t élément de $\mathbf{R}^+$, g(t)=(t,S(t)) avec S(t) est une sphère de centre (0,0,0) et de rayon $R(t)=C\times_{\mathbf{R}}t$, C étant une constante réelle. Un évènement de l'espace-temps sera le concept général non-flou pouvant représenter tous les objets mathématiques du type (t,(x,y,z)), avec (t,(x,y,z)) est élément de {t}×S(t).

De même on peut modéliser un champ électromagnétique dans le vide et en l'abscence de charge, dans un Référentiel de Lorentz, dans un volume parallèlipédique, de la façon suivante :
V_0 est un volume de forme parallélipédique ouvert (C'est-à-dire privé de ses fontières) sous-ensemble de $\mathbf{R}^3$. (On rappelle qu'on met l'indice « 0 » pour un symbole identifié à un objet mathématique).
(**E**, **B**) est un concept particulier non-flou pouvant représenter tous les couples ($\mathbf{E}_0$, $\mathbf{B}_0$) de fonctions infiniment dérivables de de $V_0\times\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}^3$ et vérifiant les

équations de Maxwell dans le vide et en absence de charge. (Formellement, un élément de $V_0 \times \mathbf{R}^+$ est de la forme ((x,y,z),t), mais on l'écrira, dans tout ce qui suit, sous la forme (x,y,z,t)).

Alors on définit « un champ électromagnétique dans le vide et en absence de charge dans un volume parallélipédique d'un Référentiel inertiel » comme le concept général non-flou identifié à (**E**,**B**) sans paramètres fixes.

On définit « une description complète d' un champ électromagnétique dans le vide, dans un volume parallélélipédique d' un Référentiel inertiel et en l'abscence de charge » comme le concept général non-flou pouvant représenter tous les triplets (-le vide-,V_0, -abscence de charges- , ($\mathbf{E}_0$, $\mathbf{B}_0$)).

On peut généraliser ceci en définissant « un champ électromagnétique dans un milieu diélectrique ou magnétique dans un volume parallélipédique d'un Réfétentiel de Lorentz » comme un concept général non-flou. Pour cela on procède comme suit :

-V_0 est un volume de forme parallélipédique ouvert sous-ensemble de $\mathbf{R}^3$.
- ε_{m0} et μ_{m0} sont des fonctions de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^{*+}$, (identifiées à la permittivité et à la perméabilité du milieu), qui sont celles du vide pour (x,y,z) n'est pas élément de V_0.
-ρ_{l0} est une fonction infiniment dérivable de $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}$ et $\mathbf{j}_{l0}$ est une fonction infiniment dérivable de $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}^3$, reliées entre elles par l'équation de conservation de la charge. (Ces fonctions seront identifiées avec la densité volumique de charge libre et la densité de volume de courrent libre) elles seront nulles si (x,y,z) n'est pas élément de V_0.
-(**E**, **B**) est un concept particulier non-flou pouvant représenter tous les couples ($\mathbf{E}_0$, $\mathbf{B}_0$) de fonctions infiniment dérivables de de $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}^3$ et vérifiant les équations de Maxwell.

Alors on définit « un champ électromagnétique dans un milieu diélectrique ou magnétique dans un volume parallélipédique d'un Référentiel de Lorentz » comme le concept général non-flou identifié à (**E**,**B**) sans paramètres fixes.

On définit aussi « une description complète d'un champ électromagnétique dans un milieu diélectrique ou magnétique dans un volume parallélipédique d'un Référentiel d Lorentz » comme le concept général non-flou pouvant représenter toutes les séquences :
(-un champ électromagnétique dans un milieu diélectrique ou magnétique homogène, linéaire et isotrope dans un Référentiel inertiel-, (ε_{m0}, μ_{m0})), V_0, ρ_{l0}, $\mathbf{j}_{l0}$, ($\mathbf{E}_0$, $\mathbf{B}_0$)).

On pourra aussi identifier « un milieu diélectrique ou magnétique au concept général non-flou pouvant représenter tous les couples (-un milieu diélectrique ou magnétique homogène, linéaire et isotrope-, (ε_{m0}, μ_{m0}))

De même on peut identifier la chaine de caractères « une trajectoire d' une particule libre dans le vide dans un volume parallélipédique d'un Référentiel inertiel» avec un concept général non-flou représentant les objets mathématiques de la forme :
(V_0, $\mathbf{E}_0$,$\mathbf{B}_0$, -C_0- (C_0 étant un chaine de caractère désignant la nature de la particule, par exemple « proton », « électron »), i_0 (i_0 nombre identifiant la particule), m_0 (m_0 masse de la particule, nombre réel), q_0 (q_0 charge de la particule, nombre réel), x_{I0}, y_{I0}, z_{I0}, v_{xI0}, v_{yI0}, v_{zI0}, $x_0(t)$, $y_0(t)$, $z_0(t)$).

Dans le multiplet précédent, V_0 est un volume parallélipédique, ($\mathbf{E}_0$,$\mathbf{B}_0$) appartient au concept général non-flou « un champ électromagnétique dans le vide en abscence de charge dans un volume paralélipédique d'un Référentiel inertiel » (concept général non-flou défini précédemment) pour un volume V_0, (x_{I0},y_{I0},z_{I0}) et (v_{xI0},v_{yI0},v_{zI0}) sont respectivement des éléments de V_0 et de $\mathbf{R}^3$ appelés la position et la vitesse initiales (pour t=0) de la particule). $x_0(t)$, $y_0(t)$,$z_0(t)$ sont des fonctions de $\mathbf{R}^+$ dans V_0 définies par la relation fondamentale de la dynamique ($\mathbf{F}_0$=$m_0\boldsymbol{\gamma}_0$) $\mathbf{F}_0$ et $\boldsymbol{\gamma}_0$ définis classiquement en fonction de $\mathbf{E}_0$ et $\mathbf{B}_0$ et de $x_0(t)$,$y_0(t)$,$z_0(t)$. On peut donc dire que (x(t),y(t),z(t)) est un concept particulier non flou défini uniquement en fonction des concepts particuliers non-flous m, q, x_I,y_I,z_I,v_{xI},v_{yI},v_{zI}, $\mathbf{B}$,$\mathbf{E}$)

Ici on n'a pas modélisé les grandeurs physiques dans lesquelles sont exprimées les variables physiques considérées. Cependant ceci est possible si on suppose que toutes ces variables sont exprimées en Unité du Système International (seconde, mètre, kg, Coulomb, Tesla…).On peut cependant modéliser aussi n'importe quelle grandeur physique. Par exemple on remplace D_0 par $D_0\times\{s\}$, « s » étant un caractère identifié à un objet mathématique existant, et modélisant ainsi la grandeur « seconde ».

De même, en électricité, on peut modéliser les appareils (résistance, condensateur, bobine d'induction, ampèremètre, voltmètre) par des concepts généraux.

Ainsi, « une résistance » est identifiée à un concept général pouvant représenter tous les objets mathématiques res_0 de la forme (-une résistance-, B1,B2, R_0, $\{(Q_{B1B2}(t),U_{B1B2}(t),I_{B1B2}(t)\}$).

Dans la séquence précédente :

- « -une résistance- » , « B1 » et « B2 » sont des concepts généraux non-flous représentant (et identifiés) chacun avec un objet mathématique unique qui est une chaîne de caractère. (qui sont « -une résistance- » , « B1 » et « B2 »).
-R_0 est élément de $\mathbf{R}^{*+}$ appelé *valeur de la résistance* res_0.
-$\{(Q_{B1B2}(t),U_{B1B2}(t),I_{B1B2}(t))\}$ est un ensemble de triplets de fonctions $Q_{B1B2}(t),U_{B1B2}(t),I_{B1B2}(t)$ telles que $Q_{B1B2}(t),U_{B1B2}(t),I_{B1B2}(t)$ sont des fonctions infiniment dérivables et définies de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}$, et telles que pour tout t dans $\mathbf{R}^+$ $Q_{B1B2}(t)=0$ et $U_{B1B2}(t)=-R_0I_{B1B2}(t)$. Cet ensemble est donc défini uniquement en fonction de R.

On montre facilement qu' « une résistance » est un concept général non-flou.

De même on identifie avec des notations analogues « un condensateur » à un concept général pouvant représenter tous les objets mathématiques $cond_0$ de la forme (-un condensateur-,B1,B2,C_0,$\{(Q_{B1B2}(t),U_{B1B2}(t),I_{B1B2}(t))\}$).

Avec :
-C_0 est élément de $\mathbf{R}^{*+}$ appelé capacité de $cond_0$.
-$\{(Q_{B1B2}(t),U_{B1B2}(t),I_{B1B2}(t))\}$ est un ensemble de triplets de fonctions $Q_{B1B2}(t),U_{B1B2}(t),I_{B1B2}(t)$ telles que $Q_{B1B2}(t),U_{B1B2}(t),I_{B1B2}(t)$ sont des fonctions infiniment dérivables et définies de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}$, et telles que pour tout t dans $\mathbf{R}^+$ $Q_{B1B2}(t)=C_0U_{B1B2}(t)$ et $I_{B1B2}(t)=d(Q_{B1B2}(t))/dt$. Cet ensemble est donc défini uniquement en fonction de C .

Plus généralement, un appareil électrique à 2 bornes sera un concept général non-flou pouvant repésenter tous les objets ap_0 de la forme :
(« -(nom de l'appareil)- »,B1,B2, $C_{10},\dots,C_{p0}$, $\{(Q_{B1B2}(t),U_{B1B2}(t),I_{B1B2}(t))\}$)

Les C_{i0} sont des constantes caractérisant l'appareil électrique. Et l'ensemble $\{(Q_{B1B2}(t),U_{B1B2}(t),I_{B1B2}(t))\}$ est défini uniquement en fonctions des C_i.

Dans certains cas (par exemple une diode), on n'a pas une équation (différentielle ou non) reliant U_{B1B2} et I_{B1B2}, mais une courbe, appelée caractéristique de l'appareil électrique, identifiée à un sous-ensemble Car_0 de $\mathbf{R}^2$. On utilise alors Car_0 pour définir l'ensemble $\{(Q_{B1B2}(t),U_{B1B2}(t),I_{B1B2}(t)\})$ et on remplace les C_{i0} par Car_0.

On définit « un circuit » , comme un concept général non-flou pouvant représenter tous les objets l_0 de la forme :

$l_0=$ (N_{C0}, -circuit- , f_0, $\{(A_{1,1},\ldots,A_{p0(1),1}),..,(A_{1,f0},\ldots,A_{p0(f0),f0})\}$,$n_0$, $\{e(1),..,e(n_0)\}$)

Dans le multiplet précédent :

-N_{C0} est une chaine de caractère donnant un nom de circuit.

-«-circuit- » est un concept général non-flou représentant un unique objet mathématique qui est la chaine de caractère « -circuit-».

-f_0 est le nombre de fils du circuit. Le terme suivant est un ensemble noté Efl_{NC0} contenant f_0 multiplets, notés $fl_1,\ldots,fl_{f0}$, chacun étant appelé « un fil du circuit du circuit N_{C0} ». Chaque A_{i0j0} est appelé « un point du circuit N_{C0} » et est identifié au triplet (A,i_0,j_0), avec A symbole et i_0 et j_0 des naturels non nuls. $p_0(i)$ est une fonction (de $\{1,\ldots,f_0\}$ dans **N***) donnant le nombre de points du $i^{ème}$ fil.

-n_0 est le nombre de nœuds du circuit. Un nœud est un point du circuit dont partent au moins 3 fils. Les nœuds sont désignés par $n_1,\ldots,n_{n0}$.

-Pour i dans $\{1,\ldots,n_0\}$, e(i) est l'ensemble des points du circuit coincidant avec n_i.

On supposera de plus que tout circuit l_0 vérifie :

-Tous les points de l_0 A_{i0j0} qui ne sont pas des nœuds sont distincts.

-Tous les $A_{1,i0}$ et les $A_{p0(i0),i0}$, (appelés extrémités du fil f_{i0}) sont des nœuds (sauf dans le cas où l_0 ne comporte qu'un fil), et réciproquement il n'y a pas de nœuds en un point du circuit N_{C0} qui n'est pas une extrémité d'un fil f_{i0}.

Le cas particulier le plus simple,c'est-à-dire la ligne de circuit la plus simple, avec 1 seul fil sera représentée par un multiplet :

(N_{C0},-ligne-,1, $\{(A_{1,1},\ldots,A_{p0(1),1},A_{1,1})\}$,0, Ø)

On sait qu'un circuit électrique contient des appareils électriques (résistances, condensateurs. ..) et on a vu qu'on pouvait identifier chacune de ces appareils à un objet mathématique (res_0, $cond_0$…). En général, ces appareils ont 2 bornes mais pas nécessairement (par exemple pour un transistor). Pour simplifier, on considèrera seulement le cas d'appareils à 2 bornes. On supposera de plus qu'il y a au plus un appareil entre 2 points successifs d'un fil du circuit considéré.

Si on a un circuit l_0, $A_{i0,j0}$ et $A_{i0+1,j0}$ étant 2 points successifs d'un fil f_{j0} de l_0, on identifiera « un appareil ap_0 entre $A_{i0,j0}$ et $A_{i0+1,j0}$ » au multiplet :

(N_{C0},$A_{i0,j0}$,$A_{i+01,j0}$,ap_0).

Ce multiplet signifie que dans le circuit N_{C0}, $A_{i0,j0}$ coincide avec la 1^{ière} borne de ap_0, et $A_{i0+1,j0}$ avec la seconde. Dans le cas contraire on intervertit $A_{i0,j0}$ et $A_{i0+1,j0}$ dans le multiplet précédent

S'il n'y a pas d'appareils entre $A_{i0,j0}$ et $A_{i0+1,j0}$ (seulement le fil), l'appareil ap_0 entre $A_{i0,j0}$ et $A_{i0+1,j0}$ sera noté « 0 » dans le multiplet précédent.

On identifie alors « un circuit électrique » à un concept général non-flou représentant les objets mathématiques Cel_0 :

$Cel_0=(N_{C0}, l_0, Ap_0)$, défini par :

-« N_{C0}» est un concept général non-flou représentant un unique objet mathématique qui est une chaine de caractère , N_{C0} sera le nom du circuit.

-l_0 est un circuit (de nom de circuit N_{C0})

-Ap_0 est l'ensemble de tous les multiplets de la forme précédente (N_{C0}, $A_{i0,j0}$, $A_{i0+1,j0}$, ap_0). Il y a un tel multiplet pour chaque couple ($A_{i0,j0}$,$A_{i0+1,j0}$). On identifie donc l'objet mathématique Ap_0 à l'ensemble des appareils électriques sur le circuit.

Si on a un circuit électrique Cel_0, on dira que (N_{C0},$I_{01}(t)$,…,$I_{0f0}(t)$) est le « multiplet intensité de Cel_0 » si ($I_{01}(t)$,…,$I_{0f0}(t)$) sont défins de la façon suivante :

-Pour tout j_0, $I_{0j0}(t)$ est l'intensité dans le fil fl_{j0} de la ligne de circuit de Cel_0, dans le sens de $A_{1,j0}$ vers $A_{p0(j0),j0}$.

-Les $I_{0j}(t)$ sont des fonctions, infiniment dérivables et de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}$ (on peut remplacer $\mathbf{R}^+$ par tout intervalle de $\mathbf{R}$), définis par les équations suivantes :

-Les équations de nœuds : La somme des intensités partant d'un nœud quelconque sont nulles.

-Les équations des appareils électriques du circuit : Si on a un élément de Ap_0 (N_{C0}, $A_{i0,j0}$, $A_{i0+1,j0}$, ap_0), l'ensemble {($Q_{BAB2}(t)$,$I_{B1B2}(t)$,$U_{B1B2}(t)$)} correspondant à ap_0 donne des équations entre les fonctions $Q_{Ai0,j0,Ai0+1,j0}(t)$,$I_{Ai0,j0Ai0+1,j0}(t)$ et $U_{Ai0,j0,Ai0+1,j0}(t)$.

-Les équations des boucles : Pour chaque fil j_0 du circuit électrique, on considère une boucle de circuit contenant j_0, c'est-à-dire une suite finie de points du circuit (notée $Bcl(j_0)$) (B_{1j0},….,B_{nj0},B_{1j0}) telle que cette suite contienne le fil j_0, et soit telle que 2 points successifs appartiennent à un même fil (c'est-à-dire soient reliés par un fil du circuit N_{C0}).

Alors pour chaque boucle $Bcl(j_0)$ on a :

$U_{B1j0B2j0}(t)+\ldots+U_{Bn-1j0Bnj0}(t)+ U_{Bnj0B1j0}(t)=0$.

(Certaines des équations précédentes ne sont pas indépendantes. On peut se limiter à un ensemble de boucles telles que chaque fil fl_{j0} appartienne à au moins une boucle. On doit au final utiliser f_0 équation indépendantes, afin que le multiplet intensité de Cel_0 soit défini uniquement en fonction de Cel_0.)

Dans le cas où on a un appareil électrique à b_0 bornes, avec $b_0>2$, on doit supposer que cet appareil est placé en un nœud du circuit d'où partent b_0 fils. On modélise alors l'appareil par un objet mathématique ap_0 analogue à res_0 et à $cond_0$: (nom de l'appareil, B1,…,Bb_0, C_{10},..,C_{p0}, $\{(I_{Nb0B1}(t),\ldots,I_{Nb0Bb0}(t), U_{B1B2}(t),\ldots\ldots,.U_{Bb0-1Bb0}(t))\}$).
Dans le multiplet précédent, les termes sont analogues aux multiplets représentant une résistance ou un condensateur mais on a supprimé les fonctions analogues à $Q_{B1B2}(t)$.

On voit donc que pour toute science utilisant des mathématiques, on peut modéliser cette sciences par des objets mathématiques, et des concepts particuliers ou généraux, existants et définis d'après la TMP. Ceci est en particulier vrai en économie. C'est aussi le cas dans des domaines considérés comme non scientifiques, comme le jeu d'échec ou la comptabilité.

6.CONCLUSION :

On a donc vu dans cet article que la TLP est une théorie mathématique de logique pouvant interpréter l'ensemble des mathématiques classiques . Cette théorie mathématique est entièrement nouvelle et donne une justification théorique au Principe de Non-contradiction et au Principe du Tiers exclu qui sont admis axiomatiquement dans les théories actuelles de logique formelle. On a vu aussi que la TLP donne aussi une justification théorique à la consistance des théories mathématiques classiques. La TLP fait apparaître une analogie remarquable entre la construction de toutes les théories mathématiques classiques ainsi qu'entre la construction de toutes les propositions mathématiques et les démonstrations utilisées en mathématiques. La TLP modélise en effet toutes les théories mathématiques classiques ainsi que les propositions et démonstrations qu'elles utilisent à l'aide d'un code Platoniste.

Ainsi la TMP apparaît comme une théorie mathématique fondamentale permettant de comprendre le sens profond des mathématiques. Elle apparaît comme étant à la fois un théorie des théories matématiques et aussi comme la théorie de toute théorie scientifique (notamment physique) utilisant des mathématiques.

Références :

1.T.Delort, Théorie mathématique Platoniste- Théorie des ensembles (2016), Extrait du livre Théories d'or 9e édition, Editions Books on Demand, Paris (2016).

2.Nagel, Newman,Godel, Girard: Le théorème de Godel, Seuil, Paris 1992
3. E.J. Borowski, J.M Borwein, Mathematics, Collins Dictionnary (G.B, 1989)
4. E. Giusti, La naissance des objets mathématiques ,Ellipses, (Paris, 2000)
5. Largeault, Logique Mathematiques, Armand Colin,(Paris ,1992)
6. P.Thiry, Notions de logique,Deboeck Université,(Bruxelles ,1998)
7.Jennifer Bothamley, Dictionary of Theories, (visible ink press,2002)

4ième THEORIE D'OR.

THEORIE ALEATOIRE DES NOMBRES.

Auteur :Thierry DELORT.
Date :Mars 2020.

1ier article : **THEORIE ALEATOIRE DES NOMBRES-PARTIE I :CONJECTURE FAIBLE DE GOLDBACH.**

2ième article :**THEORIE ALEATOIRE DES NOMBRES-PARTIE II :CONJECTURES FORTES DE GOLDBACH ET DES NOMBRES PREMIERS JUMEAUX.**

TABLES DES MATIERES.

Titre :THEORIE ALEATOIRE DES NOMBRES – PARTIE I : CONJECTURE FAIBLE DE GOLDBACH
Auteur :Thierry DELORT
Date :Juin 2015
Extrait du livre : Théories d'or 9e édition, Editions Books on Demand, Paris (2017)

Résumé :

Nous avons présenté en 2 articles (Théorie Aléatoire des Nombres (T.A.N) Parties I et II) une théorie mathématique étudiant le hasard en théorie des nombres, dont l'importance est fondamentale. Cette théorie fait apparaître que certaines propositions en théorie des nombres ont une explication théorique basée sur le hasard, sans que rien n'indique qu'elles aient en plus une démonstration classique, c'est-à-dire utilisant seulement les Axiomes classiques de la théorie des nombres. Au contraire, on peut penser que leur seule explication mathématique théorique est basée sur le hasard.

Nous avons appelé Théorie Aléatoire des Nombres cette théorie très générale permettant d'étudier ces propositions, elle est basée sur un Axiome fondamental, l'Axiome du Hasard, et aussi sur un nouveau type de proposition appelées pseudo-Axiomes aléatoires, propres à cette théorie et admis sans démonstration comme les Axiomes et dont la nécessité est la conséquence de l'Axiome du Hasard. Ainsi, la TAN permet d'obtenir des explications théoriques aléatoires, c'est-à-dire basées sur le hasard, à certaines propositions qui n'ont pas de démonstration classique.

Dans ce premier article (T.A.N-Partie I) nous présentons les plus simples Axiomes et pseudo-Axiomes de cette théorie, et nous verrons qu'ils permettent malgré leur simplicité d'obtenir une explication théorique basée sur le hasard (appelée *explication aléatoire*) pour la Conjecture faible de Goldbach. Dans la seconde partie (T.A.N-Partie II), nous développerons cette théorie pour obtenir des explications aléatoires aux Conjectures fortes de Goldbach et des Nombres premiers jumeaux.

1.INTRODUCTION

La T.A.N (Théorie Aléatoire des Nombres) est une théorie destinée à étudier le hasard en théorie des nombres. Elle est basée sur l'Axiome fondamental suivant :

AXIOME 1 : (Axiome du Hasard)
Des modèles statistiques non-certains expriment les propriétés des nombres.

On dira qu'un modèle statistique est *non-certain* si on ne peut démontrer classiquement son existence, c'est-à-dire en utilisant seulement les Axiomes classiques de la Théorie des Nombres.

On justifie l'Axiome du Hasard d'une part parce qu'il n'y a pas de raison pour lesquelles des modèles statistiques n'existeraient pas en Théorie des Nombres, et s'ils existent on devrait s'attendre à ce qu'ils soient définis en utilisant la Théorie des probabilités. Or dans la Théorie des Nombres classiques, il n'y a aucun exemple dans lequel on utilise la théorie des probabilités pour obtenir une proposition.

Il est évident que si l'Axiome du Hasard est vrai, on ne pourra jamais le démontrer classiquement, en effet, il est équivalent à :
« Des modèles statistiques exprimant des propriétés des nombres existent alors qu'on ne peut montrer classiquement, c'est-à-dire utilisant les Axiomes de la théorie des nombres classiques, leur validité.

Il est donc de la forme :
P : Q est vraie, mais on ne peut démontrer classiquement Q.

Il est clair que si une telle proposition P est vraie, on ne pourra jamais la démontrer car pour démontrer classiquement P on doit démontrer classiquement Q , ce qui est impossible si P est vraie. Et donc si l'Axiome du Hasard est vrai, on ne peut l'obtenir que de façon axiomatique.

On voit que la conséquence de l'Axiome du Hasard, si on le suppose vrai, est qu'il est nécessaire d'utiliser une logique nouvelle, différente de celle utilisant seulement les Axiomes classiques de la Théorie des Nombres, pour obtenir des modèles non-certains. On appellera *logique du hasard* une telle logique. On verra que la Théorie Aléatoire des Nombres est fondamentale car elle permet de donner des *explications aléatoires*, c'est-à-dire des explications théoriques basées sur le hasard à de très nombreuses conjectures jamais démontrées, et en particuliers aux Conjectures fortes et faibles de Goldbach et des Nombres Premiers Jumeaux.

La T.A.N, basée sur l'Axiome du Hasard précédent, étudie les modèles statistiques non-certains et leurs conséquences. Elle utilise des propositions d'un

type nouveau, qu'on a appelé pseudo-Axiome aléatoires, qui sont analogues aux Axiomes classiques, c'est-à-dire qu'ils sont de formulation simple et qu'ils peuvent être justifiés par des arguments intuitifs évidents ou sont évidents. Ces pseudo-Axiomes aléatoires constituent la logique du hasard en théorie des nombres que nous avons défini précédemment. Ainsi, ils expriment l'existence, dans des cas particuliers complètement définis, de modèles statistiques exprimant les propriétés des nombres, et définis en utilisant la théorie des probabilités.

De plus une conséquence de l'Axiome du Hasard et de l'existence de modèles statistiques est qu'on obtient des propositions modélisées par des évènements non-certains. On verra qu'un pseudo-Axiome de la T.A.N permet d'obtenir dans certains cas des propositions classiques si elles sont modélisées par des évènements de probabilité proche de 1. La T.A.N n'est utile que si on utilise des modèles statistiques non-certains, car il est évident que tout modèle statistique certain ne nécessite pas la T.A.N pour être justifié.

Nous présentons dans ce premier article (T.A.N-PARTIE I :Conjecture faible de Goldbach) une application très simple et fondamentale de cette théorie, on voit qu'elle permet de donner une *explication aléatoire*, c'est-à-dire une explication mathématique théorique utilisant seulement les Axiomes et pseudo-Axiomes de la T.A.N, à la Conjecture faible de Goldbach.

Cette explication théorique aléatoire présentées dans ce premier article est la première justification mathématique théorique de la Conjecture faible de Goldbach.

Il y a déjà eu des approches probabilistes pour expliquer la Conjecture de Goldbach, mais celles-ci étaient purement intuitives, et n'envisageaient pas ni ne montraient que celle-ci pouvait être expliquée par le hasard d'une façon théorique.

Ainsi, par exemple, Hardy et Littlewood (6) ont proposé une formule empirique estimant pour tout nombre pair n le nombre de paires de nombres premiers dont la somme donne n :

$$r(n) \cong 2\Pi_2 \Big(\prod_{p/n, p\geq 3} \frac{p-1}{p-2} \Big) \frac{n}{\ln(n)^2}$$

où $\Pi_2 \approx 0{,}66016$

Cette conjecture est obtenue (6) en utilisant la Théorie des nombres classique, et non en utilisant des probabilités comme on le dit fréquemment, elle est appelée Conjecture forte (ou « étendue ») de Goldbach et n'a jamais été démontrée tout comme la Conjecture faible de Goldbach (Tout nombre pair est la somme de 2 nombres premiers).

Il est important de constater que ce premier article ne consiste pas à obtenir par des arguments intuitifs que le nombre de paires de nombres premiers dont la somme donne n est de l'ordre de $n/\ln^2(n)$, ce qui a déjà été fait, et de manière beaucoup plus précise par Hardy et Littlewood. En fait, il présente une théorie permettant de montrer que le hasard et ses lois expliquent la validité de nombreuses propositions en théorie des nombres qui n'ont pas de démonstration classique. Une telle théorie du hasard et de ses lois en théorie des nombres, basée sur l' Axiome du Hasard et utilisant les pseudo-Axiomes et les définitions de concepts fondamentaux que nous proposons, est totalement nouvelle. En particulier nous définissons les concepts nouveaux et fondamentaux de propositions *modélisées*, ou *modélisées exactement* par des évènements ainsi que de *lois numériques aléatoires*.

En résumé, l'idée que le hasard puisse être à l'origine et la seule explication existante de la validité de nombreuses propositions en théorie des nombres, l'Axiome du Hasard exprimant cette idée, la Théorie du hasard dans les nombres proposée basée sur l'Axiome du Hasard, d'un formalisme nouveau et utilisant des pseudo-Axiomes et de nouvelles définitions, et son application à la Conjecture faible de Goldbach, apparaissent comme étant des éléments nouveaux et fondamentaux de la théorie des nombres présentée dans cet article. On présente dans ce premier article les plus simples pseudo-Axiomes ainsi que les concepts fondamentaux comme ceux de propositions *modélisées* par des évènements ainsi que celui de *loi numérique aléatoire*, mais la Théorie Aléatoire des Nombres peut être développée. Ceci sera fait dans le second article, T.A.N-Partie II, où nous donnerons notamment une explication aléatoire aux Conjectures fortes Goldbach (Très proche de celle proposée par Hardy et Littlewood) et des nombres premiers jumeaux (Identique à celle proposée par Hardy et Littlewood).

2.THEORIE

Nous allons étudier dans la T.A.N une catégorie de propositions particulière que nous avons appelées *loi numérique aléatoire* .

DEFINITION 2.1 :

a) « *est modélisée par*» est une relation qui peut exister entre des propositions et des évènements d'espaces probabilisables, définie par la *propriété de correspondance* suivante :

Si P1 et P2 sont 2 propositions, et que Ev1 et Ev2 sont 2 évènements d'un même espace probabilisable, et si on a :
P1 *est modélisée par* Ev1.
P2 *est modélisée par* Ev2.
Alors :
La proposition « P1 et P2 » *est modélisée par* l'évènement « Ev1 et Ev2 ».
La proposition « P1 ou P2 » *est modélisée par* l'évènement « Ev1 ou Ev2 »
La proposition Non(P1) *est modélisée par* l'évènement Non(Ev1).

b)Soit F un sous-ensemble de **N**.
f est une fonction de F dans **N**, telle que f(k) est élément d'un ensemble fini F(k).
Xf(k) est une variable aléatoire à valeur dans F(k).

On appellera *loi numérique aléatoire sur F* la proposition :
« f(k) *est modélisée par la variable aléatoire* Xf(k) »

Par définition, cela signifie que pour tout k dans F, et tout i_k dans F(k), la proposition « f(k)=i_k » est modélisée par l'évènement « Xf(k)=i_k ».

REMARQUE 2.2 :

a)« P1 est modélisée par un évènement Ev1 » signifiera intuitivement que si le modèle statistique permettant d'obtenir la proposition précédente est valide avec une bonne approximation, P1 se comporte comme s'il avait les propriétés statistiques d'Ev1. Nous admettrons des propositions, appelées pseudo-Axiomes aléatoires, modélisant des propositions par des évènements en accord avec la signification intuitive précédente.

b)En réalité, avec les notations du 2.1b) pour que la T.A.N soit intéressante, on doit être dans l'un des 2 cas suivants :
-Ou bien F est infini, mais pour tout k appartenant à F, on connaît un nombre fini d'étapes permettant d'obtenir f(k) (utilisant dans la pratique un ordinateur).
-Ou bien F est fini (en général, F aura un seul élément, par exemple F={1}), mais pour au moins un élément k de F on ne connaît pas un nombre fini d'étapes permettant d'obtenir f(k).
Dans l'article, on supposera qu'on est toujours dans l'un de ces cas.

c)La T.A.N permet d'obtenir toutes sortes de propositions classiques, mais elle n'est intéressante que pour obtenir des propositions qu'on n'a jamais démontrées

classiquement et qui de plus sont illustrées et en accord avec tous les tests réalisés, un test étant un nombre fini d'opérations.

Par exemple, on sait que si, à l'aide d'un ordinateur, on vérifie pour des naturels pairs s'ils sont la somme de 2 nombres premiers, on trouvera toujours que c'est le cas. Ils vérifient donc la loi générale « Tout nombre pair est la somme de 2 nombres premiers », c'est-à-dire la Conjecture de Goldbach qui est donc à la fois illustrée et en accord avec tous les tests réalisés et de plus n'a jamais été démontrée classiquement. Elle fait donc partie des propositions classiques intéressantes à obtenir par la T.AN d'après la Remarque 2.2.

Supposons maintenant qu'on ait obtenu la loi numérique aléatoire sur F={1} suivante, t(P) étant une fonction à de F dans F(1)={0,1} :
« t(P)(1) est modélisée par la variable aléatoire Xt(P)(1) ».
avec p(« Xt(P)(1)= 1 ») >1-10^{-5} .(Pour simplifier, on identifiera parfois t(P)(1) avec t(P), puisque F n'a qu'un élément. En général, P sera une proposition et t(P) sera la fonction vérité de P, c'est-à-dire : Si P est vraie, t(P)(1)=1, sinon t(P)(1)=0).

Si le modèle statistique ayant conduit à obtenir la loi numérique aléatoire précédente est valide avec une suffisamment bonne approximation, P se comporte comme un évènement de probabilité très proche de 1 et donc une conséquence de ceci peut être que P est vraie.

Comme la conséquence t(P)(1)=1 n'est pas toujours vraie, on l'obtient par un pseudo-Axiome, le *pseudo-Axiome 2.3 du modèle exact* exposé ci-après, et admis sans démonstration comme un Axiome :

PSEUDO-AXIOME 2.3 (du modèle exact):

Si P est une proposition classique et si on a une loi numérique aléatoire sur un ensemble F={1} « t(P)(1) est modélisée par Xt(P)(1) » avec t(P)(1) à valeurs dans {0,1} et p(« Xt(P)(1)=1 »)≈1, alors lorsque le pseudo Axiome 2.3 du modèle exact est valide pour la loi numérique aléatoire précédente, on obtient t(P)(1)=1.

En fait la TA.N utilise 2 sortes de pseudo Axiomes aléatoires. Le premier pseudo Axiome est le pseudo Axiome du modèle exact précédent. La seconde sorte de pseudo Axiomes permet d'obtenir des modèles statistiques représentant des caractéristiques de fonctions numériques f(k). Ces modèles statistiques permettront d'obtenir des lois numériques aléatoires concernant f(k).

En fait, dans la T.A.N, tous les modèles statistiques sont obtenus par des pseudo Axiomes aléatoires. La raison en est qu'il apparaît qu'un modèle statistique peut être valide dans un cas et invalide dans un autre cas tout à fait analogue.

Le second pseudo Axiome aléatoire de la T.A.N introduit le modèle le plus simple : le modèle équiprobable.
Nous allons tout d'abord justifier ce pseudo Axiome aléatoire :
Cette justification intuitive donnée ci-après est assez simple. On peut en fait admettre sans démonstration ce pseudo-Axiome car il est à la fois très simple et évident, de la même façon qu'on admet les Axiomes dans les Théories mathématiques.

Supposons qu'on ait un ensemble E contenant n éléments, et qu'on sache qu'un sous-ensemble de E noté A contient un nombre a d'éléments.
On considère la proposition : P : « x est élément de A », et on suppose qu'on ignore si P est vraie ou fausse.
On considère alors seulement que x est un élément d'un ensemble contenant a éléments, lui-même sous-ensemble d'un ensemble contenant n éléments.

On peut alors considérer que x est fixé, et que A peut alors être n'importe quel sous-ensemble de E avec a éléments, avec équiprobabilité pour chaque sous-ensemble. On obtient alors de façon élémentaire que la probabilité que x appartienne à A (et donc que P soit vraie) est égale à a/n.

Si par contre on considère que A est fixé, et que x peut être n'importe quel élément de E avec équiprobabilité, on obtient aussi de façon élémentaire que la probabilité que x appartienne à A (et donc que P soit vraie) est aussi égale à a/n.

On obtient aussi la même probabilité (que P soit vraie) en considérant que (x,A) peut être avec équiprobabilité n'importe quel couple dont le premier terme est un élément de E et le second terme est un sous-ensemble de E contenant a éléments.

Ainsi d'après ce qui précède si on a une proposition de la forme $P(A_k,\Omega_k)$: « x_k est élément de A_k », où A_k est un sous-ensemble fini d' un ensemble Ω_k, connaissant le nombre d'éléments de A_k et de Ω_k, si on considère seulement dans la proposition précédente le fait que x_k est un élément d'un ensemble A_k contenant $Card(A_k)$ éléments, lui-même sous-ensemble d'un ensemble fini Ω_k contenant $Card(\Omega_k)$ éléments, alors si de plus on ignore si $P(A_k,\Omega_k)$ est vraie ou fausse, $P(A_k,\Omega_k)$ se comporte comme si elle avait la probabilité d'être vraie de l'évènement

$Ev(A_k,\Omega_k)$: « $x_{(k)}$ est élément de A_k » de l'espace probabilisable équiprobable (Ω_k, $P(\Omega_k)$,$p_{eq\Omega k}$), où $p_{eq\Omega k}$ représente la probabilité équiprobable sur l'Univers Ω_k.

Ainsi, ce qui précède est la justification intuitive du pseudo Axiome aléatoire suivant, permettant d'obtenir de nombreuses lois numériques aléatoires:

PSEUDO-AXIOME 2.4 :(du modèle équiprobable) :

Si on a une proposition P_k : « x_k est élément de A_k », où A_k est un ensemble fini dont on connaît le nombre d'éléments, qui est un sous-ensemble d'un ensemble fini Ω_k dont on connaît aussi le nombre d'éléments, alors lorsque le *pseudo-Axiome du modèle équiprobable* est valide pour (x_k,A_k,Ω_k) :
La proposition P_k :« x_k appartient à A_k » est modélisée par l'évènement « $x_{(k)} \in A_k$ » de l'espace probabilisable (Ω_k ,$P(\Omega_k)$,$p_{eq\Omega k}$) où pour tout ensemble Ω la probabilité $p_{eq\Omega}$ désigne la probabilité équiprobable sur Ω.
On appellera plus simplement l'espace probabilisable (Ω_k,$P(\Omega_k)$,$p_{eq\Omega k}$) « espace équiprobable Ω_k » .

REMARQUE 2.5 :

On a choisi la notation « $x_{(k)} \in A_k$ » plutôt que « A_k » ou « $x \in A_k$ » pour représenter l'évènement modélisant « x_k appartient à A_k » car il est clair que cet évènement est différent d'un évènement modélisant « y_k appartient à A_k » où $y_k \neq x_k$. Dans ce cas, bien qu'on ait désigné les espaces probabilisables auxquels ils appartiennent par la même notation (Ω_k,$P(\Omega_k)$,$p_{eq\Omega k}$), ils sont différents. On pourra les distinguer en les notant : ($x_{(k)}$,(Ω_k,$P(\Omega_k)$,$p_{eq\Omega k}$)) et ($y_{(k)}$,(Ω_k,$P(\Omega_k)$,$p_{eq\Omega k}$)).

Il est clair qu'avec ce modèle :

$$p_{eq\Omega k}(x_{(k)} \in A_k) = \frac{Card(A_k)}{Card(\Omega_k)}$$

en général, on appliquera ce pseudo Axiome pour (x_k,A_k,Ω_k), avec A_k appartenant à un sous-ensemble *A* de $P(\Omega_k)$. On écrira alors qu'on a supposé que le pseudo Axiome du modèle équiprobable était valide pour (x_k,*A*,Ω_k). Nous allons montrer qu'on peut toujours considérer que *A* est une tribu (sigma-algèbre):

REMARQUE 2.6 :

On rappelle d'après la Définition 2.1a) et b) *la propriété de correspondance* :

Si la proposition X est modélisée(ou est modélisée exactement) par EvX et la proposition Y par EvY, EvX et EvY appartenant au même espace probabilisable alors :
-La proposition Non(X) est modélisée (ou est modélisée exactement) par l'évènement Non(EvX).
-La proposition « X et Y » est modélisée (ou est modélisée exactement) par l'évènement « EvX et EvY »
-La proposition « X ou Y » est modélisée (ou est modélisée exactement) par l'évènement « EvX ou EvY »

Il en résulte que si X1,..,Xn sont des propositions modélisées (ou modélisées exactement) par des évènements Ev1,….Evn d'un même espace probabilisable, alors toute proposition P(X1,..,Xn) construite à partir de X1,…,Xn, utilisant seulement des « et », des « ou » et des « non » est modélisée (ou est modélisée exactement) par l'évènement P(Ev1,..,Evn) (qui est aussi un évènement de l'espace probabilisable). Ceci est obtenu car « et », « ou », « non » ont les mêmes propriétés utilisés avec des propositions ou utilisés avec des évènements d'un espace probabilisable (commutativité, associativité,distributivité….)

On a alors le Théorème :

THEOREME 2.7 :

(i) Si le pseudo Axiome du modèle équiprobable est valide pour (x_k,A_k,Ω_k) et (x_k,B_k,Ω_k), alors il est valide pour $(x_k,A_k U B_k, \Omega_k)$,pour $(x_k, A_k \cap B_k,\Omega_k)$ et pour $(x_k,\Omega_k/A_k,\Omega_k)$.

(ii)L'ensemble $\mathcal{B}_k$ des sous-ensembles A_k de Ω_k tels que l' Axiome du modèle équiprobable soit valide pour (x_k,A_k,Ω_k) est une tribu.

Démonstration :
Si l'Axiome du modèle équiprobable est valide pour (x_k,A_k,Ω_k), alors la proposition « x_k appartient à A_k » est modélisée par l'évènement « $x_{(k)} \in A_k$ » de l'espace équiprobable Ω_k.
D'après la propriété de correspondance, Non(« x_k appartient à A_k ») est modélisée par l'évènement Non(« $x_{(k)} \in A_k$ »)
Ceci est équivalent à :

« x_k appartient à Ω_k/A_k » est modélisée par « $x_{(k)} \in \Omega_k / A_k$ ».
Donc l'Axiome du modèle équiprobable est valide pour $(x_k,\Omega_k/A_k,\Omega_k)$.

Si l'Axiome du modèle équiprobable est valide pour (x_k,A_k,Ω_k) et pour (x_k,B_k,Ω_k) :
La proposition « x_k appartient à A_k » est modélisée par l'évènement « $x_{(k)} \in A_k$ » de l'espace équiprobable Ω_k.
La proposition « x_k appartient à B_k » est modélisée par l'évènement « $x_{(k)} \in B_k$ » de l'espace équiprobable Ω_k.
Donc en utilisant la propriété de correspondance:
La proposition « «x_k appartient à A_k » et « x_k appartient à B_k » » est modélisée par l'évènement « $x_{(k)} \in A_k$ et $x_{(k)} \in B_k$ », ce qui est équivalent à :
La proposition : « x_k appartient à $A_k \cap B_k$ » est modélisée par l'évènement « $x_{(k)} \in A_k \cap B_k$ » de l'espace équiprobable Ω_k.
Ce qui signifie exactement que l'Axiome du modèle équiprobable est valide pour $(x_k,A_k \cap B_k,\Omega_k)$.

On montre de même qu'il est valide pour $(x_k,A_k U B_k,\Omega_k)$.
On a donc montré le Théorème 2.7a), qui entraîne le Théorème 2.7b).

On a donc montré le Théorème 2.7.

On verra que le pseudo Axiome aléatoire du modèle équiprobable a de nombreuses applications dans la T.A.N. Il permet en effet d'obtenir de nombreux modèles statistiques.

En général, si on obtient une loi numérique aléatoire sur un ensemble F :
« f(k) est modélisée par la variable aléatoire Xf(k) »
on ne peut pas en obtenir des propositions classiques. Cependant il semble évident que dans certains cas, on peut considérer que les variables aléatoires Xf(k) sont indépendantes entre elles. Comme ceci n'est pas toujours vrai, on l'obtient par un pseudo-Axiome très simple, le pseudo-Axiome des variables indépendantes :

PSEUDO-AXIOME 2.8 des variables indépendantes :

Si on a une loi numérique aléatoire sur F « f(k) est modélisée par Xf(k) » alors lorsque le pseudo-Axiome des variables indépendantes est valide pour cette loi, on obtient la loi numérique aléatoire « f(k) est modélisée par Xf(k) », où les

variables aléatoires sont indépendantes entre elles, définies sur un Univers infini si F est infini.

REMARQUE 2.9 :

En réalité, si on obtient une loi numérique aléatoire « f(k) est modélisée par Xf(k) » en utilisant le pseudo-Axiome du modèle équiprobable, on peut en général obtenir qu'un nombre fini des variables aléatoires Xf(k) sont indépendantes entre elles, par application du modèle équiprobable sur un produit fini d'Univers associés aux variables aléatoires.

Ceci s'obtient en utilisant que si on a des Univers finis $\Omega_1,..,\Omega_n$, et des ensembles $A_1,..,A_n$ avec pour tout i A_i est inclus dans Ω_i, alors :

$$\frac{Card(A_1 \times ... \times A_n)}{Card(\Omega_1 \times ... \times \Omega_n)} = \frac{\prod_{i=1}^{n} Card(A_i)}{\prod_{i=1}^{n} Card(\Omega_i)}$$

Il en résulte que dans l'espace probabilisable équiprobable d'Univers $\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n$, les évènements « $x_{(i)}$ est élément de A_i » sont indépendants entre eux.

En généralisant ceci à un Univers produit infini, on obtient comme dans le pseudo-Axiome 2.8 des variables indépendantes précédents que les variables aléatoires Xf(k) sont indépendantes sur un Univers infini.

Cette Remarque 2.9 constitue aussi une justification intuitive du pseudo-Axiome 2.8 précédent des variables indépendantes.

Ainsi la T.A.N présentée dans cet article repose sur le pseudo Axiome2.3 du modèle exact, le pseudo Axiome du modèle équiprobable et le pseudo-Axiome 2.8 des variables indépendantes.

On utilise ces pseudo Axiomes pour obtenir des lois numériques aléatoires et des propositions classiques. Comme on l'a dit dans la Remarque 2.2, seules les propositions classiques qui n'ont jamais été démontrées classiquement mais qui sont illustrées et en accord avec tous les tests réalisés sont intéressants. On verra notamment qu'on peut obtenir la Conjecture de Goldbach et des propositions classiques en accord et illustrées par les tests définissant la Comète de Goldbach obtenue par ordinateur.

DEFINITION 2.10 :

a) On appellera *pseudo-preuve aléatoire* d'une loi numérique aléatoire ou d'une proposition classique son obtention utilisant les pseudo-Axiomes de la T.A.N, ainsi que la Théorie classique des nombres et celle des probabilités.
b) On dira qu'une proposition classique a une *explication aléatoire* si elle a une pseudo-preuve aléatoire et que celle-ci est très intéressante, puisqu'elle répond aux critères suivants :

-On n'a jamais pu la démontrer ni sa négation.
-Elle est illustrée par des tests .
-Si des propositions contradictoires P1,..,Pn ont des pseudo-preuves aléatoires, une seule d'entre elles, celle la mieux illustrée par les tests, pourra avoir une explication aléatoire. Si les tests ne peuvent départager, on choisira celle obtenue par le modèle statistique le plus précis.

Les définitions données précédemment n'ont pas la même nature : Si on peut considérer que a) donne une définition mathématique d'une *pseudo-preuve aléatoire*, cela n'est pas le cas de la définition d'une *explication aléatoire* donnée en b). En effet, on utilise l'expression « proposition ayant une explication aléatoire » pour désigner une proposition ayant une pseudo-preuve aléatoire celle-ci étant très intéressante, car elle répond à certains critères. Et donc *explication aléatoire* n'a pas de définition mathématique formelle, contrairement à *pseudo-preuve aléatoire*.

La T.A.N permet de mettre en évidence que le hasard et ses lois expliquent la validité de certaines propositions (propositions, lois numériques aléatoires exacte). Il n'y a aucune raison à priori pour que ces propositions aient en plus une démonstration classique : Il est très possible que certaines de ces propositions aient uniquement le hasard comme origine de leur validité. De plus on peut s'attendre à ce que seules certaines propositions ayant une pseudo-preuve aléatoire soient en accord et illustrées par tous les tests réalisés et donc aient une explication aléatoire intéressante.

REMARQUE 2.11 :

a)On rappelle t(P)=1 si P vraie et t(P)=0 si P fausse. Si P(k) est une proposition dépendant d'un naturel k, on considèrera souvent la fonction t(P(k)) en vue d' obtenir des lois numériques aléatoires.

b) Si une proposition classique a une explication aléatoire (Déf 2.10), alors le fait qu'elle concerne une infinité de naturels est nécessaire pour qu'on ne puisse la démontrer classiquement ni sa négation. Ceci justifie les 2 types de lois numérique aléatoires considérées, sur un ensemble F fini ou infini.

c) Nous allons montrer que la Conjecture de Goldbach a une explication aléatoire , sa pseudo-preuve aléatoire utilisant les pseudo-Axiomes très simples de la T.A.N présentées dans cet article, et que la T.A.N permet d'obtenir des propositions classiques ayant une explication aléatoire en accord et illustrées par les tests obtenus par ordinateur définissant la Comète de Goldbach.

d) Si on montre qu'une proposition classique a une explication aléatoire, on n'a pas prouvé qu'elle est vraie mais on a prouvé trois aspects essentiels de la proposition considérée:
- Elle a une explication théorique basée sur le hasard, obtenue à partir d'Axiomes et de pseudo-Axiomes de la T.A.N, qui sont simples et ont un caractère d'évidence tout comme les Axiomes classiques.
- Cette explication théorique basée sur le hasard et ses lois, appelée *explication aléatoire*, montre qu'elle peut être la conséquence de modèles statistiques qui sont complètement déterminés et dont on connaît l'origine de la validité en considérant les pseudo Axiomes utilisés pour les obtenir.
-Cette explication théorique aléatoire est fondamentale puisque la proposition n'a pas de preuve classique, et qu'il est tout à fait possible qu'elle soit la pure conséquence du hasard et de ses lois et n'ait donc pas de preuve classique.

3.APPLICATIONS

Nous allons établir que la Conjecture faible de Goldbach a une explication aléatoire. Ainsi, d'après ce qui précède, on va démontrer que la Conjecture de Goldbach a une explication rationnelle basée sur le hasard et mettre en évidence les modèles statistiques dont elle peut être la conséquence.

On rappelle la Conjecture de Goldbach :
« Tout nombre pair est la somme de 2 nombres premiers ».

APPLICATION 3.1 :

k étant un naturel pair, on considère la proposition P(k) :
P(k) :« k est la somme de 2 nombres premiers ».

On définit les ensembles :
E(k) est l'ensemble des paires de naturels impairs inférieurs à k.
A(k) est l'ensemble de paires de nombres premiers inférieurs à k.
B(k) est l'ensemble de paires de naturels impairs dont la somme donne k.
On note a(k),b(k),e(k) le nombre d'éléments de A(k),B(k),E(k).
Dans ce qui suit, i,j,k représenteront toujours des naturels pairs.

On considère la fonction f(k)=t(P(k)).
On pose :
Ω(k)={(A_k,B_k) , A_k et B_k sous-ensembles de E(k) ayant a(k) et b(k) éléments}
C*(k)={(A_k,B_k) tels que (A_k,B_k) appartient à Ω(k) et A_k et B_k ont au moins un élément en commun}.
Alors, on remarque que P(k) s'exprime :
P(k) :« (A(k),B(k)) appartient à C*(k) »
Donc, on suppose que le pseudo-Axiome 2.4 du modèle équiprobable est valide pour ((A(k),B(k)),C*(k),Ω(k)).
On obtient alors :
P(k) est modélisée par l'évènement « C*(k) » (ou « $(A_k, B_k) \in C^*(k)$ ») de l'espace équiprobable Ω(k).

On rappelle la définition formelle d'une loi numérique aléatoire (Définition 2.1):

DEFINITION 3.1.1 :

Si f(k) est une fonction définie sur un sous-ensemble F de **N** et que pour tout k appartenant à F ,f(k) appartienne à un ensemble fini de naturels {$x_{k,1}$,….,$x_{k,n(k)}$}, alors on aura la loi numérique aléatoire sur F « f(k) est modélisée par la variable aléatoire Xf(k) » si pour tout k appartenant à F, Xf(k) soit à valeurs dans {$x_{k,1}$,.. ,$x_{k,n(k)}$ } et la proposition « f(k)=$x_{k,i}$ » soit modélisée par l'évènement « Xf(k)=$x_{k,i}$ », Xf(k) étant pour tout k une variable aléatoire définie ou partiellement définie.

REMARQUE 3.1.2 :

Une application immédiate de cette Définition est le cas où pour k appartenant à un sous-ensemble F de **N**, on a une proposition P(k) qui est modélisée par un évènement Ev(k) d'un espace probabilisable (Ω_k,B,p_k), identifié avec Ω_k.
On définit alors la variable aléatoire XtP(k) sur l'espace probabilisable Ω_k, à valeur dans {0,1}, et telle que l'évènement Ev(k) est identifié à l'évènement

« XtP(k)=1 ». Alors comme P(k) est équivalente à « t(P(k))=1 », on obtient la loi numérique aléatoire « t(P(k)) est modélisée par la variable aléatoire XtP(k) » avec p(XtP(k)=1)=p_k(Ev(k))

On obtient donc d'après cette remarque la loi numérique aléatoire :

H(P(k)) « t(P(k) est modélisée par la variable aléatoire Xt(P(k)) avec :

$$p(Xt(P(k))=1)=p_{eq\Omega(k)}(C^*(k))=\frac{Card(C^*(k))}{Card(\Omega(k))}$$ ».

On pose alors :
C(k)(0)= {(A_k,B_k) / (A_k,B_k) appartient à Ω(k) et A_k et B_k ont 0 éléments en commun}.
Il est alors évident : C*(k)=Ω(k)/C(k)(0)

En utilisant les formules classiques de dénombrement on obtient :

$$Card(\Omega(k))=C_{e(k)}^{a(k)}C_{e(k)}^{b(k)}$$

$$Card(C(k)(0))=C_{e(k)}^{b(k)}C_{e(k)-b(k)}^{a(k)}$$

Donc :

$$p_{eq\Omega(k)}(C(k)(0))=(\frac{e(k)-b(k)}{e(k)})(\frac{e(k)-b(k)+1}{e(k)-1})...(\frac{e(k)-b(k)-a(k)+1)}{e(k)-a(k)+1})$$

donc :

$$p_{eq\Omega(k)}(C(k)(0))=(1-\frac{b(k)}{e(k)})(1-\frac{b(k)}{e(k)-1})...(1-\frac{b(k)}{e(k)-a(k)+1})$$

On pose :

p(a(k),b(k),e(k)=$p_{eq\Omega(k)}$ (C(k)(0)).

On a donc :

$p_{eq\Omega(k)}$ (C*(k))=1-p(a(k),b(k),e(k))

On cherche une approximation de p(a(k),b(k),e(k)).

On a :

$$(1-\frac{b(k)}{e(k)-a(k)+1})^{a(k)}\leq p(a(k),b(k),e(k))\leq(1-\frac{b(k)}{e(k)})^{a(k)}$$

De plus on peut écrire:

$$(1-\frac{b(k)}{e(k)})^{a(k)} = \exp(a(k)Log(1-\frac{b(k)}{e(k)}))$$

On verra plus loin en calculant les expressions de a(k),b(k),e(k) que pour k tendant vers l'infini on a a(k)/e(k) et b(k)/e(k) tendent vers 0 et a(k)b(k)/e(k) tend vers l'infini.

Dans la suite, la notation $\varepsilon_i(k)$ désignera toujours une fonction tendant vers 0 pour k tendant vers l'infini.

En utilisant que si $\varepsilon_1(k)$ tend vers 0 pour k tend vers l'infini, alors il existe une fonction $\varepsilon_2(k)$ tendant aussi vers 0 pour k tendant vers l'infini telle que $Log(1+\varepsilon_1(k))=\varepsilon_1(k)\ (1+\varepsilon_2(k))$, on arrive facilement à :

$$p(a(k),b(k),e(k)) = \exp(-\frac{a(k)b(k)}{e(k)}(1+\varepsilon(k)))$$

où ε(k) est une fonction tendant vers 0 pour k tend vers l'infini.

Calculons maintenant a(k),b(k),e(k).

E(k) est l'ensemble des pairs {x,y} de naturels impairs inférieurs à k. e(k) est le nombre d'éléments de E(k).

Si k est pair, k=2p, il y a p naturels impairs inférieurs à k : {1,…,2p-1}.

Donc $e(k)=(p^2-p)/2$, car il y a p^2 couples (x,y) mais p^2-p couples (x,y) avec $x\neq y$.

On a donc $e(k)=(p^2-p)/2\approx k^2/8$

On emploiera la notation f(k)≈g(k) si il existe une fonction ε(k) tendant vers 0 pour k tendant vers l'infini avec f(k)=g(k)(1+ε(k)).

Il nous suffit d'étudier P(k) pour k supérieur à 10000 car utilisant un ordinateur on a déjà montré que P(k) était vrai pour k inférieur à 10000.

A(k) est l'ensemble de paires {x,y} de nombres premiers inférieurs à k, et on sait qu'une estimation du nombre de nombres premiers inférieurs à k est égale à k/Log(k).

Il en résulte que le nombre d'éléments a(k) de A(k) est estimé par:

$$a(k) \approx \frac{1}{2}(\frac{k}{Log(k)})^2$$

Enfin B(k) est l'ensemble des paires {x,y} de nombres impairs tels que x+y=k.

On a (si k= 2p) pour x l'ensemble des valeurs {1,…,2p-1}, soit p valeurs, et alors y est complètement déterminé.
Il en résulte qu' une estimation de b(k) le nombre d'éléments de B(k) est :
b(k)≈p/2=k/4.

On obtient donc :

$$\frac{a(k)b(k)}{e(k)} \approx \frac{k}{(Log(k))^2}$$

D'où :

$$p(a(k),b(k),e(k)) = \exp(-\frac{k}{(Log(k))^2}(1+\varepsilon(k)))$$

Et donc on a obtenu la loi numérique aléatoire, k étant un naturel pair supérieur à 10000 :
H(P(k)) : « t(P(k)) est modélisée par la variable aléatoire Xt(P(k)) avec :

$$p(Xt(P(k))=1) = 1 - p(a(k),b(k),e(k)) = 1 - \exp(-\frac{k}{(Log(k))^2}(1+\varepsilon(k)))$$ »

On calcule que prenant k =10000, cette probabilité p(a(k),b(k),e(k)) est de l'ordre de 10^{-52}.

APPLICATION 3.2 :

On considère la proposition P :
P : « Pour tout naturel k supérieur à 10000, k est la somme de 2 nombres premiers (distincts). »
On cherche à modéliser t(P) par une variable aléatoire Xt(P).

Si on applique le pseudo-Axiome 2.8 des variables indépendantes à H(P(k)), on obtient une loi numérique aléatoire H_{ind}(P(k)) identique à H(P(k)) mais dans laquelle les variables aléatoires X_{ind}t(P(k)) sont indépendantes.

Pour obtenir des propositions classiques à partir d'une loi numérique aléatoire, on utilise la Propriété de correspondance généralisée suivante, qui complète la définition 2.1a) des relations « est modélisée par » en généralisant la propriété de correspondance définie dans la même définition:

PROPRIETE DE CORRESPONDANCE GENERALISEE 3.2.1 :

A)On a vu dans la Remarque 2.6 (utilisant la propriété de correspondance (Définition 2.1)) que si on avait des modélisations : « Pi est modélisée par l'évènement Evi », Evi évènement d'un Espace probabilisable (Ω,B,p_Ω), alors toute proposition P(P1,..,Pn) utilisant un nombre fini de Pi, de « ou » ,de « et »de « non », était modélisée par l'évènement P(Ev1,..,Evn).
On remarque que dans P(Ev1,..,Evn), on peut remplacer « et » par « ∩ », « ou » par « U », et « non » par « (Ω/) ».
On généralise cette proposition au cas où on a une infinité de modélisations « Pi est modélisée par Evi », i appartenant à un ensemble infini F et les Evi appartenant au même espace probabilisable. Alors, par généralisation de la définition de « est modélisée »:

La proposition $\bigcap_{i\in F} Pi$ est modélisée par l'évènement $\bigcap_{i\in F} Evi$.
On a la même propriété remplaçant l'intersection infinie par une union infinie.

Evidemment, $\bigcap_{i\in F} Pi$ signifie que pour tout i dans F, Pi est vraie, et $\bigcup_{i\in F} Pi$ signifie qu'au moins une proposition Pi est vraie, pour i dans F.

B) Plus généralement, supposons dans B) qu'on ait une loi numérique aléatoire sur un ensemble F fini « f(k) est modélisée par Xf(k) », les variables aléatoires Xf(k) étant définies sur le même espace probabilisable fini (Ω,B,p) et pour tout k f(k) prenant un nombre fini de valeurs dans un ensemble fini noté F(k).
Supposons que les naturels 1,…,n appartiennent à F et qu'on ait une proposition P(f(1),…,f(n)) dont la vérité dépende seulement des valeurs prises par f(1),..,f(n), c'est-à-dire que P(f(1),..,f(n))est vraie ou(exclusif) fausse.
Alors P(f(1),..,f(n)) est équivalent à une proposition de la forme :
« « f(1)=a_{11} » et…et « f(n)=a_{1n} » » ou… « f(1)=a_{k1} »et….et « f(n)=a_{kn} » »
Dans cette proposition la valeur des a_{ki} dépendent seulement de la proposition P(f(1),..,f(n)).
Appliquant la Propriété de correspondance (Définition 2.1) ou la Remarque 2.6, on obtient que P(f(1),..,f(n)) est modélisée par l'évènement P(Xf(1),…,Xf(n)) de(Ω,B,p).

C)Ce qui précède est vrai pour F fini, mais comme en A), on généralise cette Propriété avec une F infini:
Supposons qu'on ait une loi numérique aléatoire sur un ensemble F infini « f(k) est modélisée par Xf(k) », les variables aléatoires Xf(k) étant définies sur le même

espace probabilisable infini (Ω,B,p) et pour tout k f(k) prenant un nombre fini de valeurs dans un ensemble fini noté F(k).
Si on a une proposition $P((f(i)_F)$ dont la vérité dépende seulement de $(f(i))_F$, c'est-à-dire $P(f(i))_F)$ est vraie ou(exclusif) fausse, alors on admettra, en généralisant la propriété précédente établie pour F fini, et donc en généralisant la propriété de correspondance, que $P(f(i)_F)$ est modélisée par l'évènement $P(Xf(i)_F)$ de (Ω,B,p).

On appellera *Propriété de correspondance généralisée* la Propriété précédente, de laquelle on peut obtenir le A) :
Avec les hypothèses du A), on définit la fonction f de F dans {0,1} telle que pour tout i dans F, « f(1)=1 » est équivalent à « Pi est vraie ». Pour tout i dans F on définit aussi la variable aléatoire Xf(i) à valeur dans {0,1} telle que « Xf(i)=1 » est équivalent à « Evi ». Alors on considère les propositions :

« Pour tout i de F, f(i)=1 » et « Il existe i dans F, tel que f(i)=1 ».

D'après la Propriété de correspondance généralisée 3.2.1 précédente, i étant toujours un nombre pair, la proposition $\bigcap_{i=10000}^{\infty} "t(P(i))=1"$ est modélisée par $\bigcap_{i=10000}^{\infty} "X_{ind}t(P(i))=1"$. (On rappelle « t(P(i))=1 » est équivalent à « P(i) est vraie »)
La proposition précédente étant équivalente à P et les variables $X_{ind}t(P(i))$ étant indépendantes, on a donc obtenu la loi numérique aléatoire H(P) :
H(P) : « t(P) est modélisée par la variable aléatoire Xt(P) avec :
$$p(Xt(P)=1)=\lim_{k\to\infty}\prod_{i=10000}^{k}(1-\exp(-\frac{k}{(Log(k))^2}(1+\varepsilon(k))))$$ »

En exprimant l'expression précédente en somme de logarithmes et en utilisant $Log(1+\varepsilon(x))\approx\varepsilon(x)$, remarquant qu'on a des termes positifs et décroissant on peut approximer l'expression précédente par une intégrale. On obtient alors qu'elle est de l'ordre ou inférieure à 10^{-39}.

On a donc obtenu la loi numérique aléatoire :
H(P) : « t(P) est modélisée par la variable aléatoire Xt(P) avec :
p(Xt(P)=1) supérieur ou de l'ordre de $1\text{-}10^{-39}$ »
En utilisant alors le pseudo Axiome 2.3 du modèle exact, on obtient t(P)=1, c'est-à-dire P qui est exactement la Conjecture de Goldbach. On rappelle que la Conjecture

de Goldbach est une proposition illustrée et en accord avec tous les tests réalisés. Puisque P n'a jamais été contredite ni prouvée classiquement, on obtient donc que P a une explication aléatoire. (Déf 2.10)

On a donc montré :

a)La conjecture de Goldbach a une explication théorique basée sur le hasard.

b)Elle peut en effet être déduite de modèles statistiques complètement déterminés et dont on connaît l'origine de la validité (Les pseudo-Axiomes utilisés).

c)Cette explication théorique aléatoire est fondamentale puisque la Conjecture de Goldbach n'a jamais été prouvée classiquement, il est donc très possible qu'elle soit seulement la conséquence du hasard et n'ait donc pas de preuve classique.

Donner une explication aléatoire à la Conjecture faible de Goldbach était l'objectif principal de cet article. Dans ce qui suit, on va donner une pseudo-preuve aléatoire (Définition 2.10) à d'autres propositions liées à la Conjecture de Goldbach, notamment des propositions générales prévoyant que la Comète de Goldbach est une Comète et donnant la définition mathématique des courbes constituant cette Comète. On verra que ces propositions, en dépit du fait qu'elles semblent illustrées par la Comète de Goldbach sont fausses, car elles sont contredites par la Conjecture Forte de Goldbach proposée par Hardy et Littlewood. Cependant, en affinant le modèle statistique permettant d'obtenir les propriétés générales de la Comète de Goldbach on obtiendra dans un 2ième article [(7)] des propositions beaucoup plus précises et illustrées par des tests statistiques, comme la Conjecture forte de Goldbach et celle des nombres premiers jumeaux proposées par Hardy et Littlewood [(6)]. De plus, les 2 applications suivantes montrent comment utiliser la T.A.N pour obtenir d'autres types de propositions classiques ou de lois numériques aléatoires.

APPLICATION 3.3.

Nous allons maintenant obtenir des lois numériques aléatoires permettant de prédire certaines propriétés générales de la Comète de Goldbach.
On rappelle que r(k) est le nombre de paires de nombres premiers dont la somme donne k.
On conservera les notations des 2 applications précédentes. Soit k un naturel pair et h un naturel inférieur à inf(a(k),b(k)).
Considérons la proposition:

Pr(k)(h) : « r(k)=h ».
Si on définit l'ensemble C(k)(h) par :
C(k)(h) = $\{(A_i,B_i)$ / (A_i,B_i) appartiennent à Ω(i) et A_i et B_i ont h éléments en commun}
Alors il est clair que Pr(k)(h) s'écrit :
Pr(k)(h) : « (A(k),B(k)) appartient à C(k)(h) ».

Si alors on considère que le pseudo Axiome du modèle équiprobable est valide pour ((A(k),B(k)),C(k)(h),Ω(k)), alors on obtient :
Pr(k)(h) est modélisée par l'évènement C(k)(h) de l'espace équiprobable Ω(k).
Ce qui s'exprime aussi par la loi numérique aléatoire :
HPr(k) : La fonction r(k) est modélisée par la variable aléatoire Xr(k) avec :
$p(Xr(k)=h)=p_{eq\Omega(k)}(C(k)(h))$ »

On obtient facilement en utilisant les formules de dénombrement :

$$Card(C(k)(h)) = C_{e(k)}^{a(k)} C_{a(k)}^{h} C_{e(k)-a(k)}^{b(k)-h}$$

Donc :

$$p_{eq\Omega(i)}(C(k)(h)) = \frac{C_{a(k)}^{h} C_{e(k)-a(k)}^{b(k)-h}}{C_{e(k)}^{b(k)}}$$

En appliquant le pseudo-Axiome 2.8 des variables indépendantes, on obtient une loi d'expression identique avec HPr(k), notée Hr_{ind}, mais dans lesquelles les variables aléatoires $Xr_{ind}(k)$ sont indépendantes.

Hr_{ind} : « Pour k naturel pair supérieur à 1000, r(k) est modélisé par la variable aléatoire $Xr_{ind}(k)$, où les $Xr_{ind}(k)$ sont des variables aléatoires indépendantes (Sur un Univers infini) ayant les mêmes propriétés numériques que les Xr(k). »

On cherche à obtenir par la TAN une estimation de r(k). Considérons le cas général où l'on recherche une estimation par la TAN d'une fonction f(k) définie sur un sous-ensemble infini de **N** :

ETUDE THEORIQUE D'UNE FONCTION PAR LA TAN 3.3.1 :

On ne considèrera que 2 cas :
Dans le premier cas, on obtient par la TAN en utilisant un modèle statistique M1 une fonction F(k), telle que la proposition suivante P1 a une pseudo-preuve aléatoire :

P1 : « $\frac{\lim}{k\to\infty}(\frac{f(k)}{F(k)})=1$ » .

Dans le 2ième cas, on obtient par la TAN, en utilisant un modèle statistique M2 une fonction F(k), deux fonctions $\varepsilon_1(k)$ et $\varepsilon_2(k)$ positives et tendant vers 0 telle que, posant $I(k)=[1-\varepsilon_1(k),1+\varepsilon_2(k)]$, une proposition du type de la proposition suivante P2 a une pseudo-preuve aléatoire :

P2 : « Il existe un naturel N tel que pour tout n supérieur à N :
$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\times t("\frac{f(i)}{F(i)}\in I(i)")\geq p$ (En général on ne connaît pas explicitement F(n), mais on a F(n) équivalente à une fonction $F_A(n)$ connue)»

On remarque que si dans P2, p=1, alors P2 entraîne P1.

Définissant m(k) par $m(k)=E(Xr_{ind}(k))$, on admet, ce qui est un problème classique de probabilité :

$$p(\frac{\lim}{k\to\infty}(\frac{Xr_{ind}(k)}{m(k)})=1)=1$$

Et donc, utilisant la Propriété de correspondance généralisée 3.2.1 et le pseudo-Axiome du modèle exact 2.3, on obtient que la proposition suivante P1(r(k)) a une pseudo-preuve aléatoire:

P1(r(k)) : $\frac{\lim}{k\to\infty}(\frac{r(k)}{m(k)})=1$

On obtient d'après la théorie des probabilités par récurrence m(k)=a(k)b(k)/e(k), a(k), b(k) et e(k) ayant été précédemment définis.

Pour montrer ceci, on montre facilement le Théorème suivant :

Si E est un ensemble ayant n éléments, a et b étant 2 naturels inférieurs à n, si on considère $E_{a,b}$ l'ensemble des couples (A,B) de sous-ensembles de E ayant respectivement a et b éléments, alors considérant l'Espace probabilisable équiprobable $(E_{a,b},\mathcal{P}(E_{a,b}), p_{eq})$, si $X_{a,b}$ est la variable aléatoire définie sur l'espace probabilisable précédent telle que $X_{a,b}((A,B))=\mathrm{Card}(A\cap B)$, alors $E(X_{a,b})=ab/n$.

Pour montrer ceci, on procède comme suit :

On considère un ensemble E ayant n éléments, et E_b l'ensemble des sous-ensembles de E ayant b éléments. On considère alors l'Espace probabilisable équiprobable (E_b,$P(E_b)$,p_{eq}). Puis on définit pour tout i un sous-ensemble de E ayant i éléments $A_i=\{a_{10},\ldots,a_{i0}\}$.

On définit alors sur l'espace probabilisable précédent la variable aléatoire $X_{i0,b}$ telle que $X_{i0,b}(B)$=Card ($A_i \cap B$).

On montre alors facilement par récurrence :$E(X_{i0})$=ib/n.

Utilisant de résultat, on obtient le Théorème précédent.

Et donc:

$$m(k) \approx \frac{k}{(Log(k))^2}$$

On obtient :
m(3000)≈48, m(10000) ≈117, m(50000)≈427, m(60000)≈496, m(75000)≈595, m(90000)≈691, m(100000)≈756.

Examinant la Comète de Goldbach [(2)], on voit que P1(r(k)) n'est pas illustrée par cette dernière, considérée comme des tests statistiques.
Et donc P1(r(k)) n'a pas d'explication aléatoire car elle n'est pas illustrée par des tests statistiques.

Cependant on peut vérifier que les points (k,m(k)) sont à l'intérieur de la Comète de Goldbach et que les courbes d'équation $r_{min}(k)=0.7k/(Log(k))^2$ et $r_{Max}(k)=2k/(Log(k))^2$ délimitent cette comète, contenant les points (k,r(k) pour k inférieur à 100000 .

Or une conséquence de P1(r(k)) est la proposition suivante qui a donc aussi une pseudo-preuve aléatoire :

Q1(r(k)) : « Il existe α, β dans $\mathbf{R}^{*+}$, et N dans **N** tel que pour k>N on ait : α<r(k)/m(k)< β».

On voit que cette proposition est en accord avec les tests statistiques prenant α=0,7 et β=2 , (elle donne de plus les propriétés générales de la Comète de Goldbach ainsi que l'expression générale (en $k/((Log(k))^2)$ des courbes délimitant la Comète). Cependant elle est fausse car elle est en désaccord avec la Conjecture Forte de Goldbach proposée par Hardy et Littlewood. (Or celle-ci a aussi, comme on le verra une pseudo-preuve aléatoire et de plus est illustrée par de nombreux tests statistiques. On peut donc penser que Q1(r(k)) serait contredite par des tests statistiques et on rappelle que d'après la Définition 2.10 2 propositions contradictoires ne peuvent avoir d'explication aléatoire). De plus, elle est très

imprécise car elle ne donne pas les valeurs des constantes α,β. On ne peut donc pas dire qu'elle a une explication aléatoire. Cependant, c'est en affinant le modèle statistique utilisé pour obtenir P1(r(k)) qu'on obtiendra la Conjecture Forte de Goldbach dans l'article (7).

Cependant la proposition R1(r(k)) :
R1(r(k)) : « Il existe α dans $\mathbf{R}^{*+}$ et N dans $\mathbf{N}$ tel que pour k>n on ait α<r(k)/m(k) »

est en accord avec la Conjecture de Goldbach et de plus elle est illustrée par la Comète de Goldbach puisqu'elle donne la forme de l'équation de la courbe inférieure de la Comète. De plus elle est importante car elle indique qu'il existe une fonction croissante et tendant vers l'infini minimisant les r(k). On pourra donc considérer qu'elle a une explication aléatoire, et qu'elle donne une propriété générale de la Comète de Goldbach. Elle est beaucoup plus imprécise que la Conjecture Forte de Goldbach, mais est obtenue avec un modèle statistique beaucoup plus simple.

On montre le Théorème suivant :

THEOREME 3.3.2 :

Si $f_1(k_1),\ldots.f_n(k_n)$ sont à valeurs dans des ensembles finis $If_1,..,If_n$ et sont modélisées par des variables aléatoires $Xf_1(k_1),\ldots,Xf_n(k_n)$ définies sur le même espace probabilisable ($k_1,..,k_n$ étant des naturels quelconques, et $f_1,\ldots,f_n$ des fonctions. $Xf_i(k_i)$ est donc à valeurs dans If_i) , alors pour toute fonction $F(f_1(k_1),\ldots,f_n(k_n))$ à valeur dans $\{h_1,\ldots,h_m\}$, et pour tout l dans $\{1,\ldots m\}$:
« $F(f_1(k_1),..,f_n(k_n))=h_l$ » est modélisée par l'évènement « $F(Xf_1(k_1), \ldots,Xf_n(k_n))=h_l$ ».

Démonstration :

D'après l'hypothèse, les $f_i(k_i)$ prennent un nombre fini de valeurs dans l'ensemble fini If_i:
Donc l'équation :« $F(x_1,\ldots,x_n)=h_l$ pour x_i appartient à If_i » admet un nombre fini de solutions. Soit s ce nombre.
On peut donc écrire ces solutions sous la forme :
$(a_{11},\ldots.,a_{1n}), \ldots.,(a_{s1},\ldots.,a_{sn})$.
Alors on a : « $F(f_1(k_1),\ldots,f_n(k_n))=h_l$ » est équivalent à la proposition:

« « $f_1(k_1)=a_{11}$ et… et $f_n(k_n)=a_{1n}$ »ou….,ou « $f_1(k_1)=a_{s1}$ et   et $f_n(k_n)=a_{sn}$ » ».
Alors en utilisant la Remarque 2.6 et que « $f_i(k_i)=a_{ji}$ » est modélisée par « $Xf_i(k_i)=a_{ji}$, on obtient :
« $F(f_1(k_1),\dots,f_n(k_n))=h_l$ » est modélisé par l'évènement :
« $Xf_1(k_1)=a_{11}$ et et $Xf_n(k_n)=a_{1n}$ » ou,….ou « $Xf_1(k_1)=a_{s1}$ et et $Xf_n(k_n)=a_{sn}$ »
Or il est clair que cet évènement est équivalent à :
« $F(Xf_1(k_1),\dots,Xf_n(k_n))=h_l$. » (puisque les variables aléatoires $Xf_i(k_i)$ sont à valeurs dans If_i).
On a donc montré :
« $F(f_1(k_1),\dots,f_n(k_n))=h_l$ » est modélisée par « $F(Xf_1(k_1),..,Xf_n(k_n))=h_l$ ».

Ceci étant vrai pour tout h_l dans $\{h_1,\dots,h_m\}$, on a donc le corollaire immédiat :

COROLLAIRE 3.3.3 :

Si $f_1(k_1),\dots,f_n(k_n)$ sont à valeurs dans des ensembles finis et sont modélisées par des variables aléatoires $Xf_1(k_1),\dots,Xf_n(k_n)$ définies dans le même espace probabilisable, alors toute fonction $F(f_1(k_1),\dots f_n(k_n))$ est modélisée par la variable aléatoire : $F(Xf_1(k_1),\dots,Xf_n(k_n))$.
Il est évident qu'on peut remplacer dans ce qui précède « est modélisée » par « est modélisée exactement », puisque comme on l'a utilisé dans la Remarque 2.6, la propriété de correspondance est valide dans les 2 cas. De plus, on aurait pu aussi prendre $k_1=..=k_n=k$, puisque les k_i sont des naturels quelconques, ou remplacer $f_i(k_i)$ par $f(k_i)$ puisque les f_i sont des fonctions quelconques (à valeur dans des ensembles finis).

4.CONCLUSION

On a donc présenté une théorie aléatoire des nombres (T.A.N), basée sur des nouvelles Définitions et pseudo-Axiomes introduisant les lois du hasard dans la Théorie des nombres, qui apparaît comme étant fondamentale pour proposer une solution à des problèmes qui n'ont jamais été résolus comme par exemple la Conjecture faible de Goldbach. On a vu que la T.A.N était basée sur l'Axiome du Hasard, cette Axiome du Hasard entraînant la nécessité d'une nouvelle logique, logique du hasard constituée par les pseudo-Axiomes.

On peut penser avec quasi certitude que de nombreuses propositions vraies en théorie des nombres n'ont pas d'autres explications théoriques qu' une explication théorique aléatoire, c'est-à-dire basée sur le hasard. La T.A.N peut être considérée comme la théorie permettant l'étude de ces propositions. On peut s'attendre qu'on ne puisse pas montrer qu'une proposition en théorie des nombres

ait une *démonstration* basée sur le hasard d'une part car cela n'a jamais été fait pour aucune proposition et d'autre part parce que les Axiomes classiques de la Théorie des nombres n'introduisent pas le hasard contrairement aux pseudo-Axiomes de la T.A.N.
Le fait qu'une proposition ait une explication aléatoire est fondamental car cela signifie :

a)Qu'on a montré qu'elle a une justification théorique basée sur le hasard.
b)Qu'on a déterminé précisément les modèles statistiques dont elle peut être la conséquence et l'origine de la validité de ces modèles.
c)Que cette explication est fondamentale puisque la proposition n'a pas de preuve classique, et qu'il est tout à fait possible que celle-ci n'existe pas si la seule origine de la validité de la proposition est le hasard et ses lois concernant les nombres.

On a donc vu que les pseudo Axiomes étaient fondamentaux en T.A.N, puisqu'ils introduisaient des modèles statistiques. Le fait qu'ils ne soient pas toujours valides est dû au fait que les modèles statistiques peuvent être valides ou invalides dans des situations totalement analogues.

En fait, il semble exclu qu'une théorie du hasard en Théorie des nombres existe sans contenir des pseudo-Axiomes et Axiomes analogues à ceux que nous avons présentés dans cet article. Nous avons proposé dans cet article l'application de la T.A.N à la Conjecture faible de Goldbach parce que c'est l'application simple la plus intéressante, mais il existe des applications beaucoup plus simples et évidentes.

Par exemple on obtient facilement en utilisant les Axiomes et pseudo-Axiomes présentés dans cet article les propriétés statistiques des décimales de nombreux réels (pi..). Ces exemples sont les plus simples et évidentes applications de la T.A.N, et constituent la plus évidente preuve de sa validité et de son importance, et en particulier de la validité du pseudo-Axiome du modèle équiprobable présenté dans cet article. On obtient dans ces exemples des modèles statistiques exacts (Déf.2.1), et donc des lois numériques aléatoires exactes, et des explications théoriques aléatoires à de nombreuses propositions exprimant les propriétés statistiques des décimales de réels.

Comme toutes les propositions ayant une explication aléatoire, si on arrivait à prouver classiquement la Conjecture faible de Goldbach ou les propriétés générales de la Comète de Goldbach exposées dans la Conjecture Forte de Goldbach , alors leur explication théorique basée sur la T.A.N perdrait son intérêt. Cependant, cela fait plus de 2 siècles qu'on essaie sans succès de les démontrer, alors qu'on a déjà montré (par Vinogradov) toutes les formules analogues prouvant que tout nombre pair est la somme de 2n nombres premiers, avec n supérieur à 2, et

une explication serait que la Conjecture faible et forte de Goldbach aient une origine purement due au hasard, sans preuve classique.

En fait, il est certain qu'il existe d'autres pseudo-Axiomes aléatoires que ceux présentés dans cet article, mais ils doivent nécessairement avoir un caractère d'évidence et de simplicité. Nous verrons dans un second article [7] qu'il est possible d'obtenir par la TAN la Conjecture Forte de Goldbach, c'est-à-dire une estimation de r(k) très proche de la Conjecture de Hardy et Littlewood [6]. Ceci est cependant plus complexe que l'obtention de la Conjecture faible de Goldbach(r(k)>0 pour tout k pair). Nous verrons aussi dans ce second article qu'il est possible d'obtenir la Conjecture Forte des nombres premiers jumeaux qui est exactement celle proposée par Hardy et Littlewood. C'est aussi un très grand succès de la TAN.

References :

1.E.J Borowski, J.M Borwein,Mathematics, *Collins Dictionnary* (GB 1984).

2.J.P Delahaye, *Merveilleux nombres premiers*, Belin (Paris 2000)

3.M.R Spiegel, J.S Schiller, R.Srinivasan, *Probability and Statistics*, McGraw Hill (2000)

4. P.Roger, *Probabilités statistiques et processus stochastiques*, Pearson (France 2004).

5.O.Rioul ,*Théorie des probabilités*, Lavoisier, (Paris 2008).

6.Hardy and Littlewood, *On the expression of a number as a sum of primes*, Acta mathematica (1923).

7.Thierry Delort, Théorie aléatoire des nombres, Partie II, *Théories d'or 8e édition*, Books on demand, Paris (2015)

Titre : THEORIE ALEATOIRE DES NOMBRES- PARTIE II : CONJECTURES FORTES DE GOLDBACH ET DES NOMBRES PREMIERS JUMEAUX.

Auteur :Thierry DELORT

Date : Juin 2015

Extrait du livre :Théories d'or 9e édition, Thierry DELORT, Editions Books on Demand, Paris (2017)

Résumé :

Dans un premier article [5] (Théorie aléatoire des nombres- Partie I : Conjecture de Goldbach), nous avons présenté les bases d'une théorie aléatoire des nombres, permettant de donner une explication basée sur le hasard à de nombreuses propositions qui semblent vraies mais n'ont pas de preuve classique. Nous avons appelé *explications aléatoires* de telles explications rationnelles basées sur le hasard. C'était en particulier le cas pour la Conjecture faible de Goldbach, et pour des propositions décrivant l'aspect général de la Comète de Goldbach.

Dans cet article, nous développons la Théorie Aléatoire des Nombres (TAN), et il apparaît qu'elle donne aussi des explications aléatoires à des propositions concernant les décimales d'irrationnels ou concernant un certain type des sous-ensembles infinis de **N**, les *ensembles estimés*, qui sont des ensembles dont on a une estimation du nombre d'éléments inférieurs à n.

Nous donnons aussi des explications aléatoires aux Conjectures fortes de Goldbach et des Nombres Premiers Jumeaux.

1.INTRODUCTION

Dans un premier article [5] (Théorie aléatoire des nombres- Partie I :Conjecture faible de Goldbach), on a présenté une Théorie Aléatoire des Nombres permettant de donner des explications théoriques mathématiques basées sur le hasard à de nombreuses propositions qui n'ont pas de démonstration dans la Théorie des nombres classiques. On a défini complètement ces explications théoriques mathématiques basées sur le hasard qu'on a appelées *explications aléatoires*. On a vu en particulier que tel était le cas pour la Conjecture faible de Goldbach.

On rappelle que la T.A.N est basée sur l'Axiome du Hasard exprimant l'existence de modèles statistiques non-certains (c'est-à-dire non démontrable classiquement) exprimant des propriétés des nombres. On a vu que cet Axiome

entraînait la nécessité d'introduire une nouvelle logique du hasard utilisant des pseudo-Axiomes aléatoires, qui sont des propositions particulières propres à la TAN, définies dans le premier article [(5)], exprimant notamment la validité de modèles statistiques dans certains cas. Ces pseudo-Axiomes aléatoires sont analogues à des Axiomes classiques. Leur particularité est qu'ils ne sont pas toujours valides : Les modèles statistiques qu'ils permettent d'obtenir peuvent être valides dans un cas et invalides dans un cas complètement analogue. Cependant, tout comme les Axiomes classiques, ils sont simples et on peut les justifier par des arguments intuitifs évidents. Tout comme les Axiomes classique, ils n'ont cependant pas de démonstration.

Dans cet article, on présente de nouvelles applications de la Théorie Aléatoire des Nombres (TAN).

La première application présentée dans ce $2^{\text{ième}}$ article est aussi la plus simple de la TAN . Elle permet d'étudier les propriétés des décimales de nombreux irrationnels. Là encore non seulement on montre que des propositions prévoyant qu'elles ont un nombre infini de répétitions de chiffres ont des explications aléatoires, mais que c'est aussi le cas pour des propositions prévoyant la fréquence d'apparition de ces répétitions de chiffres. Là encore ces *explications aléatoires* (c'est-à-dire donc basées sur le hasard) sont fondamentales puisque ces propositions n'ont pas de démonstration classique.

La deuxième application présentée dans ce $2^{\text{ième}}$ article permet l'étude des *ensembles estimés* c'est-à-dire des sous-ensembles infinis de **N** dont on a une estimation de leur nombre d'éléments inférieurs à n pour n tendant vers l'infini.

Comme troisième applications de la T.A.N, on a donné une explication aléatoire à la Conjecture Forte de Goldbach, donnant une expression de r(k), nombre de paires de nombres premiers dont la somme donne k.

$$r(n) \cong \Pi_2 \left(\prod_{p/n, p\geq 3} \frac{p-1}{p-2} \right) \frac{n}{\ln(n)^2} \quad \text{où } \Pi_2 \approx 0{,}66016$$

Cette expression diffère d'un facteur 2 de l'expression proposée par Hardy et Littlewood [(7)] mais elle est en bien meilleur accord avec la Comète de Godbach obtenue par ordinateur.

On donnera aussi une explication aléatoire à la Conjecture Forte des Nombres Premiers jumeaux qui est exactement l'expression proposée par Hardy et Littlewood.

2.THEORIE (RAPPELS)

A)RAPPELS THEORIE ALEATOIRE DES NOMBRES

On a vu [5] que la TAN permettait d'étudier le hasard dans la Théorie des nombres. Elle était basée sur des *pseudo-Axiomes aléatoires* qui sont des propositions simples introduisant le hasard sous la forme de modèles statistiques, mais qui contrairement aux Axiomes ne sont pas toujours valides. Ceci est dû au fait que les modèles statistiques peuvent être valides dans un cas et non valides dans d'autres cas complètement analogues.

On a dans le premier article [5] défini le concept qu'une proposition P *est modélisée* par un évènement Ev. Dans cette définition, on avait la *propriété de correspondance*. Cette propriété fondamentale exprimait que si on avait une proposition P1 modélisée par un évènement Ev1, et qu'une autre proposition P2 était modélisée par un évènement Ev2, alors on avait Non(P1) était modélisée par l'évènement Ev1, et si Ev1 et Ev2 appartenaient au même espace probabilisable, la proposition « P1 et P2 » était modélisée par l'évènement « Ev1 et Ev2 », et la proposition « P1 ou P2 » était modélisée par l'évènement « Ev1 ou Ev2 ».

Nous avons généralisé cette propriété au cas où on avait une infinité de propositions Pi, i appartenant à un sous-ensemble E de **N**, modélisées par des évènements Evi appartenant au même espace probabilisable, d'Univers infini. Alors la propriété de correspondance généralisée exprimait que la proposition $\cap(Pi)_E$ (qui était par définition équivalente à la proposition « Pour tout i dans E, Pi est vraie ») était modélisée par l'évènement $\cap(Evi)_E$. Et une propriété analogue pour l'union.

Ainsi dans la TAN, le concept « est modélisée par » permet de représenter de façon plus ou moins complète les propriétés statistiques de propositions.

Un deuxième concept fondamental de la TAN était celui de propositions particulières appelées *lois numériques aléatoires*.

DEFINITION 2.A.1 :

Si f(k) est une fonction d' un sous-ensemble F de **N** dans **N**, on appelle *loi numérique aléatoire sur F* la proposition :
« f(k) est modélisée par la variable aléatoire Xf(k) »
Par Définition, cela signifie que pour tout k dans F, f(k) est à valeur dans un sous-ensemble fini F(k) de **R**, que Xf(k) est une variable aléatoire aussi à valeur dans F(k), et que pour tout i_k dans F(k), la proposition « $f(k)=i_k$ » est modélisée par l'évènement « $Xf(k)=i_k$ ».

On a généralisé aussi la propriété de correspondance dans le cas où on avait une loi numérique aléatoire sur un ensemble F infini, et que toutes les variables aléatoires étaient définies sur le même espace probabilisable. Cette propriété de correspondance généralisée exprime qu' avec les hypothèses précédentes, si on a une proposition $P((f(k))_F)$ dont la validité dépend seulement de la suite $(f(k))_F$, (C'est-à-dire que pour tout $(f(k))_F$, $P((f(k))_F$ est vraie ou (exclusif) n'est pas vraie) alors la proposition $P(f(k)_F)$ est modélisée par l'évènement $P((Xf(k))_F)$, lorsque $P(Xf(k))_F)$ est un évènement. On avait montré ceci lorsque F était fini, en utilisant la propriété de correspondance, et on l'avait généralisé dans le cas où F était infini.

On a un pseudo-Axiome aléatoire fondamental, la *pseudo-Axiome du modèle exact*, qu'on utilise toujours pour obtenir qu'une proposition classique a une explication aléatoire :

PSEUDO-AXIOME 2.A.2 (du modèle exact):

Si P est une proposition classique et si on a la loi numérique aléatoire sur un ensemble F={1} :
« t(P)(1) est modélisée par la variable aléatoire Xt(P)(1) »
(t(P) étant classiquement la fonction vérité de P, à valeurs dans {0,1}), et qu'on a de plus $p(Xt(P)(1)=1)\approx 1$, alors lorsque le pseudo-Axiome du modèle exact est valide pour cette loi numérique aléatoire précédente, on a t(P)=1. (Et donc P est vraie).

Dans le précédent article [(5)], les modèles statistiques étaient basées sur des espace probabilisables équiprobables. On a utilisé de tels modèles pour donner des explications aléatoires à la Conjecture de Goldbach ou à des propositions décrivant les propriétés de la Comète de Goldbach. Ces modèles étaient obtenus par le pseudo-Axiome du modèle équiprobable suivant :

PSEUDO-AXIOME 2.A.3 (du modèle équiprobable) :

Si on a une proposition P_k : « x_k est élément de A_k », A_k étant un ensemble fini dont on connaît le nombre d'éléments, sous-ensemble d'un ensemble fini Ω_k dont on connaît aussi le nombre d'éléments, alors lorsque le pseudo-Axiome du modèle équiprobable est valide pour (x_k,A_k,Ω_k), la proposition P_k : « x_k est élément de A_k » est modélisée par l'évènement Ev_k :« $x_{(k)}$ est élément de A_k » de l'espace

probabilisable équiprobable (Ω_k,$P(\Omega_k)$, $p_{eq\Omega k}$), qu'on appellera plus simplement espace équiprobable Ω_k.
La probabilité dans cet espace de Ev_k est donc égale à $Card(A_k)/Card(\Omega_k)$.

En fait le pseudo-Axiome du modèle équiprobable précédent, ainsi comme on le verra les pseudo-Axiomes donnant un modèle statistique aux ensembles estimés, permettent d'obtenir des lois numériques aléatoires, mais dans lesquelles les variables aléatoires ne sont pas définies sur le même espace probabilisable. Or la seule possibilité d'obtenir des résultats intéressants est que ces variables aléatoires non seulement soient définies sur le même espace probabilisable mais aussi soient indépendantes.
On doit donc utiliser un pseudo-Axiome permettant d'obtenir que ces variables aléatoires sont indépendantes, le *pseudo-Axiome des variables indépendantes* ce qui est possible car on a vu que l'application d'un pseudo-Axiome aléatoire n'est pas toujours valide, contrairement à un Axiome, puisque les modèles statistiques qu'il introduit ne sont pas toujours valides.

PSEUDO-AXIOME 2.A.4 (des variables indépendantes) :

Si on a une loi numérique aléatoire sur F « f(k) est modélisée par Xf(k) », alors lorsque le pseudo-Axiome des variables aléatoires est valide pour cette loi, on obtient la loi précédente dans laquelle les variables aléatoires Xf(k) sont définies sur le même espace probabilisable et sont indépendantes.

Si une proposition admet une *explication aléatoire*, c'est-à-dire une explication rationnelle basée sur le hasard obtenue par la TAN, cette explication est différente d'une preuve classique basée sur les Axiomes classiques de la Théorie des Nombres. En effet, elle est basée sur l'existence de certains modèles statistiques, obtenus par des pseudo-Axiomes, qui ne sont pas toujours valides. On définit donc de la façon suivante *une explication aléatoire* :

DEFINITION 2.A.5 :

a) On appelle *pseudo-preuve aléatoire* d'une loi numérique aléatoire ou d'une proposition classique son obtention utilisant certains pseudo-Axiomes de la TAN ainsi que la Théorie classique des nombres et celle des probabilités.

b) On dira qu'une proposition classique a une *explication aléatoire* si elle a une pseudo-preuve aléatoire et que celle-ci est très intéressante, puisqu'elle répond aux critères suivants :

-On n'a jamais pu la démontrer ni sa négation.
-Elle est illustrée par des tests .
-Si des propositions contradictoires P1,..,Pn ont des pseudo-preuves aléatoires, une seule d'entre elles, celle la mieux illustrée par les tests, pourra avoir une explication aléatoire. Si les tests ne peuvent départager, on choisira celle obtenue par le modèle statistique le plus précis.

Les définitions données précédemment n'ont pas la même nature : Si on peut considérer que a) donne une définition mathématique d'une *pseudo-preuve aléatoire*, cela n'est pas le cas de la définition d'une *explication aléatoire* donnée en b). En effet, on utilise l'expression « proposition ayant une explication aléatoire » pour désigner une proposition ayant une pseudo-preuve aléatoire celle-ci étant très intéressante, car elle répond à certains critères. Et donc *explication aléatoire* n'a pas de définition mathématique formelle, contrairement à *pseudo-preuve aléatoire.*

Comme on l'a vu dans l'article [5], c'est pour les propositions illustrées par de nombreux tests (résultats obtenus par des nombres finis d'opérations, éventuellement par un ordinateur) qu'il est le plus intéressant d'obtenir une explication aléatoire. Ceci était notamment le cas pour la Conjecture faible de Goldbach.

B.RAPPELS :THEORIE DES PROBABILITES

On rappelle les éléments basiques mais fondamentaux de la théorie des probabilités :

THEOREME 2.B.1 :

Si $X_1,\ldots,X_n$ sont n variables aléatoires :

$$E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

THEOREME 2.B.2 :
Si $X_1,..,X_n$ sont n variables aléatoires indépendantes , $v(X_i)$ étant la variance de X_i:

$$v(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} v(X_i)$$

DEFINITION 2.B.3 :

Si X est une variable aléatoire avec les 2 évènements « X=1 » et « X=0 » alors X est une loi binomiale.

THEOREME 2.B.4 :

Si X est une loi binomiale de loi p (p(X=1)=p), alors :
E(X)=p et v(X)=p(1-p)

DEFINITION 2.B.5 :

Si$(X_i)_{\mathbf{N}}$ est une suite de variables aléatoires définie sur un espace probabilisable (Ω,*B*,p), alors la suite $(X_i)_{\mathbf{N}}$ *converge en probabilité* vers a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists N(\varepsilon,\delta) / \forall n \geq N(\varepsilon,\delta), p("|X_i - a| \leq \varepsilon") \geq 1-\delta$$

DEFINITION 2.B.6 :

Si $(X_i)_{\mathbf{N}}$ est une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisable (Ω,*B*,p), la suite $(X_i)_{\mathbf{N}}$ converge presque sûrement vers a si « $\lim_{n\to\infty} X_i = a$ » est un évènement de la tribu *B* de probabilité égale à 1.
On écrira aussi ceci :

$$p("\lim_{n\to\infty} X_i = a") = 1$$

Il est aussi intéressant d'introduire la notion de convergence absolue en probabilité.

DEFINITION 2.B.7 :

$(X_i)_{\mathbf{N}}$ étant une suite de variable aléatoire, la suite $(X_i)_{\mathbf{N}}$ converge *absolument en probabilité* vers a (a réel) si :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists N(\varepsilon,\delta) / \forall n \geq N(\varepsilon,\delta), p(\bigcap_{i=N(\varepsilon,\delta)}^{n} "|X_i - a| \leq \varepsilon") \geq 1-\delta$$

On a évidemment que si la suite $(X_i)_{\mathbf{N}}$ converge absolument en probabilité vers a, alors elle converge en probabilité vers a. On montre de plus le Théorème :

THEOREME 2.B.8 :

Si la suite de variables aléatoires $(Y_i)_{\mathbf{N}}$ définie sur un espace probabilisable (Ω,B,p) converge absolument en probabilité vers a, alors elle converge presque sûrement vers a.

(On donne la démonstration de ce Théorème à car il pourrait permettre de démontrer la Loi Forte des Grands Nombres généralisée que nous définirons plus loin).

Démonstration :

On suppose a=1 (si a≠1 on considère Y_i/a).

D'après la définition de la convergence absolue en probabilité :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists N(\varepsilon,\delta) / \forall n > N(\varepsilon,\delta), p(\bigcap_{N(\varepsilon,\delta)}^{n} "|Y_i - 1| \leq \varepsilon") \geq 1-\delta$$

On veut prouver:

$$p("\lim_{n\to\infty} Y_n = 1") = 1$$

où « $\lim_{n\to\infty} Y_n = 1$ » représente l'évènement de Ω pour lequel la suite $(Y_n)_{\mathbf{N}}$ tend vers 1.

Soit δ >0, on définit la suite de naturels N_k par, pour k dans N*:

$N_k=N(1/k,\delta)$.

Ceci signifie:

$$\forall n \geq N_k, p(\bigcap_{i=Nk}^{n} "|Y_i - 1| \leq 1/k") \geq 1-\delta$$

On définit alors les évènements E_k par :

E_k: « $\exists M_k / \forall n \geq M_k, |Y_n - 1| \leq 1/k$ »

Si on considère l'évènement: $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$

Il est évident que :

$$"\lim_{n\to\infty} Y_n = 1" \subset "(Y_n) \in \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k" \text{ et } "(Y_n) \in \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k" \subset "\lim_{n\to\infty} Y_n = 1"$$

Donc les 2 évènements précédents sont identiques.

De plus la suite d'évènements E_k est décroissante donc :

$$p(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k) = \lim_{p\to\infty} p(E_p)$$

De plus, il est évident que:

$$\bigcap_{i=Np}^{\infty} "|Y_i - 1| \leq 1/p" \subset E_p$$

Et donc:

$$p(E_p) \geq p(\bigcap_{i=Np}^{\infty} "|Y_i - 1| \leq 1/p") = \lim_{n\to\infty} p(\bigcap_{i=Np}^{n} "|Y_i - 1| \leq 1/p") \geq 1 - \delta$$

Et donc:

$$p(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k) = \lim_{p\to\infty} p(E_p) \geq 1 - \delta$$

Ceci étant vrai pour tout $\delta>0$:

$$p("\lim_{n\to\infty} Y_n = 1") = p(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k) = 1$$

On utilisera la Loi Faible des Grands Nombres et la Loi Forte des Grands Nombres:

Loi Faible des Grands nombres 2.B.9:

Si on a une suite $(X_i)_{\mathbf{N}}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi, alors la suite

$Y_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{X_i}{n}$ converge simplement vers $\mu=E(X_i)$.(Si μ est fini).

Loi Forte des Grands Nombres 2.B.10 :

Avec les hypothèses et les notations précédentes, la suite $(Y_n)_{\mathbf{N}}$ converge presque sûrement vers μ.

On a vu que la convergence absolue en probabilité entraînait la convergence presque sûre. Il est donc intéressant de considérer la Loi Forte des Grands Nombres 2ième forme :

Loi Forte de Grands Nombres 2ième forme 2.B.11:
Avec les hypothèses et notations précédentes la suite $(Y_n)_{\mathbf{N}}$ converge absolument en probabilité vers μ.

On utilisera aussi l'Inégalité de Chebyshev :

THEOREME 2.B.12 :

Si Y est une variable aléatoire d'espérance μ et de variance σ^2, si ε est un réel strictement positif :

$$p("|Y-\mu| \geq \varepsilon") \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

On rappelle aussi le résultat utilisé dans l'article [5] :

THEOREME 2.B.13 :

Si E est un ensemble à n éléments, E(a) et E(b) étant les ensembles des sous-ensembles de E ayant a et b éléments, si X_I est la variable aléatoire définie sur l'espace équiprobable E(a)×E(b) donnant le nombre d'éléments communs de A et B pour (A,B) dans E(a)×E(b), on a alors :

$$E(X_I) = \frac{ab}{n}$$

3.DECIMALES D'IRRATIONNELS

La TAN permet d'obtenir très simplement de nombreux résultats sur les décimales d'irrationnels dont on peut vérifier la validité en utilisant des ordinateurs mais qui n'ont jamais été prouvés classiquement. Nous allons en proposer 2 exemples :

EXEMPLE 3.1

Montrons comme premier exemple que la proposition :
P :« √3 a dans ses décimales une infinité de fois le nombre 5 » a une pseudo-preuve aléatoire, c'est-à-dire qu'on peut l'obtenir en utilisant les pseudo-Axiomes de la TAN. Cette pseudo-preuve est intéressante, car on n'a jamais montré classiquement cette proposition, mais cette proposition n'a pas d'explication aléatoire, car elle n'est pas illustrée par des tests. La méthode suivante est générale, on aurait pu remplacer √3 par π, √2, Log(5) …et 5 par n'importe quel autre chiffre.

La proposition P admet la pseudo-preuve aléatoire suivante :
On note f(i)la fonction donnant la valeur de la $i^{ième}$ décimale de √3 .
On a donc :
f(i) appartient à A_i={0,1,….,9}.

En appliquant le pseudo-Axiome 2.A.3 du modèle équiprobable, on obtient que la proposition « f(i) est élément de {5} » est modélisé par un évènement de probabilité Card({5})/Card(A_i)=1/10.
Si on pose pour tout i dans **N***, g(i)=t(« f(i)=5 »), c'est-à-dire g(i)=1 si f(i)=5, et g(i)=0 sinon, on obtient la loi numérique aléatoire sur **N***:
« g(i) est modélisée par Xg(i) », avec p(« Xg(i)=1 »)=1/10.

Appliquant le pseudo-Axiome 2.A.4 des variables indépendantes à la loi numérique aléatoire précédente, on peut alors supposer que les Xg(i) sont définies sur le même espace probabilisable et sont indépendantes.
i étant un naturel non nul quelconque, on cherche à modéliser par un évènement la proposition :
Pi : « Il existe au moins un naturel k(i) supérieur ou égal à i tel que la $k(i)^{ème}$ décimale soit égale à 5 ».
Il est évident que Pi est équivalente à :
« Il existe k(i) supérieur ou égal à i tel que g(k(i))=1 ».

On définit alors Fi comme étant le sous-ensemble des suites de $\{0,1\}^{\mathbf{N}^*}$ (suites comportant seulement des 0 et des 1), ayant au moins un terme égal à 1 après le $i^{ème}$ terme (au sens large).
Alors il est évident que Pi est équivalente à :
« $((g(j))_{\mathbf{N}^*}$ est élément de Fi ».

D'après la propriété de correspondance généralisée donnée dans 2.A RAPPELS TAN, Pi est donc modélisée par l'évènement Ev(Pi) : « $((Xg(j))_{\mathbf{N}^*}$ est élément de Fi ».
Or il est évident que l'évènement Non(Ev(Pi)) est l'évènement :
Non(Ev(Pi)) : « Pour tout j supérieur ou égal à i, Xg(j)=0 ».

Or comme les Xg(j) sont indépendantes, la probabilité de Non(Ev(Pi)) est égale à :

$$p(Non(Ev(Pi)) = \prod_{j=1}^{\infty} p("Xg(j) = 0") = \prod_{j=1}^{\infty} (9/10) = 0$$

On a donc p(Non(Ev(Pi)))=0 et p(Ev(Pi))=1.

D'autre part il est évident que la proposition P : « Il existe une infinité de décimales égales à 5 dans les décimales de √(3) » est équivalente à :
« Pour tout i dans **N***, Pi est vrai ».
D'après la propriété de correspondance généralisée donnée dans 2.A RAPPELS TAN, la proposition précédente est modélisée par l'évènement :
« Pour tout i dans **N***, Ev(Pi) »
Or il est évident que pour tout i Ev(Pi+1) entraîne Ev(Pi), c'est-à-dire Ev(Pi+1) est inclus dans Ev(Pi).
On a donc :

$$p(\bigcap_{i=1}^{\infty}(Ev(Pi)) = \lim_{n\to\infty} p(\bigcap_{i=1}^{n} Ev(Pi)) = \lim_{n\to\infty} p(Ev(Pn)) = 1$$

puisqu'on a obtenu p(Ev(Pn))=1 pour tout n.

Donc P est modélisée par un évènement de probabilité 1.
Appliquant alors le pseudo-Axiome 2.A.2 du modèle exact on obtient donc P.
Puisque P n'a jamais été démontrée classiquement (ni sa négation), P a donc une explication aléatoire (Définition 2.A.5).

EXEMPLE 3.2 :

Comme 2ième exemple, on peut montrer qu'une autre proposition, beaucoup plus précise que P, et pouvant être illustrée par de nombreux tests, a une pseudo-preuve aléatoire. Elle a donc une explication aléatoire, puisque de plus on ne l'a jamais montré classiquement ni sa négation.

Cette proposition est la proposition Q :

$$Q : \lim_{n\to\infty} \frac{G(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} g(i)}{n} = 1/10$$

Dans cette expression, G(n) indique le nombre de décimales égales à 5, parmi les n premières décimales.
En effet, les Xg(i) étant indépendantes et de même loi, d'après la Loi Forte des Grands Nombres :

$$p("\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} Xg(i)}{n} = 1/10") = 1$$

De plus d'après la propriété de correspondance généralisée (rappelée dans RAPPELS TAN 2.A) Q est modélisée par l'évènement de l'expression précédente de probabilité égale à 1.
Donc Q est modélisée par un évènement de probabilité 1, et si on applique le pseudo-Axiome 2.A.2 du modèle exact on obtient Q.
Puisque Q n'a jamais été démontrée classiquement, Q a donc une explication aléatoire.
Q serait illustrée par des tests si on calculait G(n)/n pour plusieurs valeurs de n, et qu'on observait que G(n)/n semble tendre vers 1/10.

La loi numérique aléatoire :
« g(i) est modélisée par Xg(i) »
où les Xg(i) sont indépendantes et définies plus haut, pourrait être un exemple de loi numérique aléatoire exacte. Pour vérifier ceci il faudrait réaliser des tests statistiques.

4.ENSEMBLES ESTIMES

Le but de cette partie est d'étudier par la TAN les propriétés des *ensembles estimés*, c'est à dire des sous-ensembles de **N** dont on connaît une estimation de leur nombre d'éléments inférieurs à n. On verra que comme dans le domaine précédemment exposé de la TAN, la TAN permet de donner des explications aléatoires à de très nombreuses propositions qui n'ont jamais été prouvées classiquement.

4.A THEORIE

On utilisera la Loi Faible des Grands Nombres Généralisée :

Loi Faible des Grands Nombres Généralisée 4.A.1 (LfGN généralisée):
Si on a une suite $(X_i)_\mathbf{N}$ de lois binomiales indépendantes avec $p(X_i=1)=p(i)$ et que la série $\Sigma p(i)$ diverge, alors, si on définit la suite $(Y_n)_\mathbf{N}$ de variables aléatoire par :

$$Y_n = \frac{\sum_{i=0}^{n} X_i}{\sum_{i=0}^{n} p(i)}$$

, la suite $(Y_n)_\mathbf{N}$ converge en probabilité vers 1.

Démonstration :

La démonstration généralise la démonstration de la Loi Faible des Grands Nombres classiques.
On pose $S_n=X_0+\ldots+X_n$
D'après l'hypothèse, X_i est une loi binomiale associée à p(i). En utilisant les rappels 2.B, l'Espérance μ_i et la variance σ_i^2 de X_i sont :
$v(X_i)=\sigma_i^2=p(i)(1-p(i))$ et $\mu_i=p(i)$

$$E(S_n)=\sum_{i=0}^{n} E(X_i)=\sum_{i=0}^{n} p(i)$$

et donc $E(Y_n)=1$.

De plus, les lois X_i étant indépendantes :

$$v(Y_n)=v\left(\frac{S_n}{E(S_n)}\right)=\frac{v(S_n)}{(E(S_n))^2}=\frac{\sum_{i=0}^{n}\sigma_i^2}{\left(\sum_{i=0}^{n}\mu_i\right)^2}$$

Si on applique l'inégalité de Chebyshev :

$$p("|Y_n-1|\geq\varepsilon")\leq\frac{v(Y_n)}{\varepsilon^2}$$

mais on a :

$$\sum_{i=0}^{n}\sigma_i^2=\sum_{i=0}^{n}p(i)(1-p(i))\leq\sum_{i=0}^{n}p(i)=\sum_{i=0}^{n}\mu_i$$

et donc :

$$\frac{v(Y_n)}{\varepsilon^2}\leq\frac{1}{\varepsilon^2\sum_{i=0}^{n}\mu_i}$$

Mais par hypothèse $\Sigma\mu_i=\Sigma p(i)$ est divergeant, il en résulte que $v(Y_n)/\varepsilon^2$ tend vers 0 pour n tend vers l'infini et donc $(Y_n)_{\mathbf{N}}$ converge en probabilité vers 1.

On admettra que de la même façon, on peut généraliser la Loi Forte des Grands nombres $1^{\text{ière}}$ et $2^{\text{ième}}$ forme pour obtenir les 2 lois :

Loi Forte des Grands Nombres Généralisée 4.A.2(LFGN généralisée):

Avec les notations et les hypothèses de la Loi Faible des Grands nombres généralisée, la suite $(Y_n)_{\mathbf{N}}$ converge presque sûrement vers 1.

REMARQUE 4.A.2.a)

Même si cette loi n'était valable que pour p(i) suite monotone, cela suffirait pour tous les exemples classiques de la TAN des ensembles estimés, notamment tous ceux présentés dans cet article.

En fait, si on a pour n assez grand $\sum_{i=1}^{n} p(i) > an$, a étant une constante strictement positive, la Loi Forte des Grands Nombres Généralisée (LFGN généralisée) est une conséquence immédiate de la LFGN de Khintchine [(6)], dont on rappelle la formulation :

Si $(X_i)_{\mathbf{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, X_i étant d'espérance m_i et les variances étant uniformément bornées ($\sigma_i^2<c$ pour tout i), alors $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m_i)$ converge presque sûrement vers 0.

Cependant dans le cas général où p(i) tend vers 0, ce qui est le cas dans la plupart des Exemples donnés dans cet article, on ne peut pas généraliser la LFGN de Khintchine pour obtenir la LFGN généralisée.

Loi Forte des Grands Nombres Généralisée 2ième forme 4.A.3:
Avec les notations et hypothèses précédentes, la suite $(Y_n)_{\mathbf{N}}$ converge absolument en probabilité vers 1.

On rappelle qu'on a prouvé dans le Théorème 2.B.8 que la Loi Forte des Grands Nombres généralisée 2ième forme entraînait la Loi Forte des Grands Nombres Généralisée.
Ce qui précède va permettre par la TAN l'étude des ensembles estimés correspondant à la définition suivante :

DEFINITION 4.A.4: (*Ensembles estimés*)

On appelle *ensemble estimé d'estimation* a(n) un sous-ensemble infini A de **N** tel que, si A(n)={i/ i≤n et i appartient à A}, on ait :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{Card(A(n))}{a(n)}=1$$

Soit A un ensemble estimé d'estimation a(n). On cherche à modéliser la fonction caractéristique de A $f_A(i)$, i étant un naturel assez grand, c'est-à-dire supérieur à un naturel N_A. Le plus simple modèle statistique de $f_A(i)$ est celui défini par le *pseudo-Axiome du modèle des ensembles estimés* suivant, que nous allons justifier par des arguments intuitifs.

PSEUDO-AXIOME 4.A.5 (du modèle des ensembles estimés) :

Si A est un ensemble estimé d'estimation a(n) avec a(n) croissante, alors :

a)Lorsque le *pseudo-Axiome du modèle des ensembles estimés* est valide pour $(A,a(n),N_A)$, s'il existe un naturel N_A tel que pour tout i supérieur ou égal à N_A, « $f_A(i)=1$ » est modélisée par l'évènement « $x_{iA}=1$ » de l'espace probabilisable d'Univers $\Omega_{iA}=\{0,1\}$, avec p(« $x_{iA}=1$ »)=p_{iA}=a(i)-a(i-1).

On verra dans la première justification intuitive de ce pseudo-Axiome aléatoire que pour que le modèle soit meilleur, il faut que pour n supérieur ou égal à 1, a(n) soit une bonne approximation de Card(A(n)) . On pourra donc choisir une valeur de N_A tel que ce soit le cas, par exemple choisir N_A tel que pour n supérieur à N_A, 0,9<Card(A(n))/a(n)<1,1.

On voit donc que dans l'application du pseudo-Axiome précédent, on peut choisir ou non la valeur de N_A.

En fait, on verra qu'en général, notamment dans la 2ième justification intuitive, que les propositions obtenues utilisant le modèle statistique de ce pseudo-Axiome ne dépendent que du comportement à l'infini de p_{iA}=a(i)-a(i-1). Il en résulte qu'on peut alors les obtenir en choisissant n'importe quelle valeur de N_A (choisie assez grande, puisqu'on sait que plus N_A est grand meilleur est le modèle). On peut donc restreindre ou non le choix de N_A, dans l'application du pseudo-Axiome précédent pour $(A,a(n),N_A)$.

Choisir une valeur de N_A permet d'obtenir des propositions illustrées par des tests qui ne le seraient pas si N_A était inconnu.

1^{ière} justification intuitive :
i étant un naturel assez grand, on sait qu'une estimation du nombre de naturels appartenant à A strictement inférieurs à i est a(i-1), et qu'une estimation du nombre de naturels inférieurs ou égaux à i appartenant à A est a(i). Il s'ensuit qu'on peut

approximer la probabilité que i appartienne à A par p_{iA} = a(i)-a(i-1). (Cette approximation est à priori d'autant meilleure que l'estimation a(n) de Card(A(n)) est précise).
Ceci signifie que pour i assez grand, « $f_A(i)=1$ » est modélisée presqu'exactement par un évènement de probabilité p_{iA}. D'après la définition de « est modélisée », on peut donc considérer que pour i assez grand, « $f_A(i)=1$ » est modélisée par un évènement de probabilité p_{iA}. Ceci justifie donc intuitivement la validité dans certains cas du pseudo-Axiome du modèle des ensembles estimés.

2ième justification intuitive :

Supposons qu'on ait un sous-ensemble A de **N** dont la fonction caractéristique soit modélisée comme le modèle du a) du pseudo-Axiome du modèle des ensembles estimés.
C'est-à-dire qu'on ait un naturel N_A et une fonction a(n) croissante telle que pour i supérieur ou égal à N_A, $f_A(i)$ soit modélisée par un évènement de probabilité p_{iA}=a(i)-a(i-1).

Si on définit la variable aléatoire X_{iA} sur l'espace probabilisable du a) d'Univers Ω_{iA} par : $X_{iA}=x_{iA}$, alors on obtient la loi numérique aléatoire :
« Pour i supérieur à N_A, $f_A(i)$ est modélisée par la variable aléatoire X_{iA} ».
Si on applique alors le pseudo-Axiome des variables indépendantes, on obtient la loi précédente avec des X_{iA} variables indépendantes.
Appliquant alors la Loi Forte des Grands Nombres Généralisée 4.A.2, on obtient :

$$p("\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=NA}^{n} X_{iA}}{\sum_{i=NA}^{n} p_{iA}} = 1") = 1$$

Il en résulte que d'après la propriété de correspondance généralisée, la proposition :

$$"\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=NA}^{n} f_A(i)}{\sum_{i=NA}^{n} p_{iA}} = 1"$$, est modélisée par un évènement de probabilité 1.

En appliquant le pseudo-Axiome du modèle exact, on obtient donc que cette proposition est vraie. Or il est évident que cette proposition est équivalente à « A est un ensemble d'estimation a(n) ». (Car dans l' expression numérique précédente, $\Sigma p_{iA}=a(n)-a(N_A-1)$)
On voit donc que le modèle statistique défini dans le pseudo-Axiome a), permet d'obtenir que la proposition « A est un ensemble estimé d'estimation a(n) » a une explication aléatoire.
Il apparaît donc que le modèle statistique proposé est le meilleur modèle statistique pour modéliser un ensemble estimé d'estimation a(n).
On voit dans cet exemple, comme dans la Remarque suivant le pseudo-Axiome, que la proposition obtenue dans la 2ième justification est indépendante du choix de N_A.

Le pseudo-Axiome précédent du modèle des ensembles estimés introduit la Définition suivante :

DEFINITION 4.A.6 (évaluation probabiliste) :

Si A est un sous-ensemble de **N** (fini ou non), tel qu'il existe un naturel N_A tel que l'on ait la loi numérique aléatoire, f_A étant la fonction caractéristique de A :
« Pour i supérieur à N_A, $f_A(i)$ est modélisée par la variable aléatoire X_{iA} »
Avec $p(X_{iA}=1)=p_{iA}$,
On dira alors que A est un ensemble *d'évaluation probabiliste* p_{iA}, pour i supérieur à N_A.

De plus dans la 2ième justification intuitive du pseudo-Axiome du modèle des ensembles estimés, on a établi un résultat fondamental, exprimé dans le Théorème suivant :

THEOREME 4.A.7:

Si A est un ensemble ayant une évaluation probabiliste p_{iA}, pour i supérieur à N_A, et que Σp_{iA} diverge, alors la proposition :
« A est un ensemble estimé d'estimation $a(n)=\sum_{i=NA}^{n} p_{iA}$ » a une pseudo-preuve aléatoire.

On a vu que pour obtenir ce Théorème 4.A.7 on utilisait la LFGN généralisée 4.A.2.

Comme on l'a vu cependant la LFGN généralisée 4.A.2 de même que sa variante 4.A.3 ne se démontrent pas aussi facilement que la LFGN (qui n'était déjà pas évidente). Or, en utilisant seulement la Loi faible des Grands Nombres généralisée 4.A.1 que l'on a démontrée, on peut obtenir aussi une évaluation de la fonction $S(n)=\Sigma_{[NA,n]} f_A(i)$.

En effet, on rappelle l'étude théorique d'une fonction par la TAN, donnée dans l'article [(5)] (Chapître 3.3) :

ETUDE THEORIQUE D'UNE FONCTION PAR LA TAN 4.A.7a)

On ne considèrera que 2 cas :

Dans le premier cas, on obtient par la TAN en utilisant un modèle statistique M1 une fonction F(k), telle que la proposition suivante P1 a une pseudo-preuve aléatoire :

P1 : « $\lim_{k\to\infty}(\frac{f(k)}{F(k)})=1$ » .

Dans le 2ième cas, on obtient par la TAN, en utilisant un modèle statistique M2 une fonction F(k), deux fonctions $\varepsilon_1(k)$ et $\varepsilon_2(k)$ positives et tendant vers 0 telle que, posant $I(k)=[1-\varepsilon_1(k),1+\varepsilon_2(k)]$, une proposition du type de la proposition suivante P2 a une pseudo-preuve aléatoire :

P2 : « Il existe un naturel N tel que pour tout n supérieur à N :
$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\times t("\frac{f(i)}{F(i)}\in I(i)")\geq p$ (En général on ne connaît pas explicitement F(n), mais on a F(n) équivalente à une fonction $F_A(n)$ connue)»

Dans la proposition précédente, p est un rationnel proche de 1 (p=0.98 par exemple). On a supposé que f(k) était définie sur **N**. Dans le cas général f(k) est définie sur un sous-ensemble infini A de **N**, (Par exemple A est l'ensemble des naturels supérieurs à un naturel N_A) et la sommation ne porte que sur les éléments de A. On divise alors par le nombre d'éléments de A inférieurs à n. P2 exprime qu'il existe un naturel N tel que pour tout n supérieur à N la proportion des naturels k appartenant à A et inférieurs à n tels que f(k)/F(k) appartiennent à I(k) est supérieure à p.

On voit que les tests statistiques illustrant P1 sont très proches des tests statistiques illustrant P2. Pour voir si P1 ou P2 sont illustrées par des tests, on trace

les points (k,f(k)/F(k)) (ou (k,f(k)/F_A(k))pour k aussi grand que possible. Si il apparaît que ces points (pour P1), ou un pourcentage proche de 1 de ces points (pour P2) tendent vers la droite d'équation y=1, alors P1 ou P2 sont illustrées par les tests. Dans certains cas, P1 ou P2 tout en étant vraies ne sont pas illustrées par les tests. C'est le cas quand on ne peut pas réaliser les tests (C'est-à-dire calculer f(k)/F(k) ou f(k)/F_A(k)) pour k assez grand), à cause de limites comme la puissance maximale des ordinateurs.

Cependant, P1 et P2 ne sont vraies que dans certains cas où les modèles M1 ou M2 permettant d'obtenir P1 ou P2 sont valides avec une très bonne approximation. Un cas beaucoup plus général est le cas où M1 et M2, tout en étant valides avec une bonne approximation, ne le sont pas avec une qualité suffisante pour que les propositions du type P1 ou P2 qu'ils entraînent soient vraies. On remarque que toute proposition Q1 ou Q2 entraînée par P1 ou P2 a une pseudo-preuve aléatoire d'après la Définition 2.10. Cependant, pour que de telles propositions Q1 ou Q2 soient intéressantes, il faut d'une part qu'elles soient illustrées par des tests, mais aussi qu'elles illustrent la validité avec la meilleure qualité possible des modèles statistiques M1 ou M2 permettant d'obtenir P1 ou P2.

Ainsi, dans le premier cas on considèrera que seules les propositions du type Q1 (c'est-à-dire entraînée par P1 et donc ayant une pseudo-preuve aléatoire) sont intéressantes :

Q1 : « Il existe 2 réels strictement positifs α et β et un naturel N tel que pour tout n supérieur à N, f(n)/F(n) appartienne à $[\alpha,\beta]$ »
C'est une telle proposition qu'on avait obtenue dans le 1ier article [(5)] permettant d'obtenir les propriétés générales de la Comète de Goldbach.

Dans le 2ième cas on considèrera que seules les propositions du type Q2 (C'est-à-dire entraînée par P2 et ayant une pseudo-preuve aléatoire) suivantes sont intéressantes :

Q2 : « Il existe 2 réels strictement positifs α et β, et il existe un naturel N tel que pour tout n supérieur à N :

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\times t\left("\frac{f(i)}{F_A(i)}\in[\alpha,\beta]"\right)\geq p-0.01$$

On voit que là encore, les tests statistiques illustrant Q1 sont très proches des tests statistiques illustrant Q2. Si on obtient que de telles propositions du type Q1 ou Q2 précédent sont illustrées par des tests on peut s'attendre à ce qu'en

améliorant le modèle statistique permettant de les obtenir, on puisse obtenir des propositions beaucoup plus précises du type P1 ou P2 pour estimer la fonction f(k). Cela sera le cas dans l'étude de la fonction r(k), introduite dans le 1ier article (5), donnant le nombre de paires de nombres premiers dont la somme donne k.

On remarque aussi que si dans P2, on prend p=1, alors on obtient P1. En utilsant cette remarque et un pseudo-Axiome très simple (défini plus loin, pseudo-Axiome « de la limite »), on montrera qu'en général, si P2 a une pseudo-preuve aléatoire alors P1 aussi.

REMARQUE 4.A.7b) :

On suppose donc qu'un ensemble A a une évaluation probabiliste p_{iA} pour i supérieur à N_A, et que Σp_{iA} diverge.

On peut, utilisant seulement la Loi faible des Grands Nombres généralisée 4.A.1 qu'on a démontrée, obtenir une estimation de la fonction S(n) du type de celles présentées dans la section précédente P2. On rappelle :

$$S(n)=\sum_{i=NA}^{n} f_A(i)$$

Appliquant le pseudo-Axiome 2.A.4 des variable indépendantes, on obtient que pour i supérieur à N_A, $f_A(i)$ est modélisée par la variable aléatoire binaire $Xf_A(i)$, avec p(« $Xf_A(i)=1$ »)=p_{iA} et les $Xf_A(i)$ sont indépendantes.

Procédant alors comme dans la démonstration de la Loi faible des Grands Nombres généralisée 4.A.1, on obtient pour tout n supérieur à N_A:

$$p("(\frac{1}{\sum_{i=NA}^{n} p_{iA}} \times \sum_{i=NA}^{n} Xf_A(i) - 1) \geq \varepsilon") \leq \frac{1}{\varepsilon^2 \sum_{i=NA}^{n} p_{iA}}$$

On définit alors pour n supérieur à N_A la fonction ε(n) :

$$\frac{1}{\varepsilon(n)^2 \sum_{i=NA}^{n} p_{iA}} = 0.01$$

On remarque que ε(n) est une fonction positive tendant vers 0.

Alors, posant I(n)=[1-ε(n),1+ε(n)], la définition précédente de ε(n) entraîne :

$$p(" \frac{\sum_{i=NA}^{n} Xf_A(i)}{\sum_{i=NA}^{n} p_{iA}} \in I(n)") \geq 1-0.01=0.99$$

C'est-à-dire, d'après la définition de S(n) :

$$p(" \frac{XS(n)}{\sum_{i=NA}^{n} p_{iA}} \in I(n)") \geq 0.99$$

Appliquant alors le pseudo-Axiome des variables indépendantes aux variables aléatoires XS(n), on peut supposer qu'elles sont indépendantes.

Définissant alors la variable aléatoire Y(n) :

$$Y(n)=t(" \frac{XS(n)}{\sum_{i=NA}^{n} p_{iA}} \in I(n)")$$

On rappelle la Loi Forte des Grands Nombres de Khintchine [(6)] :

Si $(X_i)_N$ sont des variables aléatoires indépendantes, X_i ayant une espérance m_i et une variance σ_i^2, les variances étant uniformément variées (σ_i^2<c pour tout i), alors $\left|\frac{1}{n}\times\sum_{i=1}^{n}(X_i-m_i)\right|$ converge presque sûrement vers 0 (La probabilité de l'évènement « $\left|\frac{1}{n}\times\sum_{i=1}^{n}(X_i-m_i)\right|$ tend vers 0 » est égale à 1.

Appliquant la Loi de Khintchine précédente, on obtient que la probabilité de l'évènement suivant Ev(Y) est égale à 1 :

Ev(Y) : « Il existe un naturel N tel que pour n>N :

$$\frac{1}{n-N_A+1}\sum_{i=NA}^{n} Y(n) \geq 0,98$$

Et donc, appliquant la propriété de corresondance, remplaçant dans l'expression précédente XS(n) par S(n), et appliquant le pseud-Axiome du modèle exact 2.A.2, on obtient que la proposition suivante P2(S(n)) a une pseudo-preuve aléatoire :

P2(S(n)) : Il existe un naturel N tel que pour tout n > N :

$$\frac{1}{n-N_A+1}\times\sum_{i=NA}^{n} t(\text{"}\frac{S(n)}{\sum_{i=NA}^{n} p_{iA}}\in I(n)\text{"})\geq 0.98$$

On est donc dans le 2ième cas de l'Etude théorique d'une fonction par la TAN 4A.7a). On remarque qu'on aurait pu dans P2(S(n)) remplacer 0,98 par n'importe quel réel p<1.

On voit cependant que la Loi Forte des Grands Nombres généralisée permet d'obtenir plus simplement le Théorème 4A.7, et permet d'obtenir la proposition suivante P1(S(n)) (Correspondant au premier cas de l'Etude théorique 4.A.7a)), qui est clairement plus intéressante car plus précise que la proposition précédente P2(S(n)) :

P1(S(n)) : « $\lim_{n\to\infty}(\frac{S(n)}{\sum_{i=NA}^{n} p_{iA}})=1$

Si A et B sont 2 ensembles estimés d'estimation a(n) et b(n), on cherche à obtenir une évaluation probabiliste de A∩B , ce qui permettra soit d'obtenir que la proposition « A∩B est un ensemble estimé d'estimation i(n) (que l'on va déterminera) », soit la proposition « A∩B est fini. » ont une pseudo-preuve aléatoire.

Pour obtenir un tel modèle statistique de A∩B, on doit tout d'abord appliquer la pseudo-Axiome du modèle des ensembles estimés à A et à B, pour obtenir une évaluation probabiliste de A et de B. Puis, obtenant que A et B on une évaluation probabiliste p_{iA} (avec i supérieur à N_A) et p_{iB} (avec i supérieur à N_B), on applique le pseudo-Axiome de l'*intersection des ensembles estimés suivant*, permettant d'obtenir une évaluation probabiliste de A∩B :

PSEUDO-AXIOME 4.A.8 (de l'intersection des ensembles estimés-1[ière] forme) :

Si A et B sont 2 ensembles d' évaluation probabiliste p_{iA} et p_{iB}, avec respectivement i supérieur (au sens large) à N_A et i supérieur à N_B, alors lorsque le pseudo-Axiome de l'intersection des ensembles estimés 1[ière] forme est valide pour (A,B,I) ,(avec $I=A\cap B$), I est un ensemble d'estimation probabiliste $p_{iI}=p_{iA}p_{iB}$, pour i supérieur à $N_I=\sup(N_A,N_B)$.

(On peut considérer que la proposition précédente n'est pas un pseudo-Axiome aléatoire, mais une proposition ayant une pseudo-preuve aléatoire. En effet on l'obtient immédiatement en appliquant le pseudo-axiome 2.A.4 des variables indépendantes.)

Nous allons donner 2 justifications intuitives à ce pseudo-Axiome :
On doit donc justifier qu'avec les hypothèses précédentes pour A et B, « $f_I(i)=1$ » est modélisée par un évènement de probabilité $p_{iI}=p_{iA}p_{iB}$, pour i supérieur à $N_I=\sup(N_A,N_B)$.

1[ière] justification intuitive :
Cette première justification est basée sur le modèle équiprobable, introduit par le pseudo-Axiome du modèle équiprobable 2.A.3. On rappelle que le premier article [(5)] était basé sur ce modèle équiprobable.
Supposons qu'on ait un ensemble $E=\{1,\ldots.,n\}$.
Soient A et B deux sous-ensembles de E, pour lesquels on connaisse le nombre d'éléments a et b.
D'après le pseudo-Axiome du modèle équiprobable appliqué à (i,A,E), i étant un élément de E, si on ignore si « i est élément de A » est vrai ou faux, alors la proposition « i est élément de A » est modélisée par un évènement de probabilité $p_{iA}=a/n$.
De même, appliquant le pseudo-Axiome précédent à (i,B,E), on obtient que la proposition « i est élément de B » est modélisée par un évènement de probabilité $p_{iB}=b/n$.
f_A et f_B étant les fonctions caractéristiques de A et B, on a donc pour tout i dans E:
« $f_A(i)=1$ » est modélisée par un évènement de probabilité $p_{iA}=a/n$, et
« $f_B(i) =1$ » est modélisée par un évènement de probabilité $p_{iB}=b/n$.
Les 2 modèlisations précédentes sont donc analogues aux hypothèses du pseudo-Axiome, remplaçant E par l'ensemble des naturels supérieurs à $N_I=\sup (N_A,N_B)$, et prenant $p_{iA}=a/n$ et $p_{iB}=b/n$.

Considérons maintenant l'ensemble :
Ω_{AB} ={(A',B'), A' et B' sous-ensembles de E ayant respectivement a et b éléments}.
i étant un élément de E, on définit l'ensemble :
$I_{AB}(i)$={(A',B') appartenant à Ω_{AB}, avec i appartient à A' et B'}
Si on applique alors le pseudo-Axiome du modèle équiprobable à ((A,B),$I_{AB}(i)$,Ω_{AB}), on obtient que « (A,B) est élément de $I_{AB}(i)$ » est modélisée par l'évènement « (A',B') est élément de $I_{AB}(i)$ » de l'espace équiprobable Ω_{AB}.
Remarquant que la proposition « (A,B) est élément de $I_{AB}(i)$ » est équivalente à la proposition « i est élément de I (avec $I=A\cap B$) », et qu'on obtient que $Card(I_{AB}(i))/Card(\Omega_{AB})=ab/n^2=p_{iA}p_{iB}$, on obtient :
« $f_I(i)$ =1 » est modélisée par un évènement de probabilité $p_{iI}=p_{iA}p_{iB}$, pour i appartenant à E.
Ceci constitue donc une première justification intuitive du pseudo-Axiome.

2[ième] justification intuitive :
On suppose que A et B sont 2 ensembles quelconques parmi tous les ensembles d'évaluation probabiliste p_{iA} et p_{iB} avec respectivement i supérieur à N_A et i supérieur à N_B.
On a donc, pour i supérieur à $sup(N_A,N_B)$, « $f_A(i)=1$ » est modélisée par un évènement $Ev_A(i)$ de probabilité p_{iA} et « $f_B(i)=1$ » est modélisée par un évènement $Ev_B(i)$ de probabilité p_{iB}.
Puisque A et B sont quelconques d'évaluation probabiliste p_{iA} et p_{iB}, il est évident que, i étant supérieur à $N_I=sup(N_A,N_B)$, la proposition « $f_A(i)=1$ » (qui est équivalente à « i est élément de A ») est totalement indépendante de la proposition « $f_B(i)=1$ » (qui est équivalente à « i est élément de B »).
Or on peut admettre intuitivement que si on a les modélisations :
« La proposition P1 est modélisée par l'évènement Ev1 » et « La proposition P2 est modélisée par l'évènement Ev2 », alors si P1 et P2 sont complètement indépendantes, on peut considérer que Ev1 et Ev2 appartiennent au même espace probabilisable et sont indépendants.

On obtient donc qu'on peut considérer que $Ev_A(i)$ et $Ev_B(i)$ appartiennent au même espace probabilisable et sont indépendants.
Donc « $f_I(i)=1$ » (qui est équivalent à la proposition « $f_A(i)=1$ » et « $f_B(i)=1$ ») est modélisée par un évènement $Ev_I(i)$ de probabilité $p_{iA}p_{iB}$, pour i supérieur à $N_I=sup(N_A,N_B)$.

Souvent, on ne peut pas considérer que A et B sont 2 ensembles quelconques d'estimation a(n) et b(n), car on sait qu'ils appartiennent tous les 2 à un ensemble estimé C d'estimation c(n), avec a(n),b(n),c(n) connues.
On peut alors obtenir un modèle statistique bien meilleur qu'en appliquant le pseudo-Axiome précédent de l'intersection des ensembles estimés 1ière forme.
On emploie en effet alors le pseudo-Axiome de l'intersection des ensembles estimés 2ième forme suivant :

PSEUDO-AXIOME 4.A.9 (de l'intersection des ensembles estimés 2ième forme) :

Si A,B,C sont des ensembles tels que A et B sont inclus dans C, A,B,C ayant respectivement des évaluations probabilistes p_{iA},p_{iB},p_{iC}, pour i respectivement supérieur à N_A,N_B,N_C, alors, lorsque le pseudo-Axiome 4.A.9 de l'intersection des ensembles estimés 2ième forme est valide pour (A,B,C,I) (avec $I=A\cap B$), I est un ensemble d'évaluation probabiliste $p_{iI}=p_{iA}p_{iB}/p_{iC}$., pour i supérieur à $N_I=\sup(N_A,N_B,N_C)$.

Nous allons donner 2 justifications intuitives à la 2ième forme de ce pseudo-Axiome qui sont analogues et généralisent celles de la 1ière forme.
On doit donc justifier qu'avec les hypothèses précédentes pour A,B et C « $f_I(i)=1$ » est modélisée par un évènement de probabilité $p_{iI}=p_{iA}p_{iB}/p_{iC}$ pour i supérieur à $\sup(N_A,N_B,N_C)$.

1ière justification intuitive :

Cette première justification est aussi basée sur le modèle équiprobable, introduit par le pseudo-Axiome du modèle équiprobable 2.A.3.
Supposons qu'on ait toujours un ensemble E={1,….,n}.
Soient A,B,C trois sous-ensembles de E, pour lesquels on connaisse le nombre d'éléments a,b et c, et tels que A et B soient inclus dans C.
D'après le pseudo-Axiome du modèle équiprobable appliqué à (i,A,E), i étant un élément de E, si on ignore si « i est élément de A » est vrai ou faux, alors la proposition « i est élément de A » est modélisée par un évènement de probabilité $p_{iA}=a/n$.
De même, appliquant le pseudo-Axiome précédent à (i,B,E), on obtient que la proposition « i est élément de B » est modélisée par un évènement de probabilité $p_{iB}=b/n$.
De même, « i est élément de C » est modélisée par un évènement de probabilité $p_{iC}=c/n$.

f_A ,f_B et f_C étant les fonctions caractéristiques de A, B et C, on a donc pour tout i dans E:
-« $f_A(i)=1$ » est modélisée par un évènement de probabilité $p_{iA}=a/n$.
-« $f_B(i) =1$ » est modélisée par un évènement de probabilité $p_{iB}=b/n$.
-« $f_C(i)=1$ » est modélisée par un évènement de probabilité $p_{iC}=c/n$.
Les modélisations précédentes, ainsi que la proposition « A et B sont inclus dans C » sont donc analogues aux hypothèses du pseudo-Axiome, en remplaçant E par l'ensemble des naturels supérieurs à $\sup(N_A,N_B,N_C)$.

Considérons maintenant l'ensemble :
Ω_{ABC} ={(A',B',C'), A',B' et C' sous-ensembles de E ayant respectivement a, b et c éléments, avec A' et B' sont inclus dans C'}.
i étant un élément de E, on définit l'ensemble :
$I_{ABC}(i)$={(A',B',C') appartenant à Ω_{ABC}, avec i appartient à A' et B'(et donc à C')}
Si on applique alors le pseudo-Axiome du modèle équiprobable à ((A,B,C),$I_{ABC}(i)$,Ω_{ABC}), on obtient que « (A,B,C) est élément de $I_{ABC}(i)$ » est modélisée par l'évènement « (A',B',C') est élément de $I_{ABC}(i)$ » de l'espace équiprobable Ω_{ABC}.
Remarquant que la proposition « (A,B,C) est élément de $I_{ABC}(i)$ » est équivalente à la proposition « i est élément de I (avec $I=A\cap B$) », et qu'on obtient (par récurrence) que $\mathrm{Card}(I_{ABC}(i))/\mathrm{Card}(\Omega_{ABC})=ab/nc=p_{iA}p_{iB},/p_{iC}$ on obtient que pour i dans E :
« $f_I(i) =1$ » est modélisée par un évènement de probabilité $p_{iI}=p_{iA}p_{iB}/p_{iC}$.
Ceci constitue une 1ière justification intuitive de la 2ième forme du pseudo-Axiome considéré.

2ième justification intuitive :

On considère que (A,B,C) est un triplet quelconque parmi tous les triplets (A',B',C') tels que A', B',C' ont des évaluations probabilistes p_{iA},p_{iB},p_{iC}, pour i respectivement supérieur à N_A,N_B,N_C, et tels que A'et B' soient inclus dans C'.
On a donc, pour i supérieur à $N_I=\sup(N_A,N_B,N_C)$, « $f_A(i)=1$ » est modélisée par un évènement $Ev_A(i)$ de probabilité p_{iA} ,« $f_B(i)=1$ » est modélisée par un évènement $Ev_B(i)$ de probabilité p_{iB} , et « $f_C(i)=1$ » est modélisée par un évènement $Ev_C(i)$ de probabilité p_{iC}.

On ne peut plus considérer que la proposition « i est élément de A » est indépendante de la proposition « i est élément de B », puisque A et B sont tous 2 inclus dans C. Cependant, il est clair que la proposition « i est élément de A »

entraîne « i est élément de C », et de même pour la proposition « i est élément de B ».
Or il est logique intuitivement, si on a 2 modélisations « La proposition P1 est modélisée par l'évènement Ev1 » et « La proposition P2 est modélisée par l'évènement Ev2 », et que la proposition P1 entraîne la proposition P2, de considérer que Ev1 entraîne Ev2, c'est-à-dire que Ev1 et Ev2 appartiennent au même espace probabilisable et que Ev1 est inclus dans Ev2.
On peut donc considérer d'après ce qui précède, pour i supérieur à N_I, $Ev_A(i)$,$Ev_B(i)$ et $Ev_C(i)$ appartiennent au même espace probabilisable et $Ev_A(i)$ et $Ev_B(i)$ sont inclus dans $Ev_C(i)$.

De plus, généralisant le propriété de correspondance (utilisée pour définir le concept « *est modélisée* par »), on peut considérer que la proposition « « i est élément de A » sachant « i est élément de C » » est modélisée par l'évènement « $Ev_A(i)$ sachant $Ev_C(i)$ » (noté conventionnellement $Ev_A(i)/Ev_C(i)$).
De même, la proposition « « i est élément de B » sachant « i est élément de C » » est modélisée par l'évènement $Ev_B(i)/Ev_C(i)$.
Or, C étant un ensemble d'évaluation probabiliste p_{iC} (i supérieur à N_C)quelconque, on peut considérer que A et B sont 2 sous-ensembles quelconques de C, d'évaluation probabiliste p_{iA} et p_{iB} (pour i supérieur à N_A et N_B).
On peut donc considérer que sachant « i est élément de C », alors la proposition « i est élément de A » est indépendante de la proposition « i est élément de B ».
Ceci s'écrit aussi:
La proposition « « i est élément de A » sachant « i est élément de C » » est indépendante de la proposition « « i est élément de B » sachant « i est élément de C » »
En appliquant la même remarque que pour la 2ième justification intuitive de la première forme du pseudo-Axiome, on obtient que l'évènement $Ev_A(i)/Ev_C(i)$ est indépendant de l'évènement $Ev_B(i)/Ev_C(i)$.

Puisque $Ev_A(i)$ et $Ev_B(i)$ appartiennent au même espace probabilisable, on obtient donc :
« « $f_A(i)=1$ » et « $f_B(i)=1$ » » (qui est équivalente à « $f_I(i)=1$ ») est modélisée par l'évènement « $Ev_A(i)$ et $Ev_B(i)$ ».
Or dans l'espace probabilisable de $Ev_A(i)$,$Ev_B(i)$, $Ev_C(i)$ on obtient :

$$p(Ev_A(i) et Ev_B(i)) = p((Ev_A(i) et Ev_B(i)) / Ev_C(i)) p(Ev_C(i))$$
$$p(Ev_A(i) et Ev_B(i)) = p((Ev_A(i) / Ev_C(i)) et (Ev_B(i) / Ev_C(i))) p(Ev_C(i))$$

$$p(Ev_A(i) et Ev_B(i)) = \frac{p(Ev_A(i))}{p(Ev_C(i))} \times \frac{p(Ev_B(i))}{p(Ev_C(i))} \times p(Ev_C(i)) = \frac{p_{iA} p_{iB}}{p_{iC}}$$

On justifie les expressions précédentes comme suit :

Si on suppose que pour un i donné, $Ev_C(i)$ est réalisé. Alors la probabilité de ($Ev_A(i)$ et $Ev_B(i)$) notée $p(Ev_A(i)$et $Ev_B(i)/Ev_C(i))$ est alors égale à $p_{iA}p_{iB}/p_{iC}^2$. (où on a utilisé que $Ev_A(i)$ et $Ev_B(i)$ sont inclus dans $Ev_C(i)$, et que $Ev_A(i)/Ev_C(i)$ et $Ev_B(i)/Ev_C(i)$ sont indépendants).
Soit i quelconque, alors la probabilité de ($Ev_A(i)$et $Ev_B(i)$) est égale à la probabilité que $Ev_C(i)$ soit réalisé (puisque $Ev_A(i)$ et $Ev_B(i)$ sont inclus dans $Ev_C(i)$) multipliée par la probabilité de ($Ev_A(i)$ et $Ev_B(i)$) supposant $Ev_C(i)$ réalisé. D'où le résultat.

On a donc donné une 2ième justification intuitive du pseudo-Axiome de l'intersection des ensembles estimés 2ième forme.

Nous allons maintenant présenter certains Théorèmes et notions importantes permettant d'obtenir des estimations de certains sous-ensembles de **N**.

DEFINITION 4.A.10 : (ensembles image- fonction ordonnée)

Si A est un sous-ensemble infini de **N*** et est l'image d'une fonction numérique $f_A(i)$, strictement croissante sur **N***, alors on dira que A est *l'ensemble image* de f_A sur **N***., et que f_A est une *fonction ordonnée* sur **N***. (On pourrait généraliser cette définition en remplaçant **N*** par un sous-ensemble infini quelconque de **N***).

On remarque que si A est un sous-ensemble quelconque infini de **N***, on peut définir :
$f_A(1)$ comme le premier élément de A,
$f_A(2)$ comme le 2ième élément de A
et pour tout n $f_A(n)$ est le n^{ième} élément de A.
Donc il existe toujours une fonction ordonnée f_A dont A est l'ensemble image (sur **N***).
Réciproquement, si A est l'ensemble image de f_A sur **N***, on a nécessairement :
$f_A(1)$ est le premier élément de A, et par une récurrence immédiate $f_A(n)$ est le n^{ième} élément de A.
On a donc le Théorème :

THEOREME 4.A.11 :

Pour tout sous-ensemble estimé A de **N***, il existe une et unique fonction f_A dont A est l'ensemble image sur **N***.

DEFINITION 4.A.12:

Si A est l'ensemble image d'une fonction f_A sur **N***, alors, pour toute fonction f_{Abij} de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}^+$, continue, strictement croissante, telle que $f_{Abij}(0)=0$ et pour tout i dans **N***, $f_{Abij}(i)=f_A(i)$, on dira que f_{Abij} est une *bijection (numérique) ordonnée* sur $\mathbf{R}^+$, et que A est l'ensemble image de la *bijection ordonnée* f_{Abij}. (Car il est évident que f_{Abij} est nécessairement une bijection).

Puisque f_{Abij} coïncide partout avec f_A sur **N***, on emploiera la même notation f_A pour désigner l'une ou l'autre fonction, sauf en cas d'ambiguïté.

REMARQUE 4.A.13 :

Il est évident que pour toute fonction f_A définie sur **N***, il existe une infinité de bijections f_{Abij} pouvant convenir. On verra en fait que seul le comportement à l'infini de f_{Abij} sera important pour déterminer l'estimation a(n) de l'ensemble A, et donc il suffira de connaître f_{Abij} (x) (noté aussi $f_A(x)$) pour x supérieur à un naturel quelconque N_A).

On a alors le Théorème important :

THEOREME 4.A.14 :

Si A est l'ensemble image d'une bijection ordonnée f_A sur $\mathbf{R}^+$ alors A est un ensemble estimé d'estimation $f_A^{-1}(n)$.
(Puisque f_A est strictement croissante et tend vers l'infini, il en est de même pour f_A^{-1})

Démonstration :

On rappelle que A(n) est l'ensemble des éléments de A inférieurs à n.(On emploiera toujours les termes « inférieurs » ou « supérieurs » au sens large.)
D'après l'hypothèse, tout élément de A s'écrit $f_A(i)$, ou i appartient à **N***.
On a donc $A(n)=\{f_A(i)/\ f_A(i)\leq n$ et i appartient à **N***$\}$.
Or, $f_A(i)\leq n$ est équivalent à $i\leq f_A^{-1}(n)$, puisque f_A est une bijection strictement croissante .

Donc Card(A(n))=E(f_A^{-1}(n)), donc Card(A(n))≈f_A^{-1}(n) pour n tend vers l'infini ce qui signifie que A est un ensemble estimé d'estimation f_A^{-1}(n).

Si A est l'ensemble image d'une bijection ordonnée f_A définie sur $\mathbf{R}^+$, dans de nombreux cas f_A^{-1} est très difficile à obtenir. Par contre, en général, on connaît une fonction g_A, à valeur dans $\mathbf{R}^{*+}$, strictement croissante définie pour x assez grand, continue, et telle que f_A soit équivalente à g_A à l'infini et qu'on connaisse g_A^{-1}, pour x assez grand.
On peut alors en général utiliser le Théorème suivant :

THEOREME 4.A.15 :

Si f est une fonction strictement positive et continue, définie pour x supérieur à un réel strictement positif Kf, strictement croissante, telle qu'il existe une fonction g strictement positive et continue, définie pour x assez grand (x supérieur à Kf), strictement croissante et que l'on ait:

(i)f est équivalente à g à l'infini.

(ii)On connaît g^{-1}, et pour toute fonction ε(x) tendant vers 0 à l'infini :
g^{-1}(x(1+ε(x)) est équivalente à g^{-1}(x) à l'infini.

Alors f^{-1}(x) est équivalente à g^{-1}(x) à l'infini.

Démonstration :

Puisque g est équivalente à f, pour x supérieur à Kf, on a une fonction ε(x) tendant vers 0 pour x tend vers l'infini avec : g(x)=f(x)(1+ε(x)).
De plus pour x supérieur à Kf:
x=g^{-1}(g(x))=g^{-1}(f(x)(1+ε(x))
Pour x supérieur à Kf, on pose f(x)=X. Donc x=f^{-1}(X).
On obtient, pour f^{-1}(X) supérieur à Kf, soit X supérieur à f(Kf) :
f^{-1}(X)=g^{-1}(X(1+ε(f^{-1}(X))).
Donc :

$$\frac{g^{-1}(X(1+\varepsilon(f^{-1}(X))))}{f^{-1}(X)}=1$$

Pour montrer que f^{-1} est équivalente à g^{-1} à l'infini, il suffit de montrer que :

$g^{-1}(X(1+\varepsilon(f^{-1}(X)))$ est équivalente à $g^{-1}(X)$.
Ceci est vrai car $f^{-1}(X)$ tend vers l'infini pour X tend vers l'infini et d'après (ii).
On a donc montré le Théorème.

La condition (ii) sera en général vérifiée, dans le cas où f est une fonction ordonnée sur **N***, car comme on le verra, les estimations s'expriment comme fonctions simples des fonctions Log(x), x et de leurs puissances réelles. Il en sera de même en général de la fonction g^{-1}, et comme on a toujours, pour tout réel α et pour toute fonction $\varepsilon(x)$ tendant vers 0 à l'infini, $\text{Log}(x(1+\varepsilon(x)))^{\alpha}$ est équivalente à l'infini à $(\text{Log}(x))^{\alpha}$, et $(x(1+\varepsilon(x)))^{\alpha}$ est équivalente à x^{α}, on aura en général $g^{-1}(x(1+\varepsilon(x)))$ est équivalente à $g^{-1}(x)$ à l'infini.

REMARQUE 4.A.16 :

Le Théorème précédent peut aussi être utilisé dans certains cas où on ne connaît pas de fonction g équivalente à f_A, connaissant g^{-1}, mais qu'on peut encadrer f_A par de telles fonctions f_{A1} et f_{A2}, équivalentes à g_1 et g_2, et dont on connaît g_1^{-1} et g_2^{-1}.

En effet, supposant qu'on ait une fonction $f_A(x)$, et 2 fonctions f_{A1} et f_{A2} définies pour x assez grand et strictement positives, telles que f_{A1} et f_{A2} soient strictement croissantes ,tendent vers l'infini et :
$f_{A2}(x)<f_A(x)<f_{A1}(x)$.

Remarquant que si f et g sont 2 fonctions strictement croissantes définies pour x supérieur (au sens large) à K, strictement positives, tendant vers l'infini, telles que pour tout x supérieur ou égal à K : $f(x)<g(x)$.
On obtient que f et g ont des fonctions réciproques f^{-1} et g^{-1} avec :
Pour f(x)supérieur à K :
$f^{-1}(f(x))<f^{-1}(g(x))$, soit $x<f^{-1}(g(x))$
Et pour $g^{-1}(x)$supérieur à K (c'est-à-dire x supérieur à g(K)) :
$g^{-1}(x)<f^{-1}(x)$.

Il en résulte que pour x assez grand :
$f_{A1}^{-1}(x)<f_A^{-1}(x)<f_{A2}^{-1}(x)$.
Si on a $f_{A1}(x)$ est équivalente à une fonction $g_1(x)$ et $f_{A2}(x)$ est équivalente à une fonction $g_2(x)$ telles qu'on puisse dans les 2 cas appliquer le Théorème précédent et que de plus, à l'infini
$g_2^{-1}(x)$ soit équivalente à $g_1^{-1}(x)$, on obtient alors $f_A^{-1}(x)$ est équivalente à l'infini à $g_1^{-1}(x)$.

Par exemple considérons la fonction ordonnée sur **N*** :

$f_A(n)=E(\exp(n)+Log(n)+n^{1/2})$.

Il est évident qu'on peut définir une bijection ordonnée sur $\mathbf{R}^+$ $f_{Abij}(x)$ coincidant avec f_A sur **N***. On suppose que f_{Abij} est l'une de ces bijections ordonnées.
Il est difficile de trouver une fonction g(x) équivalente à $f_{Abij}(x)$, car $f_A(n)$ n'est pas équivalente à $f_A(n+1)$.
Par contre on peut définir :
$f_{A2}(x)=\exp(x-2)+Log(x-2)+(x-2)^{1/2}$.
$f_{A1}(x)=\exp(x+2)+Log(x+2)+(x+2)^{1/2}$
On obtient alors, pour x assez grand :
$f_{A2}(x)<f_{Abij}(x)<f_{A1}(x)$.

On obtient l'expression précédente remarquant que pour n supérieur à 5, si on considère l'intervalle I(n)=[n-1,n], d'après la définition de f_{Abij}, on a pour tout x dans I(n), $f_A(n-1)$ est inférieur (au sens large) à $f_{Abij}(x)$ qui est inférieur à $f_A(n)$.
Or il est évident, d'après l'expression de $f_A(n)$, que pour tout x dans I(n), on a $f_{A2}(x)<f_A(n-1)$ et $f_{A1}(x)>f_A(n)$. On obtient donc l'expression précédente , pour x supérieur à 5.

Appliquant le Théorème précédent A.15 , on obtient que f_{A1}^{-1} est équivalente à la fonction $g_{A1}^{-1}(x)$, $f_{A2}^{-1}(x)$ est équivalente à $g_{A2}^{-1}(x)$, avec $g_{A1}^{-1}(x)$ et $g_{A2}^{-1}(x)$ équivalentes à Log(x).
On en déduit donc $f_{Abij}^{-1}(x)$ est équivalente à Log(x).

REMARQUE 4.A.17 :

Il est clair que si A est un ensemble estimé d'estimation a(n), on peut trouver une infinité d'autres estimations de A, qui sont toutes les fonctions équivalentes à a(n) et qui peuvent être très compliquées. L'intérêt de la TAN et qu'on ne considère que les expressions les plus simples de a(n), parce que ce sont elles les plus régulières et qu'elles sont celles susceptibles de donner les meilleurs modèles statistiques.
Ainsi , on dira qu'une fonction d'estimation a(n) est *régulière* si on a :
a) a(x) est infiniment dérivable pour x assez grand.
b)Toutes les dérivées de a(x) sont monotones pour x assez grand, et a'(x) inférieur à 1 pour x assez grand. De plus $p_{iA}=a(i)-a(i-1)$ est équivalente à a'(i) à l'infini.
c)a(x) est une fonction simple des fonctions x, Log(x) et de leurs puissances réelles.

En général, les estimations les plus simples sont *régulières* pour les raisons suivantes :
On remarque que le fait qu'en général, la dérivée a'(x) d'une estimation est inférieure à 1 est dû au fait qu'on a(n)-a(n-1)=a'(x), avec x dans [n-1,n], qu'on a en général a(n)-a(n-1) est inférieur à 1 et que la fonction a'(x) est monotone pour x assez grand.
Une conséquence de ceci est qu'en général a(x) n'est pas fonction de exp(x), dont la dérivée tend vers l'infini à l'infini. De même, a(x) ne doit pas s'exprimer avec des parties entières, car alors a) ne serait plus vérifié.
C'est pourquoi on peut et on doit être dans le cas c).
Le fait que a(x) est une fonction simple des fonctions x et Log(x), et que a(i)-a(i-1)=a'(x) où x appartient à [i-1,i], entraîne que a(i)-a(i-1) est équivalente à a'(i).(C'est-à-dire le b))

Si a(n) est une fonction régulière, d'après c) a'(x) est aussi fonction simple des fonctions x et Log(x), de même que la dérivée de a(x) à tout ordre.

Considérons un ensemble estimé A d'estimation a(n) et b(n), avec a(x) est donc équivalente à b(x) et de plus a(x) et b(x) sont des fonctions d'estimation régulières.

Montrons que si on a p_{iA}=a(i)-a(i-1) et p_{iB}=b(i)-b(i-1), on a en général p_{iA} est équivalente à p_{iB} à l'infini.

En effet d'après b), p_{iA} est équivalente à a'(i) et p_{iB} est équivalente à b'(i). a'(x) et b'(x) étant monotone pour x assez grand, il suffit donc de montrer que a'(x) est équivalente à b'(x) à l'infini.

Or d'après c), la fonction r(x)=a'(x)/b'(x) est aussi une fonction simple des fonctions Log(x) et x, de même que sa dérivée r'(x). Il en résulte que r'(x) est équivalente à l'infini à une fonction strictement positive ou strictement négative, et donc r(x) est monotone pour x assez grand et donc r(x) a une limite l, éventuellement infinie.

Montrons que cette limite l est nécessairement égale à 1 :

En effet, supposons l>1.

Donc il existe ε>0, tel qu'il existe K>0 tel que pour tout t supérieur à K, r(t)>1+ε, c'est-à-dire :a'(t)>b'(t)(1+ε).

En intégrant entre K et x, x étant supérieur à K, on obtient :

a(x)-a(K)>(1+ε)(b(x)-b(K)).

Et donc pour x supérieur à K:

a(x)/b(x)>1+ε+a(K)/b(x)-(1+ε)b(K)/b(x).

Il est évident que le 2ième terme de cette inégalité tend vers $1+\varepsilon>0$, et est incompatible avec l'hypothèse que $a(x)/b(x)$ tend vers 1 pour x tend vers l'infini.

Il est donc impossible qu-on ait $l>1$, et de même on montre qu'il est impossible qu'on ait $l<1$. Donc $l=1$, et on a bien p_{iA} est équivalente à p_{iB}.

Le résultat précédent est important car A, B, C étant 3 ensembles estimés, appliquant le pseudo-Axiome du modèle des ensembles estimés à A,B,C puis le pseudo-Axiome de l'intersection des ensembles estimés, on obtient des résultats équivalents quels que soient les fonctions d' estimation utilisées de A,B,C, du moment qu'elles soient régulières.

Pour obtenir la remarque précédente, on utilise le résultat important que si a(n), b(n), c(n) sont des estimations régulières, avec $p_{iA}=a(i)-a(i-1)$, $p_{iB}=b(i)-b(i-1)$, $p_{iC}=c(i)-c(i-1)$, alors la convergence à l'infini de la série $\Sigma p_{iA}p_{iB}/p_{iC}$ est équivalente à la convergence à l'infini de l'intégrale $\int a'(x)b'(x)/c'(x)dx$, et de plus si elles divergent, on a pour tout naturel N :

$$\int_N^n \frac{a'(x)b'(x)}{c'(x)}dx \approx \sum_{i=N}^{n} \frac{p_{iA}p_{iB}}{p_{iC}}.$$

On utilisera aussi le fait que si f et g sont 2 fonctions strictement positives et monotones, définie pour x supérieur à K, avec f équivalente à g en l'infini, alors la convergence à l'infini de l'intégrale $\int f$ est équivalente à celle de l'intégrale $\int g$, et si elles divergent :

$$\int_K^x f(t)dt \approx \int_K^x g(t)dt$$

En utilisant exactement la même méthode que dans la partie 3.DECIMALES d' IRRATIONELS , pour obtenir que la proposition « Il existe une infinité de chiffres égaux à 5 dans les décimales de $\sqrt{3}$ », considérant en particulier les mêmes ensembles F_i, on obtient le Théorème suivant :

THEOREME 4.A.18 :

Si on a un ensemble A d'évaluation probabiliste p_{iA}, pour i supérieur à N_A, alors :

a)Si la série Σp_{iA} diverge, la proposition « A a une infinité d'éléments » a une pseudo-preuve aléatoire.

b)Si la série Σp_{iA} converge, la proposition « A a un nombre fini d'éléments » a une pseudo-preuve aléatoire.

On rappelle que dans le cas a), le Théorème 4.A.7 permet d'obtenir que A est un ensemble estimé dont on obtient une estimation a(n) par une pseudo-preuve aléatoire.

B.EXEMPLES

EXEMPLE 4.B.1 :

Soit à étudier l'ensemble I des nombres premiers pouvant s'écrire $k=10^p+3$. On va montrer que les 2 propositions P1 :« I est infini » et P2 :« I est un ensemble estimé d'estimation $i(n) = F(n) = \int_{10}^{n} \frac{2}{xLog(x)Log(10)} dx$. » ont des pseudo-preuves aléatoires.

Il faudrait effectuer des tests en calculant pour de nombreuses valeurs r(n)=I(n)/i(n) (I(n) étant le nombre d'éléments de I inférieurs à n), et vérifier que r(n) semble tendre vers 1, pour obtenir que P1 et P2 ont des explications aléatoires intéressantes c'est-à-dire illustrées par de nombreux tests, à condition que ni P1, ni P2, ni leur négation n'aient été démontrées classiquement.

Démonstration :
(On ne démontre pas les propositions P1 et P2, mais on démontre qu'elles ont des pseudo-preuves aléatoires.)
Soit A l'ensemble des naturels k s'écrivant :$k=10^p+3$, avec p dans **N***.
A est donc l'ensemble image de la fonction ordonnée sur **N*** $f_A(p)=10^p+3$.
On peut alors définir la fonction f_{Abij}, continue et strictement croissante sur $\mathbf{R}^+$, avec pour x supérieur à 1, $f_{Abij}(x)=10^x+3$. f_{Abij} est donc une bijection ordonnée coïncidant avec f_A sur **N*** telle qu'on l'a définie en 4.A.12, et donc qu'on désignera aussi par f_A.
On obtient pour k supérieur à 10+3=13, si $f_A(x)=k$, $f_A^{-1}(k)= x = \log(k-3)$, donc d'après le Théorème 4.A.14, A est un ensemble estimé d'estimation a(k)=log(k).
Si B est l'ensemble des nombres premiers, on sait que B est un ensemble estimé d'estimation b(k)=k/Log(k).
De plus, A et B sont inclus dans C l'ensemble des nombres impairs qui est un ensemble estimé d'estimation c(k)=k/2.

Si on applique le pseudo-Axiome du modèle des ensembles estimés à A,B,C, on obtient que A,B,C ont des évaluations probabilistes $p_A(i)=a(i)-a(i-1)$, $p_B(i)=b(i)-b(i-1)$, $p_C(i)=c(i)-c(i-1)$, pour i supérieur (respectivement) à N_A,N_B,N_C.
Il en résulte, si on applique le pseudo-Axiome de l'intersection des ensembles estimés 2ième forme 4.A.9, I étant l'intersection de A et B, I a une évaluation probabiliste $p_I(i)=p_A(i)p_B(i)/p_C(i)$, pour i supérieur à $N_I=\sup(N_A,N_B,N_C)$.

On obtient:

$$\frac{a'(x)b'(x)}{c'(x)} = \frac{2}{xLog(10)} \times \frac{Log(x)-1}{(Log(x))^2}$$

Comme l'intégrale ∫2/(xLog(10)Log(x) dx est équivalente à une intégrale de Bertrand qui diverge, il en résulte d'après la Remarque 4.A.17 que la série $\Sigma p_{iA}p_{iB}/p_{iC}$ diverge et que de plus :

$$\sum_{i=NI}^{n} \frac{p_{iA}p_{iB}}{p_{iC}} \approx \int_{NI}^{n} \frac{2}{xLog(x)Log(10)}dx$$

On peut alors utiliser le Théorème 4.A.18 pour obtenir que P1 : « I est infini » a une pseudo-preuve aléatoire.
Si on applique le Théorème 4.A.7, on obtient que la proposition :

« I est un ensemble estimé d'estimation $i(n) = \sum_{i=NI}^{n} p_{iI}$ »

a une pseudo-preuve aléatoire.
On obtient alors immédiatement que cette proposition est équivalente à P2, et donc P2 a bien une pseudo-preuve aléatoire.

EXEMPLE 4.B.2 :

Etudions maintenant l'ensemble des nombres premiers pouvant s'écrire $k=2x^r+1$, où r est un naturel supérieur à 2.
On obtient exactement les mêmes résultats que précédemment, avec ici :

$$F(n) = \int_{10}^{n} \frac{2^{1-1/r}}{rx^{1-1/r}Log(x)}dx$$

On procède exactement comme dans l'exemple précédent, avec $a(k)=k^{1/r}/2^{1/r}$, b(k) et c(k) demeurant inchangés. Comme dans l'exemple précédent, il faudrait calculer et tracer I(n)/F(n) pour vérifier que P2 est illustrée par de nombreux tests et donc a

une explication aléatoire intéressante, si on ne l'a jamais démontrée classiquement ni sa négation.

EXEMPLE 4.B.3 :

Etudions l'ensemble des nombres premiers pouvant s'écrire $k=6.10^p+1$.
On obtient les mêmes résultats que pour les 2 premiers exemples, avec ici :

$$F(n)=\int_{10}^{n}\frac{24}{xLog(x)Log(10)N_C}dx$$

où N_C est le nombre de naturels modulo 24 dont le carré est égal à 1 modulo 24.

Pour obtenir les résultats de cet Exemple, on obtient comme dans le premier exemple que A est un ensemble estimé d'estimation a(k)=log(k).
L'ensemble B et l'estimation b(k) restent inchangés ;
Cependant, on remarque que les éléments de A et de B peuvent s'écrire $\sqrt{(24n+1)}$ où n est un naturel.
On doit donc prendre pour C l'ensemble des naturels $k=\sqrt{24n+1}$.
Pour obtenir c(k), on considère la table des carrés modulo 24, si N_C est le nombre de naturels dont le carré est égal à 1 (modulo 24), il est évident que $c(k)=k(N_C/24)$.
On procède alors comme précédemment pour obtenir la propositions « I est infini » et la proposition donnant l'estimation i(n) de I.

EXEMPLE 4.B.4 :

Etudions l'ensemble des nombres premiers pouvant s'écrire : $k=24x^r+1$, r étant un naturel supérieur à 2.
On obtient les mêmes résultats que pour les exemples précédents, avec :

$$i(n)=F(n)=\int_{10}^{n}\frac{24^{1-1/r}}{rx^{1-1/r}Log(x)N_C}dx$$

Pour obtenir ces résultats, on procède comme dans l'Exemple précédent, en conservant b(k) et c(k), et en prenant $a(k)=(k/24)^{1/r}$.

REMARQUE 4.B.5:

Il est clair que les pseudo-Axiomes de la TAN que nous avons donné permettent aussi d'étudier l'intersection d'un nombre d'ensembles estimés arbitraire, en donnant des estimations de ces ensembles estimés.

Dans les exemples précédents, on a proposé seulement des intersections infinies, car ce sont les seules qui peuvent être illustrées par des tests et donc peuvent avoir des explications aléatoires. Il est cependant clair qu'on aurait pu proposer de nombreux exemples où le fait que l'intersection de 2 ensembles estimés est finie a une explication aléatoire.

Il n'est pas sûr en outre que les propositions des exemples précédents aient des explications aléatoires car il est possible qu'on puisse les démontrer classiquement ou leurs négations. On rappelle que par Définition seules les propositions qui n'ont pas de démonstration classique ni leur négation ont une explication aléatoire. Car sinon, leur pseudo-preuve aléatoire est inutile.

On peut donc s'attendre que comme dans les exemples précédents, de très nombreuses propositions en Théorie des Nombres aient une explication aléatoire, et donc tout en ayant une explication rationnelle basée sur le hasard n'aient pas de démonstration classique ni leur négation.

A et B étant 2 ensembles estimés, on peut obtenir dans certains cas un autre modèle de la fonction caractéristique $f_I(i)$, avec $I=A\cap B$.

Ainsi, supposons que A soit l'image d'une fonction ordonnée g_A sur $\mathbf{N}^*$, et que B soit un ensemble estimé d'estimation b(n).

Si on applique à B le pseudo-Axiome du modèle des ensembles estimés, on obtient qu'il existe un naturel N_B tel que pour i supérieur à N_B, $f_B(i)=1$ soit modélisée par un évènement de probabilité $p_{iB}=b(i)-b(i-1)$ (f_B étant la fonction caractéristique de B).

On obtient alors immédiatement la modélisation :

« Pour j tel que $g_A(j)$ soit supérieur à N_B, $f_I(g_A(j)=1$ (qui est équivalent à $f_B(g_A(j))=1$) est modélisée par un évènement de probabilité $p_{gA(j)I}=p_{gA(j)B}=b(g_A(j))-b(g_A(j)-1)$. »

(Il est évident que si i ne s'écrit pas $g_A(j)$ pour un naturel j, alors $f_I(i)=f_A(i)=0$, f_A fonction caractéristique de A).

Cette 2ième modélisation est plus précise que celle obtenue en appliquant le pseudo-Axiome du modèle des ensembles estimés à A et B, puisque dans cette 2ième modélisation, on ne modélise pas f_A la fonction caractéristique de A, mais on l'utilise directement. Cependant, cette 2ième modélisation conduit à des estimations de I équivalentes à celles obtenues par la 1^{ière} modélisation , si b(x) est une fonction régulière et que , g_{Abij} étant une bijection ordonnée de classe C^2 sur $\mathbf{R}^+$ associée à g_A (qui existe toujours de façon évidente) $g_A^{-1}(x)$ (qui on le rappelle donne une estimation de A) est équivalente à une fonction régulière.

EXEMPLE 4.B.6 : CONJECTURE FORTE DE GOLDBACH

On peut donner une explication aléatoire à la Conjecture forte de Goldbach, et à des propositions exprimant des propriétés de la Comète de Goldbach, en utilisant la modélisation des ensembles estimés présentée dans cet article, et non plus le modèle équiprobable comme dans l'article [(5)]. Cette 2ième modélisation conduit,à des propositions exprimant des propriétés de la Comète de Goldbach beaucoup plus précises que celles obtenues en utilisant le modèle équiprobable.

ETUDE DE r(k) PAR LE MODELE SIMPLE MI 4.B.6A) :

Soit A l'ensemble des nombres premiers. On sait que A est un ensemble estimé d'estimation a(n)=n/Log(n).

Si on applique le pseudo-Axiome du modèle des ensembles estimés à A, on obtient qu'il existe un naturel N_A tel que pour i supérieur (toujours au sens large si on ne précise pas) à N_A, « $f_A(i)=1$ » soit modélisée par un évènement « $Xf_A(i)=1$ » de probabilité $p_{iA}=a(i)-a(i-1)$. (f_A fonction caractéristique de A) On sait qu'on peut appliquer ce pseudo-Axiome en choisissant N_A assez grand, et on choisira $N_A=501$.

On obtient :

$$p_{iA} = \frac{i}{Log(i)} - \frac{i-1}{Log(i-1)} = \frac{1}{Log(i)}(1+\varepsilon(i))$$

Où la fonction ε(i), complètement déterminée, tend vers 0 pour i tend vers l'infini. (On rappelle qu'une estimation plus précise de a(n) est $\int_{[3,n]} (1/Log(x))dx$, qui donne la même expression)

On a donc la loi numérique aléatoire :

« Pour i supérieur à $N_A=501$, $f_A(i)$ est modélisée par la variable aléatoire $Xf_A(i)$, avec p(« $Xf_A(i)=1$ »)=p_{iA} ».

Cependant, comme tous les nombres premiers sont impairs, on peut considérer seulement les naturels i impairs. On obtient alors un meilleur modèle statistique:

Ainsi, considérons 2 ensembles estimés A et C, avec A inclus dans C, et pour i appartenant à C, on cherche à modéliser $f_A(i)=1$, que l'on écrira $f_{A/C}(i)=1$. On cherche donc à modéliser $f_{A/C}(i)$.

On l'obtient par le pseudo-Axiome suivant, de l'inclusion des ensembles estimés, qui se justifie de la même façon que le pseudo-Axiome de l'intersection des ensembles estimés 2ième forme:

PSEUDO-AXIOME 4.B .6.Aa) de l'inclusion des ensembles estimés :

Si A et C sont 2 ensembles d'estimation probabiliste p_{iA} et p_{iC}, pour i supérieur à N_A et N_C (On suppose $N_A=N_C$), avec A inclus dans C, alors lorsque le pseudo-Axiome de l'inclusion des ensembles estimés est valide pour (A,C), pour tout i dans C, $f_A(i)$ (notée $f_{A/C}(i)$ est modélisée par un évènement de probabilité $p_{iA/C}=p_{iA}/p_{iC}$.

1ière justification intuitive :

Cette justification est basée sur le modèle équiprobable :
Supposons qu'on ait un ensemble E={1,..,n}, et que A et C soient 2 sous-ensembles de E ayant a et c éléments, avec A inclus dans C.
Appliquant le pseudo-Axiome du modèle équiprobable 2.A.3 à (i,A,E) puis à (i,C,E), on obtient pour i dans E :
« $f_A(i)=1$ » est modélisée par un évènement de probabilité $p_{iA}=a/n$.
« $f_C(i)=1$ » est modélisée par un évènement de probabilité $p_{iC}=c/n$.
Si maintenant, sachant i appartient à C, on applique le pseudo-Axiome du modèle équiprobable à (i,A,C) (car A est inclus dans C par hypothèse), on obtient :
« $f_{A/C}(i)=1$ » est modélisée par un évènement de probabilité a/c, avec $a/c=p_{iA}/p_{iC}$.
Ceci est donc une première justification.

2ième justification intuitive :

Supposons que (A,C) soit un couple d'ensembles quelconques parmi tous les couples (A',C') tels que A' et C' sont 2 ensembles d'évaluation probabiliste p_{iA} et p_{iC} pour i supérieur à N_A, et A' est inclus dans C'.
On a donc pour i supérieur à N_A :
« $f_A(i)=1$ » est modélisée par un évènement Ev_{iA} de probabilité p_{iA}.
« $f_C(i)=1$ » est modélisée par un évènement Ev_{iC} de probabilité p_{iC}.
De plus comme dans la 2ième justification intuitive du pseudo-Axiome de l'intersection des ensembles estimés 2ième forme, on peut en premier lieu considérer puisque A est inclus dans C que Ev_{iA} et Ev_{iC} appartiennent au même espace probabilisable et de plus que Ev_{iA} est inclus dans Ev_{iC}, pour i supérieur à N_A.
On peut aussi en second lieu généraliser la propriété de correspondance, en admettant que la proposition « « $f_A(i)=1$ » sachant « $f_C(i)=1$ » » est modélisée par l'évènement « Ev_{iA} sachant Ev_{iC}. (Ev_{iA}/Ev_{iC}).
Or la proposition « « $f_A(i)=1$ » sachant « $f_C(i)=1$ » » est équivalente à « $f_{A/C}(i)=1$ » tel qu'on a défini $f_{A/C}(i)$.
Il en résulte que « $f_{A/C}(i)=1$ » est modélisée par l'évènement Ev_{iA}/Ev_{iC} de probabilité p_{iA}/p_{iC}.
On a donc donné une 2ième justification intuitive du pseudo-Axiome.

I étant l'ensemble des naturels impairs, puisque A est inclus dans I, appliquant le pseudo-Axiome précédent à (A,I), on obtient que pour i naturel impair supérieur à 501, $f_{A/I}(i)$ est modélisée par la variable aléatoire $Xf_{A/I}(i)$ avec p(« $Xf_{A/I}(i)=1$ »)=$p_{iA/I}=p_{iA}/p_{iI}=2p_{iA}$. (avec $p_{iI}=1/2$).

Si on applique le pseudo-Axiome des variables indépendantes on obtient la même loi numérique aléatoire, mais avec des variables $Xf_{A/I}(i)$ définies sur le même espace probabilisable et indépendantes.

Si on définit pour tout n pair (n=2p) la proposition :
P(n) : « n=2p est la somme de 2 nombres premiers (distincts) »,
On considère les naturels n=2p, avec p supérieur à $N_A=501$.
Il est évident alors que « t(P(n)=0 » est équivalente à :
« $f_{A/I}(1)f_{A/I}(n-1)=0$ » et « $f_{A/I}(3)f_{A/I}(n-3)=0$ »et….et « $f_{A/I}(p')f_{A/I}(n-p')=0$ »,
où p' est le plus grand naturel impair strictement inférieur à p.
On écrit cette proposition :
« $f_{A/I}(1)f_{A/I}(n-1)=0$ » et…et « $f_{A/I}(499)f_{A/I}(n-499)=0$ » et « $f_{A/I}(N_A)f_{A/I}(n-N_A)=0$ » et ...et « $f_{A/I}(p')f_{A/I}(n-p')=0$ »

La proposition précédente fait intervenir des naturels n-j avec j inférieur à p' (2ième terme de chaque produit). Il en résulte n-j est supérieur à n-p'=2p –p'>p. (puisque par hypothèse p' est strictement inférieur à p). Donc comme p est supérieur à $N_A=501$, n-j est toujours supérieur à N_A, et donc $f_{A/I}(n-j)$ est modélisée par la variable aléatoire $Xf_{A/I}(n-j)$.

D'après la propriété de correspondance (donnée dans les Rappels 2.A), la proposition précédente équivalente à t(P(n))=0 est donc modélisée par l'évènement « Xt(P(n))=0 » de probabilité :
« $f_A(1)Xf_{A/I}(n-1)=0$ »et…et « $f_A(499)Xf_{A/I}(n-499)=0$ »et « $Xf_{A/I}(N_A)Xf_{A/I}(n-N_A)=0$ »et…et « $Xf_{A/I}(p')Xf_{A/I}(n-p')=0$ ».
Et donc utilisant que les $Xf_{A/I}(i)$ sont indépendantes, la probabilité de l'évènement précédent est égal au produit des probabilités de chaque évènement. Si on définit $P(N_A)$ l'ensemble des nombres premiers strictement inférieurs à N_A, on a pour tout i strictement inférieur à N_A, si i est dans $P(N_A)$, $f_A(i)=1$, sinon $f_A(i)=0$, et donc la probabilité de l' évènement précédent est égale à :

$$p("Xt(P(n))=0")=\prod_{j\in P(NA)}(1-p_{jA/I})\prod_{p'\geq j\geq NA}(1-p_{jA/I}p_{(n-j)A/I})$$

(j représente toujours un naturel impair dans l'expression précédente).

On a donc obtenu la loi numérique aléatoire :

« Pour n=2p supérieur à $2N_A$=1002, t(P(n)) est modélisée par la variable aléatoire Xt(P(n)) définie précédemment ».
Si on applique le pseudo-Axiome des variables indépendantes à la loi précédente, on obtient la même loi avec les Xt(P(n)) indépendantes.
On peut alors en procédant exactement comme dans l'article [(5)] obtenir que la proposition :
« Pour tout n naturel pair supérieur à 1002, n est la somme de 2 nombres premiers distincts », qui est équivalente à « Pour tout n pair supérieur à 1002, t(P(n))=1 », a une pseudo-preuve aléatoire. Et il est évident que cette proposition est équivalente à la Conjecture de Goldbach.
(Puisqu'on vérifie que pour n pair inférieur à 1002, n est la somme de 2 nombres premiers).

Avec toujours n=2p naturel pair tel que p supérieur à N_A=501, on définit r(n) comme étant le nombre de paires de nombres premiers distincts dont la somme donne n.
On obtient :
$r(n)=f_A(1)f_{A/I}(n-1)+\ldots+f_A(499)f_{A/I}(n-499)+f_{A/I}(N_A)f_{A/I}(n-N_A)+\ldots+f_{A/I}(p')f_{A/I}(n-p')$.

Or on a vu dans les Rappels 2.A, comme conséquence de la propriété de correspondance, que si on avait une loi numérique aléatoire sur un ensemble F :
« f(i) est modélisée par la variable aléatoire Xf(i) »,
alors si les Xf(i) sont définies sur le même espace probabilisable, pour tous k1,…,kn appartenant à F, et pour toute fonction $G(x_1,\ldots x_n)$ définie sur $\mathbf{R}^n$, la fonction G(f(k1),…,f(kn)) était modélisée par la variable aléatoire G(Xf(k1),…,Xf(kn).

Il en résulte que la fonction r(n) est modélisée par la variable aléatoire Xr(n),avec :

$$Xr(n) = \sum_{j \in P(NA)} Xf_{A/I}(n-j) + \sum_{p' \geq j \geq NA,\, j \in I} Xf_{A/I}(j) Xf_{A/I}(n-j)$$

On obtient donc la loi numérique aléatoire :
« Pour n pair supérieur à $2N_A$=1002, r(n) est modélisée par la variable aléatoire Xr(n) définie précédemment ».
On remarque qu'on peut facilement obtenir la moyenne et la variance de Xr(n), les $Xf_{A/I}(j)$ étant indépendantes. On peut aussi appliquer le pseudo-Axiome des variables indépendantes pour obtenir la même loi que précédemment, mais avec les Xr(n) indépendantes, et obtenir alors des propositions exprimant des propriétés de la Comète de Goldbach.
On remarque tout d'abord qu'on peut montrer que E(Xr(k)) est équivalente à $E(X_{eq}r(k))$, $X_{eq}r(k)$ étant la variable aléatoire obtenue utilisant le modèle

équiprobable modélisant r(k) dans le premier article, c'est-à-dire que E(Xr(k)) est équivalente à $k/(Log(k))^2$.

On obtient ce résultat de la façon suivante :

a)On montre qu'on a l'équivalence, A étant un réell strictement positif :

$$\int_A^n \frac{1}{(Log(x))^2}dx \approx \frac{1}{(Log(n))^2}$$

b)Puis on écrit :

$$\int_A^n \frac{1}{Log(x)Log(n-x)}dx = \int_A^{n/2} \frac{1}{Log(x)Log(n-x)}dx + \int_{n/2}^n \frac{1}{Log(x)Log(n-x)}dx$$

c)Puis on encadre les 2 intégrales du terme de gauche de l'égalité précédente et utilisant a) on obtient :

$$\int_A^n \frac{1}{Log(x)Log(n-x)}dx \approx \frac{1}{(Log(n))^2}$$

Utilisant l'inégalité de Chebychev exactement de la même façon que dans la Remarque 4.A.7b), on peut obtenir des intervalles de confiance à 99% I(k)=[1-ε(k),1+ε(k)] de Xr(k)/E(Xr(k)), ε(k) étant une fonction positive tendant vers 0.
Procédant alors exactement comme dans l'estimation de S(n), dans la Remarque 4.A.7b) on obtient que la proposition suivante $P2_{MI}(r(k))$ a une pseudo-preuve aléatoire :

$P2_{MI}(r(k))$: « Il existe un naturel N tel que pour tout n supérieur à N :
$\frac{1}{(n-2N_A)/2+1}\times\sum_{i=2NA}^{n} t("\frac{r(i)}{E(Xr(i))}\in I(i)")\geq 0.98$ (avec i pair et $E(Xr(i))\approx i/(Log(i))^2$) »

Comme dans le modèle équiprobable on obtient que cette proposition n'est pas illustrée par la Comète de Goldbach considérées comme des tests statistiques. Cependant, cette proposition entraîne la proposition $Q2_{MI}(r(k))$ (analogue à Q2 dans la section 4A7a) suivante qui a donc une pseudo-preuve aléatoire :

$Q2_{MI}(r(k))$: « Il existe 2 réels α,β strictement positifs et un naturel N tel que pour tout n supérieur à N :

$$\frac{1}{(n-2N_A)/2+1}\times\sum_{i=2NA}^{n} t("\frac{r(i)}{E(Xr(i))}\in[\alpha,\beta]")\geq 0.98$$

(avec i pair et $E(Xr(i))\approx i/(Log(i))^2$) »

On obtient comme dans l'article [5] que $Q2_{MI}(r(k))$ tout en étant illustrée par la Comète de Goldbach n'a pas d'explication aléatoire car contraire à la Conjecture Forte de Goldbach qui on le verra a une pseudo-preuve aléatoire et est beaucoup mieux illustrée par les tests statistiques que $Q2_{MI}(r(k))$. $Q2_{MI}r(k)$ est aussi beaucoup plus imprécise que la Conjecture Forte de Goldbach. Cependant, c'est en affinant le modèle statistique utilisé pour obtenir $P2_{MI}(r(k))$ qu'on obtiendra que la Conjecure Forte de Goldbach a une pseudo-preuve aléatoire, dans la section suivante.

Comme dans l'article précédent on peut considérer la proposition $R2_{MI}(r(k))$ obtenue en remplaçant dans $Q2_{MI}(r(k))$ $[\alpha,\beta]$ par $[\alpha,+\infty[$. On obtient comme dans le premier article [5] que cette proposition a une explication aléatoire, donnant notamment la forme de l'équation de la courbe inférieure de la Comète de Goldbach.

On remarque qu'il est très possible à priori qu'on puisse obtenir des variables aléatoires Xr(n) représentant les propriétés statistiques de r(n) de façon beaucoup plus précises que celles obtenues dans les modèles équiprobables et indépendants exposés précédemment. Cependant, ceci doit nécessiter d'utiliser des propriétés des nombres premiers plus complexes que les 2 seules qu'on a utilisées, c'est-à-dire que les nombres premiers constituent un ensemble estimé d'estimation n/Log(n) inclus dans l'ensemble des naturels impairs. Trouver une loi numérique aléatoire dont on puisse déduire les principales propriétés de la Comète de Goldbach, constitue l'objectif suivant de la TAN, comme on l'a remarqué dans l'Etude théorique d'une fonction par la TAN 4.A.7a).

ETUDE DE LA FONCTION r(k) PAR LE MODELE $MI(k)\pi(p_1,\ldots,p_n)$ 4.B.6B)

On remarque qu'on peut grandement améliorer la qualité des modèles présentés, indépendants et équiprobable, de la façon suivante :
On a vu qu'on a amélioré la qualité du modèle indépendant en utilisant que A l'ensemble des nombres premiers était inclus dans I l'ensemble des nombres impairs.

Plus généralement, supposons qu'on ait un naturel pair k, et que $p_{1k},\ldots,p_{nk}$ soient les diviseurs premiers de k autres que 2 et k/2 (si k/2 premier), avec $p_{1k}<\ldots<p_{nk}$. On peut alors considérer que A est inclus dans l'ensemble $I_\pi(p_{1k},\ldots,p_{nk})$ qui est l'ensemble des naturels impairs qui ne sont pas multiples de $p_{1k},\ldots p_{nk}$, à l'exception de $p_{1k},\ldots,p_{nk}$ eux-mêmes. On remarque qu'on a toujours $p_{ik}<k/2$. Afin de simplifier le modèle, on pourrait considérer seulement les nombres premiers p_{ik} inférieurs à P=500. (Il est très possible qu'on obtienne un bon modèle prenant P égal à une valeur beaucoup plus petite que 500).

Remarquant que si j appartient à $I_\pi(p_{1k},..,p_{nk})$, avec j>500, on a alors k-j appartient à $I_\pi(p_{1k},\ldots,p_{nk})$, on peut procéder exactement comme dans le modèle indépendant précédent, remplaçant I par $I_\pi(p_{1k},\ldots,p_{nk})$. Il est clair que cette modélisation est plus précise, et qu'elles conduit aussi à l'existence de bandes correspondant aux naturels pairs ayant certains diviseurs premiers en commun. Il est cependant très possible que cette modélisation ne soit pas assez précise pour décrire complètement ou avec une très bonne approximation les propriétés de la Comète de Goldbach.

(On peut affiner le modèle équiprobable étudié dans l'article précédent [(5)] de la même façon, en remplaçant E(k) l'ensemble des paires de naturels impairs inférieurs à k par l'ensemble des paires de naturels inférieurs à k appartenant à $I_\pi(p_{1k},..,p_{nk})$ privé de $p_{1k},..,p_{nk}$, B(k) l'ensemble des paires de naturels{i,k-i}, i étant impair par l'ensemble des paires de naturels {i,k-i}, où i appartient à $I_\pi(p_{1k},..,p_{nk}\}$ privé de $p_{1k},\ldots,p_{nk}$ (Car il est évident qu'on a toujours pour j dans {1,..,n} $k-p_{jk}$ est un multiple de p_{jk} et n'est pas premier), et A(k) l'ensemble des paires de naturels premiers inférieur à k par l'ensemble des paires de naturels premiers inférieurs à k et différents de $p_{1k},\ldots,p_{nk}$. On notera $M_{eq}I\pi(p_1,\ldots p_n)$ ce modèle équiprobable analogue au modèle $MI\pi(p_1,..,p_n)$)

En réalité, on voit que les modèles précédents ne sont pas assez bons pour décrire avec une très bonne approximation la Comète de Goldbach. :

On note MI le modèle indépendant étudié précédemment en considérant seulement que A est inclus dans I, et MI(k) le modèle indépendant plus précis décrit précédemment où on considère plus précisément que A est inclus dans $I(k)=I_\pi(p_{1k},\ldots,p_{nk})$.

En effet, on obtient $I(k)=I_\pi(p_{1k},\ldots,p_{nk})$ en considérant l'ensemble des naturels modulo $\pi(k)=p_{1k}\times\ldots\times p_{nk}$. On obtient alors des nombres modulo $\pi(k)$ qui appartiennent tous à I(k). Si n(k) est le nombre de naturels modulo $\pi(k)$ qui appartiennent tous à I(k) alors il vient immédiatement que I(k) est un ensemble estimé d'estimation $i_{I(k)}(n)=p_{I(k)}n$, avec $p_{I(k)}=n(k)/\pi(k)$.

En procédant alors comme dans le modèle MI, on obtient dans le modèle MI(k) que (avec des notations évidentes) $m_{I(k)}(k)$est équivalent à $(p_I/p_{I(k)})m_I(k)$, c'est-à-dire $m_{I(k)}(k)$ est équivalent à $(p_I/p_{I(k)})k/(\mathrm{Log}(k))^2$.

Comme on a toujours p_I supérieur à $p_{I(k)}$, on devrait donc trouver d'après le modèle MI(k) que tous les points (k,r(k) doivent être au dessus de la courbe (k,m_I(k)). Or cela n'est visiblement pas le cas, la plupart des points (k,r(k)) sont au dessous de la courbe. (C'est une remarque analogue qui permettait d'invalider la Conjecture étendue de Goldbach de Hardy et Littlewood [(5)].)

On peut cependant améliorer encore le modèle MI(k) de la façon suivante : Considérons un naturel k pair n'ayant aucun autre diviseur premier que 2. ($k=2^n$).On a vu que dans le modèle MI, on a utilisé l'expression:

$r_I(k)=f_A(1)f_A(k-1)+\ldots+f_A(499)f_A(k-499)+f_A(N_A)f_A(k-N_A)+..+f_A(p')f_A(k-p')$.

, avant d'appliquer la propriété de correspondance permettant de modéliser r(k) par la variable aléatoires X_Ir(k).

On peut donc écrire aussi :

$r_I(k)=C_I(k)+S_I(k)$, avec $C_I(k)$ est majorée par une constante ($C_I(k)=f_A(1)f_A(k-1)+\ldots+f(499)f_A(k-499)$, et $S_I(k)= f_A(N_A)f_A(k-N_A)+..+f_A(p')f_A(k-p')$).

Dans cette expression, on sait que certains termes de la forme $f_A(i)f_A(k-i)$ sont nuls, par exemple tous les termes tels que i est multiple de 3,5…Nous allons introduire un nouveau modèle MIπ(3), améliorant la modèle MI, dans lequel on utilise que tout multiple de 3 (sauf 3), n'est pas premier. On peut réécrire $S_I(k)$ sous la forme $S_{I\pi(3)}$ (k) suivante, $I_\pi(3)$ ayant été précédemment défini comme l'ensemble des naturels impairs qui ne sont pas multiples de 3 :

$S_{I\pi(3)}(k) = \sum_{i\in I\pi(3)} f_A(i) f_A(k-i)$, avec 500<i<k/2.

On sait que i appartient à $I_\pi(3)$ signifier i congru à 1 ou 5 modulo 6, et in a vu que i appartient à I signifie i congru à 1,3 ou 5 modulo 6. On a donc $p_{iI\pi(3)}=1/3$ et $p_{iI}=1/2$. De plus il est évident que $S_{I\pi(3)}(k)$ contient les 2/3 des termes de $S_I(k)$ (c'est-à-dire $p_{iI\pi(3)}/p_{iI}$, puisque la proportion des éléments de {1,…,k/2-1} tels que i appartient à I est égale à p_{iI} (ou plutôt tend vers p_{iI}), et la proportion de ceux tels que i appartient à Iπ(3) est égale à $p_{iI\pi(3)}$.

De plus, si on considère un terme de la somme $S_{I\pi(3)}$ (k) $f_A(i)f_A(k-i)$, on sait que i appartient à $I_\pi(3)$, et donc on peut écrire $f_A(i)$ sous la forme $f_{A/I\pi(3)}$ (i).

D'autre part par hypothèse k est pair et n'est pas divisible par 3, donc k est congru à 2 ou 4 modulo 6. Supposons par exemple k congru à 2 modulo 6. Or dans $S_{I\pi(3)}$ (k) les termes sont congrus alternativement à 1 ou 5 modulo 6. On a donc alternativement k-i congru à 1 ou 3 modulo 6, et donc un terme sur 2 de la somme $S_{I\pi(3)}$ (k) est nul (k-i étant multiple de 3).

Pour chaque terme non nul, k-i est congru à 1 modulo 6, donc k-i appartient à $I_\pi(3)$, et on peut écrire $f_A(k-i)$ sous la forme $f_{A/I\pi(3)}$ (k-i). (on vérifie qu'on obtient le même résultat si k congru à 4 modulo 6).

On a donc obtenu les 3 points fondamentaux suivants, k n'ayant aucun autre diviseur premier que 2:
a)La somme $S_{I\pi(3)}(k)$ contient les 2/3 (c'est-à-dire $p_{iI\pi(3)}/p_{iI}$) des termes de $S_I(k)$.
b)1 terme sur 2 de $S_{I\pi(3)}(k)$ est nul.
c)Chaque terme non nul de $S_{I\pi(3)}(k)$ s'écrit $f_{A/I\pi(3)}(i)\ f_{A/I\pi(3)}(k\text{-}i)$, et est donc modélisée par la variable aléatoire $Xf_{A/I\pi(3)}(i)\ Xf_{A/I\pi(3)}(k\text{-}i)$ définie dans le Pseudo-Axiome 4.B.6a) de l'inclusion des ensembles estimés.
Utilisant la loi numérique aléatoire modélisant $f_{A/I\pi(3)}(i)$, on obtient donc que chaque terme non nul de $S_{I\pi(3)}(k)$ a une probabilité $p_{iA}p_{k\text{-}iA}/(p_{iI\pi(3)})^2$ d'être égal à1.

Utilisant les 3 propriétés précédentes, on obtient que dans le modèle MIπ(3), r(k) est modélisée par une variable aléatoire $X_{I\pi(3)}(k)$ d'espérance mathématique telle que :

$$E(X_{I\pi(3)}(k)) \approx \frac{p_{iI\pi(3)}}{p_{iI}} \times \frac{1}{2} \times (\frac{p_{iI}}{p_{iI\pi(3)}})^2 \times E(X_I r(k)) \approx \frac{1}{2} \times \frac{p_{iI}}{p_{iI\pi(3)}} \times \frac{k}{(Log(k))^2}$$

Donc :

$$E(X_{I\pi(3)}(k)) \approx \frac{3}{4} \times \frac{k}{(Log(k)^2)} = C_{I\pi(3)}(k) \times \frac{k}{(Log(k))^2}$$

On obtient donc un équivalent de $E(X_{I\pi(3)}(k))$ en multipliant $E(X_I(k))$, (ou $k/(Log(k))^2$) par ¾, c'est-à-dire 0.75.
On remarque CIπ(3) (k)=0.75 est proche de $C_2 \approx 0.66$, où C_2 est la constante intervenant dans la Conjecture de Hardy et Littlewood [(5)(7)] .
On voit donc que dans le nouveau modèle MIπ(3), on doit s'attendre à trouver des bandes situées en dessous de la courbe $(k,k/(Log(k))^2)$, contrairement aux modèles MI et MI(k), et effectivement on observe que la courbe $(k,k/(Log(k))^2)$ est très voisine de la courbe inférieure de la Comète de Goldbach (légèrement au dessus).

On pourrait se demander ce que donnerait le modèle MIπ(5) analogue au modèle MIπ(3), utilisant l'ensemble $I_\pi(5)$ de la même façon qu'on a utilisé l'ensemble $I_\pi(3)$.
En procédant de la même façon que précédemment, considérant un naturel k n'ayant aucun diviseur premier autre que 2, on obtient que k doit être congru à 2,4,6 ou 8 modulo 10. De plus les éléments de $I_\pi(5)$ sont ceux congrus à 1,3,7,9 modulo 10.
Si par exemple k est congru à 2 modulo 10, on obtient que pour i dans $I_\pi(5)$, k-i est congru à 1,9,5,3 modulo 10, et donc un terme sur 4 de la somme $S_{I\pi(5)}(k)$ (exactement analogue à $S_{I\pi(3)}(k)$) est nul (ceux tels que k-i est congru à 5 modulo 10).(On vérifie qu'on obtient le même résultat si k congru à 4,6 ou 8 modulo 10).

On obtient donc des propriétés complètement analogues à celles a)b)c) du modèle MIπ(3), et donc :

$$E(X_{I\pi(5)}(k) \approx \frac{3}{4}\times\frac{p_{iI}}{p_{iI\pi(5)}}\times\frac{k}{(Log(k))^2}=\frac{15}{16}\times\frac{k}{(Log(k))^2}$$

L'effet de correction du modèle MIπ(5) est donc moindre que celui de MIπ(3).

Si on veut tenir compte des 2 modèles MIπ(3) et MIπ(5), on considère le modèle MIπ(3,5), utilisant l'ensemble $I_\pi(3,5)$, qu'on a défini comme l'ensemble des naturels impairs ni multiples de 3 ni multiple de 5.
Procédant comme précédemment, on considère un naturel k tel que k n'ait aucun diviseur premier autre que 2. Donc k est congru à un des naturels 2,4,8,14,16 ,22,24,26 ou 28 modulo 30. Prenons par exemple k congru à 28 modulo 30.
De plus, $I_\pi(3,5)$ contient les naturels congrus à un des naturels 1,7,11,13,17,19,23 ou 29 modulo 30. Donc $p_{iI\pi(3,5)}$ =8/30.
Pour i dans $I_\pi(3,5)$, on obtient donc k-i congru à un des naturels 27,21,17,15,11,9,5,29. Donc 5/8 des termes de $S_{I\pi(3,5)}$ (k) s'annulent. (Ceux pour lesquels k-i est congru à 27,21,15,9 et 5 modulo 30).
Il en résulte que 5/8 des termes de $S_{I\pi(3,5)}$ (k) s'annulent. Utilisant donc des propriétés analogues aux propriétés a)b)c) du modèle MIπ(3), on obtient avec des notations analogues :

$$E(X_{I\pi(3,5)}(k)) \approx \frac{3}{8}\times\frac{30}{8}\times\frac{1}{2}\times\frac{k}{(Log(k))^2}=\frac{90}{128}\times\frac{k}{(Log(k))^2}$$

On remarque :

$$E(X_{I\pi(3,5)}(k)) \approx \frac{90}{128}\times\frac{k}{(Log(k))^2}=(1-\frac{1}{(3-1)^2})(1-\frac{1}{(5-1)^2})\frac{k}{(Log(k))^2}$$

$$E(X_{I\pi(3,5)}(k)) \approx C_{I\pi(3,5)}(k)\frac{k}{(Log(k))^2}$$

avec $C_{I\pi(3,5)}(k)$ très proche de C_2, C_2 étant la constante intervenant dans la Conjecture de Hardy et Littlewood.
On rappelle que d'après cette Conjecture [(5)] [(7)] :

$$r(k) \approx 2C_2\prod_{p/k,p\geq 3}(\frac{p-1}{p-2})\times\frac{k}{(Log(k))^2}$$, avec :

$C_2 = \prod_{p \geq 3} (1 - \frac{1}{(p-1)^2}) \cong 0{,}66$, p désignant un nombre premier dans les expressions précédentes.

On a vu en introduction qu'elle était fausse, mais il semble que sa variante obtenue en supprimant le facteur 2 soit vraie, et puisse être extrêmement approchée par le propositions obtenues par la TAN concernant la modélisation statistique de r(k).

Considérons maintenant le modèle dans lequel k a plusieurs diviseurs mais n'est pas divisible par 3. On note alors I(k)π(3) l'ensemble I(k)∩Iπ(3), et MI(k)π(3) le modèle analogue au modèle MIπ(3) s'appliquant aux naturels k pairs non divisibles par 3.

Dans le modèle MI(k), on a écrit r(k) sous la forme, de façon analogue au modèle MI :

$r(k)=C_{I(k)}(k)+S_{I(k)}(k)$, avec :

$$S_{I(k)}(k) = \sum_{i \in I(k), 500 < i < k/2} f_A(i) f_A(k-i) \quad .$$

Dans le modèle MI(k)π(3), de façon analogue au modèle MIπ(3), on considère seulement les termes de SI(k)(k) qui ne sont pas multiples de 3.On obtient la somme $S_{I(k)\pi(3)}(k)$:

$$S_{I(k)\pi(3)}(k) = \sum_{i \in I(k)\pi(3), 500 < i < k/2} f_A(i) f_A(k-i) \quad .$$

Considérant l'ensemble I(k)π(3), on obtient comme précédemment que la somme $S_{I(k)\pi(3)}(k)$ ne comporte que la proportion $p_{iI(k)\pi(3)}/p_{iI}$ des termes de $S_I(k)$.

D'autre part, puisque k n'est pas divisible par 3, on a toujours k congru à 2 ou 4 modulo 6. Supposons par exemple k congru à 2 modulo 6.

Supposons $I(k)=I_\pi(p_{1k},\ldots,p_{nk})$. On a alors $I(k)\pi(3)=I_\pi(3,p_{1k},\ldots,p_{nk})$. Soit $n_1(k,3)/n(k,3)$ la proportion des éléments de $\mathbf{N}/6p_{1k}..p_{nk}\mathbf{N}$ congrus à 1 modulo 6, et $n_5(k,3)/n(k,3)$ la proportion de ceux congrus à 5 modulo 6. On obtient alors que la proportion $n_5(k,3)/n(k,3)$ des termes de $S_{I(k)\pi(3)}(k)$ sont nuls, car pour i congru à 5 modulo 6, alors k-i=2-5 congru à 3 modulo 6 et donc n'est pas premier. Dans tous les exemples considérés, on aura :

$$\frac{n_1(k,3)}{n(k,3))} = \frac{n_5(k,3)}{n(k,3)} = \frac{1}{2}$$

De plus, si on considère un terme non nul de cette somme correspondant à i, on sait que i appartient à I(k)π(3), et donc on peut écrire $f_A(i)$ sous la forme $f_{A/I(k)\pi(3)}(i)$. De plus on sait que k-i appartient à I(k) (car i appartient à I(k)), et k-i

appartient à $I_{\pi}(3)$. (Puisque k-i est congru à 1 modulo 6). Il en résulte que k-i appartient à I(k)π(3), et donc on peut écrire tout terme non nul de la somme $S_{I(k)\pi(3)}$ (k) sous la forme $f_{A/I(k)\pi(3)}$ (i)$f_{A/I(k)\pi(3)}$ (k-i).

Il en résulte qu'on obtient des propriétés totalement analogues aux propriétés a)b)c) du modèle MIπ(3), dont on déduit que la modèle MI(k)π(3) prévoit que r(k) est modélisé par la variable aléatoire $X_{I(k)\pi(3)}$ r(k) , avec :

$$E(X_{I(k)\pi(3)}r(k)) \approx \frac{p_{iI(k)\pi(3)}}{p_{iI}} \times \frac{n_1(k,3)}{n(k,3)} \times (\frac{p_{iI}}{p_{iI(k)\pi(3)}})^2 \times \frac{k}{(Log(k))^2}$$

$$E(X_{I(k)\pi(3)}r(k)) \approx \frac{1}{2} \times \frac{p_{iI}}{p_{iI(k)\pi(3)}} \times \frac{k}{(Log(k))^2}$$

D'après l'expression d'un équivalent de $E(X_{I(k)}$ r(k)), on voit qu'on obtient un équivalent de $E(X_{I(k)\pi(3)}$ (k) en multipliant $E(X_{I(k)}$ r(k)) par le coefficient $c_{I(k)\pi(3)}$ (k)=0.5 $p_{iI(k)}$ /$p_{iI(k)\pi(3)}$ (k).

Car on a vu :

$$E(X_{I(k)}r(k)) \approx \frac{p_{iI}}{p_{iI(k)}} \times \frac{k}{(Log(k)^2)}$$

Donnons quelques exemples numériques :

Dans le cas où I(k)=$I_{\pi}(5)$ (k n'a que 5 et 2 pour diviseurs premiers.), on obtient que $I_{\pi}(5)$ contient l'ensemble des naturels congrus à 1,3,7,9 modulo 10, et donc on a alors $p_{iI(k)}$ =4/10.

On a alors I(k)π(3)=$I_{\pi}(3,5)$, et donc I(k)π(3) contient les naturels congrus à 1,7,11,13,17,19,23,29 modulo 30, donc $p_{iI(k)\pi(3)}$ =8/30.

On obtient le coefficient :

$$c_{I(k)\pi(3)}(k) = \frac{1}{2} \times \frac{p_{iI(k)}}{p_{iI(k)\pi(3)}} = \frac{1}{2} \times \frac{30}{8} \times \frac{2}{5} = 0.75$$

On obtient donc :

$$E(X_{I(k)\pi(3)}r(k)) \approx \frac{3}{4} \times \frac{p_{iI}}{p_{iI(k)}} \times \frac{k}{(Log(k))^2} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{k}{(Log(k))^2}$$

Donc :

$$E(X_{I(k)\pi(3)}r(k)) \approx C_{I(k)\pi(3)}(5) \times (\frac{5-1}{5-2}) \times \frac{k}{(Log(k))^2}$$

Avec :

$$C_{I(k)\pi(3)}(5) = (1 - \frac{1}{(3-1)^2}) \times (1 - \frac{1}{(5-1)^2}) \cong C_2$$

La prédiction du modèle MI(k)π(3) dans cet exemple est donc très proche de la variante de la Conjecture de Hardy et Littlewood.

Dans le cas où I(k)=$I_\pi(7)$, on obtient que $I_\pi(7)$ contient les naturels congrus à 1,3,5,9,11,13 modulo 14, donc $p_{iI(k)}$ =6/14.
I(k)π(3)=Iπ(3,7) contient les naturels congrus à 1,5,11,13,17,19,23,25,29,31,37,41 modulo 42, et donc $p_{iI(k)\pi(3)}$ =12/42.
On obtient le coefficient :

$$\frac{1}{2} \times \frac{p_{iI(k)}}{p_{iI(k)\pi(3)}} = \frac{1}{2} \times \frac{42}{12} \times \frac{6}{14} = 0.75$$

On obtient en procédant comme dans l'exemple précédent :

$$E(X_{I(k)\pi(3)} r(k)) \approx C_{I(k)\pi(3)}(7) \times (\frac{7-1}{7-2}) \times \frac{k}{(Log(k))^2}$$

Avec :

$$C_{I(k)\pi(3)}(7) = (1 - \frac{1}{(3-1)^2}) \times (1 - \frac{1}{(7-1)^2}) \cong C_2$$

La prédiction du modèle MI(k)π(3) dans cet exemple est donc très proche de la variante de la Conjecture de Hardy et Littlewood.

On voit que le modèle MI(k)π(3) a la même prédiction que le modèle MIπ(3) dans le cas où k n'a aucun autre diviseur premier que 2 (On a alors I(k)=I). Le coefficient était alors de 0.75, et on voit donc qu'en général ce coefficient $c_{I(k)\pi(3)}$ (k) semble être égal à 0.75.
Dans le cas où k est divisible par 3, le modèle MI(k)π(3) n'apporte aucune amélioration, car alors I(k) est inclus dans Iπ(3) et de plus k est congru à 0 modulo 6. On peut donc considérer que MI(k)π(3) coïncide dans ses prévisions avec MI(k) lorsque k est divisible par 3.

On observe que la courbe $(k,0.75/(Log(k))^2)$ (obtenue dans le modèle MI(k)π(3) dans le cas où k a 2 pour seul diviseur premier) semble être très proche de la courbe inférieure de la Comète de Goldbach, par exemple:
$m_{I(k)\pi(3)}$ (10000)≈88, $m_{I(k)\pi(3)}$ (50000)≈ 320, $m_{I(k)\pi(3)}$ (75000)≈446, $m_{I(k)\pi(3)}$ (90000)≈518.
Avec $m_{I(k)\pi(3)}(k) = E(X_{I(k)\pi(3)}r(k))$

Pour vérifier la validité de MI(k)π(3), on peut considérer les nombres de la forme 2^n, avec n grand. On devrait obtenir $r(2^n) \approx m_{I(k)\pi(3)}(2^n) \approx 0.75\times 2^n/(nLog(2))^2$.

On pourrait ensuite étudier les naturels de la forme 2^n3^s, (avec s>1) qui n'ont que 3 pour seul diviseur premier autre que 2, et donc dont on peut facilement estimer $m_{I(k)\pi(3)}$ (k) qui est alors identique à $m_{I(k)}$ (k) comme on l'a vu.
Ce cas d'ailleurs est très intéressant : En effet, d'après ce qui précède, pour $I(k)=I_\pi(3)$:
$m_{I(k)}(k) \approx pi_I/p_{iI(k)}\, k/(Log(k))^2 = 1.5k/(Log(k))^2$.
On obtient alors utilisant cette expression :
$m_{I(k)}$(50000)≈640, $m_{I(k)}$(75000)≈892, $m_{I(k)}$(90000)≈1037.

On remarque dans le cas précédent:
$$E(X_{I(k)\pi(3)}r(k)) \approx \frac{3}{2}\times\frac{k}{(Log(k))^2} = (\frac{3-1}{3-2})\times(1-\frac{1}{(3-1)^2})\times\frac{k}{(Log(k))^2}$$
Donc :
$$E(X_{I(k)\pi(3)}r(k)) \approx C_{I(k)\pi(3)}(3)\times(\frac{3-1}{3-2})\times\frac{k}{(Log(k))^2}$$
Avec $C_{I(k)\pi(3)}(3)$ très proche de C_2. On retrouve que la prédiction dans cet exemple du modèle MI(k)π(3) est très proche de la variante de la Conjecture de Hardy et Littlewood.

On observe que les points $(k,m_{I(k)}(k))$ pour $k=2^n3^s$ se trouvent très proches de l'une des bandes les plus froncées de la Comète de Goldbach, ce qui donc tend à confirmer la validité du modèle MI(k) (coïncidant MI(k)π(3) puisque k est divisible par 3). On rappelle qu'on peut aussi le tester en calculant $r(2^n3^s)$ pour certaines valeurs de s et de n, et en les comparant avec l'estimation de MI(k) donnée précédemment.

On voit donc que le modèle MI(k)π(3) conduit à obtenir pour tout k supérieur à 1002, que la fonction r(k) est modélisée par la variable aléatoire

$X_{I(k)\pi(3)}r(k)$ définie précédemment. Ceci constitue une loi numérique aléatoire, qui est illustrée apparemment par certains tests.

Le modèle MI(k)π(3) prévoit notamment l'existence de bandes d'équation $f(k)=C_k k/(Log(k))^2$, comme on en observe sur la Comète de Goldbach. Ceci est dû aux 2 propriétés suivantes de $X_{I(k)\pi(3)}r(k)$:

a)$E(X_{I(k)\pi(3)}r(k)) \approx C_k k/(Log(k))^2$, où C_k est une constante dépendant des diviseurs premiers de k.

b)On obtient utilisant l'inégalité de Chebychev que les intervalles de confiance minimaux à 95% (ou de façon évidente 99,9%) de $X_{I(k)\pi(3)}r(k))$, notés $[miG_{I(k)\pi(3)}(k), MaG_{I(k)\pi(3)}(k)]$ sont tels que $(MaG_{I(k)\pi(3)}(k)-miG_{I(k)\pi(3)}(k))/E(X_{I(k)\pi(3)}r(k))$ tend vers 0 pour k tend vers l'infini.

Il apparaît donc que le modèle MI(k)π(3) entraîne des prédictions remarquables concernant l'aspect de la Comète de Goldbach. De la même façon qu'on a défini les modèles MI(k)π(3) et MI(k)π(3,5), on peut définir le modèle $MI(k)\pi(p_1,\ldots,p_n)$ où $p_1,\ldots,p_n$ sont les n premiers nombres premiers consécutifs après 2. Il est évident que dans tout modèle $MI(k)\pi(p_1,\ldots,p_n)$, on peut obtenir par des pseudo-preuves aléatoires des propositions $P(I_{I(k)\pi(p1,\ldots,pn)}(k),q)$ analogues aux propositions P(I(k),q) obtenues dans le modèle MI. Comme on l'a remarqué en considérant les modèles MI(k)π(3) et MI(k)π(3,5), il semble que les modèles $MI(k)\pi(p_1,\ldots,p_n)$ permettent d'obtenir des propositions qui tendent quand n tend vers l'infini vers la variante de la Conjecture étendue de Goldbach de Hardy et Littlewood, obtenue en supprimant un facteur 2 dans la Conjecture initiale.

On pourrait montrer ceci explicitement, en montrant que si $I(k)=I_\pi(p_{1k},\ldots,p_{sk})$, alors dans le modèle $MI(k)\pi(p_1,\ldots,p_n)$, on obtient :

$$E(X_{I(k)\pi(p1,\ldots,pn)}r(k)) \approx C_{I(k)\pi(p1,\ldots,pn)}(p_{1k},\ldots,p_{sk})\prod_{i=1}^{s}(\frac{p_{ik}-1}{p_{ik}-2})\times\frac{k}{(Log(k))^2}$$

avec $C_{I(k)\pi(p1,\ldots,pn)}(p_{1k},\ldots,p_{sk})$ tend vers C_2 quand n tend vers l'infini. On a vérifié que ceci était en accord avec tous les exemples numériques considérés. Ceci se ramène donc apparemment à un problème résoluble par la Théorie des nombres classiques.

Pour le montrer, on utilisera le Théorème :

THEOREME 4.B.6Ba)) :

Si $p_1,\ldots,p_n$ sont n naturels premiers et $A(p_1,\ldots,p_n)=\{1,\ldots,2p_1\ldots p_n\}$ (C'est-à-dire A est l'ensemble des naturels de $[1,2p_1\ldots p_n]$), si $p(A(p_1,\ldots,p_n))=\{$i appartenant à $A(p_1,\ldots,p_n)$ tel que i n'est divisible par aucun des nombres $2,p_1,\ldots,p_n\}$ alors :

$Card(p(A(p_1,..,p_n))=(p_1-1)\times\ldots\times(p_n-1)$.

Démonstration (par récurrence) :

Si n=1 :
$A(p_1)=\{1,\ldots,2p_1\}$.
Les éléments de $A(p_1)$ non divisibles par 2 sont les éléments de $\{1,\ldots.,2p_1-1\}$ au nombre de p_1. Parmi ceux-ci, seul le naturel p_1 est divisible par p_1.
Donc $Card(p(A(p_1))=p_1-1$.

Supposons qu'on ait montré le Théorème pour n-1. Soit alors $p_1,\ldots.,p_n$ n nombres premiers.
On définit alors $p(A(p_1,\ldots.,p_{n-1}))=\{h_{1,n-1},\ldots.,h_{s,n-1}\}$, avec $s=Card(p(A(p_1,\ldots,p_{n-1}))$.
Les éléments de $A(p_1,\ldots.,p_n)$ qui ne sont pas divisibles par $2,p_1,\ldots,p_{n-1}$ sont ceux congrus à $h_{1,n-1},\ldots,h_{s,n-1}$ modulo $2p_1\ldots p_{n-1}$, et donc sont les éléments de l' ensemble : $\{h_{1,n-1},\ldots.,h_{s,n-1}, \quad 2p_1\ldots p_{n-1}+h_{1,n-1},\ldots,2p_1\ldots p_{n-1}+h_{s,n-1},\ldots.,2p_1\ldots p_{n-1}(p_n-1)+h_{1,n-1},.,2p_1\ldots p_{n-1}(p_n-1)+h_{s,n-1}\}$.
L'ensemble précédent a de façon évidente $p_nCard(p(A(p_1,\ldots,p_{n-1}))$ éléments.
De plus les éléments de l'ensemble précédent divisibles par p_n sont de la forme ap_n, avec a n'est pas divisible par $2,p_1,\ldots,p_{n-1}$, c'est-à-dire a appartient à $p(A(p_1,\ldots,p_{n-1}))$.
Il y en a donc un nombre égal à $Card(p(A(p_1,\ldots,p_{n-1}))$
Il en résulte que $p(A(p_1,\ldots,p_n))$ qui est l'ensemble précédent privé de ses éléments divisibles par p_n a un nombre d' éléments égal à $(p_nCard(p(A(p_1,\ldots,p_{n-1})))-Card(p(A(p_1,\ldots,p_{n-1}))$ c'est-à-dire $(p_n-1)Card(p(A(p_1,\ldots,p_{n-1}))$.
On a donc montré par récurrence le Théorème.

Une conséquence immédiate de ce Théorème est le Corollaire :

COROLLAIRE 4.B.6Bb) :

Si on a $I(k)=I_\pi(p_1,\ldots.,p_n)$, alors :

$$p_{iI(k)} = \frac{1}{2}\times\prod_{j=1}^{n}(\frac{p_j-1}{p_j}) .$$

La démonstration est immédiatement conséquence du Théorème précédent si on considère les naturels modulo $2p_1\ldots p_n$.

REMARQUE 4.B.6Bc) :

On a vu que dans le modèle MI(k) on avait :

$$E(X_{I(k)}r(k)) \approx \frac{p_{iI}}{p_{iI(k)}} \times \frac{k}{(Log(k))^2}$$

Utilisant le Corollaire précédent, on obtient, si $I(k)=I_\pi(p_1,\ldots,p_n)$:

$$\frac{p_{iI}}{p_{iI(k)}} = \prod_{j=1}^{n} \frac{p_j}{(p_j - 1)} = \prod_{j=1}^{n} \frac{p_j - 1}{p_j - 2} \times \prod_{j=1}^{n} (1 - \frac{1}{(p_j - 1)^2})$$

On voit que cette expression est proche de la variante de la Conjecture de Hardy et Littlewood.

Ce qui précède permet de comparer les prédictions du modèle MI(k) avec la variante de la Conjecture d Hardy et Littlewood. Pour comparer celle-ci avec le modèle plus précis $MI(k)\pi(p_1,\ldots,p_n)$, on procède comme suit :

Montrons le Théorème :

THEOREME 4.B.6Bd) :

Si k est un naturel pair de $A(p_1,\ldots,p_n)$ (défini plus haut de même que $p(A(p_1,\ldots,p_n))$, divisible par aucun des nombres premiers $p_1,..,p_n$, si on pose :

$d_k(p(A(p_1,\ldots,p_n))=\{i/$ i et k-i n'est divisible par aucun des naturels $p_1,\ldots,p_n))\}$

Alors $Card(d_k(p(A(p_1,\ldots,p_n)))=(p_1-2)\ldots(p_n-2)$.

Démonstration (Par récurrence) :

Montrons d'abord le Lemme :

LEMME 4.B.6Be) :

k étant un élément quelconque de $A(p_1,\ldots,p_n)$, l'ensemble des éléments de $A(p_1,\ldots,p_n)$ congrus à k modulo p_n, contient exactement un représentant de chaque élément de $\mathbf{N}/(2p_1..p_{n-1})\mathbf{N}$, et est égal à l'ensemble de ces représentants.

Démonstration :

Soit k dans $A(p_1,\ldots,p_n)$. (On rappelle $A(p_1,\ldots,p_n)=\{1,\ldots,2p_1\ldots p_n\}$)
On suppose k congru à k_n modulo p_n, avec k_n dans $\{1,\ldots,p_n\}$.
L'ensemble des naturels de $A(p_1,..,p_n)$ congrus à k modulo p_n est donc l'ensemble des naturels k_n+ap_n avec a naturel appartenant à $[0,2p_1\ldots p_{n-1}-1]$. Il a donc $2p_1\ldots p_{n-1}$ éléments.

Supposons qu'un de ces naturels k_n+ap_n différent de k_n soit congru à k_n modulo $2p_1\ldots.p_{n-1}$.
Alors on a $ap_n=2\lambda p_1\ldots.p_{n-1}$.(Avec $\lambda>0$).
Comme p_n est premier avec $2,\ldots,p_{n-1}$, p_n divise λ, donc $\lambda=sp_n$, s étant un naturel non nul, et donc $a=2sp_1\ldots.p_{n-1}$.
Ceci est impossible car $a<2p_1\ldots p_{n-1}$.

Donc aucun des naturels de la forme k_n+ap_n de $A(p_1,\ldots,p_n)$ n'est congru à k_n modulo $2p_1\ldots p_{n-1}$.
Il est évident qu'on arrive de la même façon au même résultat pour tout naturel k_n+ap_n de $A(p_1,\ldots,p_n)$, c'est-à-dire qu'aucun des naturels k_n+bp_n de $A(p_1,\ldots,p_n)$ n'est congru à k_n+ap_n modulo $2p_1..p_{n-1}$ si $a\neq b$.
Or on sait que le nombre d' éléments de $\mathbf{N}/2p_1\ldots.p_{n-1}\mathbf{N}$ est égal à $2p_1\ldots p_{n-1}$, c'est-à-dire au nombre de naturels s'écrivant k_n+ap_n de $A(p_1,\ldots,p_n)$.
Il en résulte que l'ensemble des éléments de $A(p_1,\ldots p_n)$ congrus à k modulo p_n (C'est-à-dire des naturels de la forme k_n+ap_n) contient exactement un représentant de chaque élément de $\mathbf{N}/2p_1\ldots p_{n-1}\mathbf{N}$, et est égal à l'ensemble de ces représentants.
On a donc démontré le Lemme.

Montrons le Théorème pour n=1 :
On a ,p_1 étant un nombre premier, $A(p_1)=\{1,\ldots,2p_1\}$.
$p(A(p_1))=\{1,..,2p_1-1\}$(sans p_1), et a p_1-1 éléments.
Si k est un naturel pair de $A(p_1)$ non divisible par p_1, on a $k=2s$, avec $s\neq p_1$, et ou bien $1<k<p_1$, ou bien $p_1<k<2p_1$.
Si j appartient à $p(A(p_1))$, $k-j=2s-j$ est impair et donc n'est pas divisible par 2.
De plus k-j est divisible par p_1 si $k-j=\alpha p_1$, α étant un entier, c'est-à-dire $j=k-\alpha p_1$.
Si $1<k<p_1$, il y a une seule solution j dans $p(A(p_1))$:$j=k+p_1$.
Si $p1<k<2p_1$, il y a une seule solution j dans $p(A(p_1))$:$j=k-p_1$.
Puisqu'on a défini $d_k(p(A(p_1))$ comme l'ensemble des naturels i de $p(A(p_1))$ tels que k-i non divisible par 2 ni par p_1, on a donc :
$Card(d_k(p(A(p_1)))=p_1-2$. (Car $d_k(A(p_1)))$ est constitué de $p(A(p_1))$ privé de j).
On a donc démontré le Théorème pour n=1.

Supposons qu'on ait démontré le Théorème pour $d_k(p(A(p_1,\ldots,p_{n-1})))$.
On a vu qu'on pouvait écrire :
$p(A(p_1,\ldots,p_{n-1}))=\{h_{1,n-1},\ldots.,h_{s,n-1}\}$, avec $s=(p_1-1)\ldots(p_{n-1}-1)\}$.
On a vu que $p(A(p_1,\ldots,p_n))$ était constitué de l'ensemble B défini par :
$B=\{h_{1,n-1},\ldots,h_{s,n-1},\ldots..,2p_1..p_{n-1}(p_n-1)+h_{1,n-1},..,2p_1..p_{n-1}(p_n-1)+h_{s,n-1}\}$
privé des naturels de la forme ap_n, avec a dans $p(A(p_1,\ldots,p_{n-1}))$.

k étant un naturel pair de $A(p_1,..,p_n)$ divisible par aucun des naturels $p_1,..,p_n$, on rappelle que $d_k(p(A(p_1,\dots,p_{n-1})))$ est l'ensemble des éléments i de $p(A(p_1,..p_{n-1}))$ tel que k-i n'est divisible par aucun des naturels $p_1,\dots,p_{n-1}$.
Soit $d_k(p(A(p_1,\dots,p_{n-1})))=\{t_{1,n-1},\dots,t_{r,n-1}\}$, avec $r=(p_1-2)\dots(p_{n-1}-2)$ d'après l'hypothèse de récurrence.
Soit $C=\{t_{1,n-1},\dots,t_{r,n-1},\dots,2p_1..p_{n-1}(p_n-1)+t_{1,n-1},..,2p_1..p_{n-1}(p_n-1)+t_{r,n-1}\}$.
C est donc l'ensemble des éléments i de B tel que k-i ne soit pas divisible par un des naturels $p_1,\dots p_{n-1}$.
Il est évident $Card(C)= p_n r =p_n(p_1-2)\dots(p_{n-1}-2)$.
On a défini $d_k(p(A(p_1,\dots p_n)))$ comme étant l'ensemble des naturels i de $p(A(p_1,\dots,p_n))$ tel que k-i ne soit divisible par aucun des naturels premiers $p_1,\dots,p_n$.
Donc $d_k(p(A(p_1,\dots,p_n))$ est inclus dans C, car tout élément i de $d_k(p(A(p_1,..p_n)))$ appartient à B et est tel que k-i n'est divisible par aucun des naturels $2,p_1,\dots,p_{n-1}$.
De plus tout élément i de C tel que :
-i n'est pas de la forme ap_n, avec a dans $p(A(p_1,\dots,p_{n-1}))$.
-k-i n'est pas divisible par p_n.
est tel que i appartient à $d_k(p(A(p_1,..,p_n)))$, car alors i appartient à $p(A(p_1,\dots,p_n)$ et k-i n'est divisible par aucun des naturels $p_1,\dots,p_n$.
Donc si on définit les ensembles D et E par :
$D=\{i/$ i appartient à C et k-i est divisible par $p_n\}$
$E=\{i/$ i appartient à C et i est de la forme ap_n, avec a dans $p(A(p_1,\dots,p_{n-1}))\}$
On a alors $d_k(p(A(p_1,\dots,p_n)))=C/(DUE)$.
De plus si i appartient à E, alors i n'appartient pas à D puisque k n'est pas divisible par p_n. Donc D et E ont une intersection vide, et donc :
Card(C/(DUE))=Card(C)-Card(D)-Card(E).
Or D est l'ensemble des naturels i de $A(p_1,\dots,p_n)$ congrus à k modulo p_n, tel que i ne soit pas divisible par $p_1,\dots,p_{n-1}$ et que de plus k-i ne soit pas divisible par $p_1,\dots,p_{n-1}$.
Appliquant le Lemme 4B6Be) et d'après l'hypothèse de récurrence, le nombre d'éléments de D est donc :
$Card(D)=Card(d_k(p(A(p_1,\dots,p_{n-1}))))=(p_1-2)\dots(p_{n-1}-2)$.
De même, E est l'ensemble des naturels i de $A(p_1,..,p_n)$ congrus à p_n modulo p_n et tel que i soit divisible par aucun des nombres $p_1,\dots,p_{n-1}$ de même que k-i. Appliquant le Lemme 4B6Be) et d'après l'hypothèse de récurrence :
$Card(E)= Card(d_k(p(A(p_1,\dots,p_{n-1}))))=(p_1-2)\dots(p_{n-1}-2)$.
Finalement, on obtient :
$Card(d_k(p(A(p_1,\dots,p_n))))=p_n (p_1-2)\dots(p_{n-1}-2)- (p_1-2)\dots(p_{n-1}-2)- (p_1-2)\dots(p_{n-1}-2)$.
Donc $Card(d_k(p(A(p_1,\dots,p_n))))=(p_1-2)\dots(p_n-2)$.
On a donc démontré le Théorème 4.B6Bd).

On peut à partir du Théorème précédent obtenir une expression donnant un équivalent de E(Xr(k)) prédite par tout modèle $MI_\pi(p_1,\ldots,p_n)$, qui on l'a vu prédit la même expression que $MI(k)\pi(p_1,\ldots,p_n)$ lorsque k a 2 pour unique diviseur premier. On obtient cette expression dans l'exemple suivant :

EXEMPLE 4.B6Bf) :

Soit $p_1,\ldots,p_n$ n nombres premiers consécutifs après 2, et k un naturel n'ayant aucun diviseur autre que 2 (I(k)=I).
On a vu que dans le modèle $MI\pi(p_1,\ldots,p_n)$ (qui dans ce cas avait la même prédiction que le modèle $MI(k)\pi(p_1,..,p_n)$), on obtenait, généralisant le modèle MIπ(3) :

$$E(X_{I\pi(p1,..,pn)}r(k)) \approx \frac{n_{dk}(p_1,\ldots,p_n)}{n(p_1,\ldots,p_n)} \times \frac{p_{iI}}{p_{iI\pi(p1,\ldots,pn)}} \times \frac{k}{(Log(k))^2}$$

avec $n_{dk}(p_1,\ldots,p_n)$ est l'ensemble des éléments de $\mathbf{N}/2p_1\ldots p_n\mathbf{N}$ tels que k-i ne soit divisible par aucun des nombres $p_1,\ldots,p_n$, et $n(p_1,\ldots,p_n)$ est le nombre d'éléments de $\mathbf{N}/2p_1\ldots p_n\mathbf{N}$.
D'après les Théorèmes 4.B6Ba)b)d), on obtient :

$$E(X_{I\pi(p1,\ldots,pn)}r(k)) \approx$$

$$\prod_{j=1}^{n}\frac{(p_j-2)}{(p_j-1)} \times \prod_{j=1}^{n}\frac{(p_j-1)}{(p_j-2)} \times \prod_{j=1}^{n}(1-\frac{1}{(p_j-1)^2}) \times \frac{k}{(Log(k))^2}$$

Donc :

$$E(X_{I\pi(p1,..,pn)}r(k)) \approx \prod_{j=1}^{n}(1-\frac{1}{(p_j-1)^2}) \times \frac{k}{(Log(k))^2}$$

Cette expression tend bien vers la variante de la Conjecture de Hardy et Littlewood.

Pour obtenir l'expression générale donnant un équivalent de E(Xr(k)) prédite par un modèle $MI(k)\pi(p_1,\ldots,p_n)$, on utilise aussi le Théorème suivant :

THEOREME 4B6Bg) :

Si $p_1,\ldots,p_n$ sont n nombres premiers et $q_1,\ldots,q_r$ sont r nombres premiers différents de $p_1,\ldots,p_n$, k étant un naturel pair non divisible par $p_1,\ldots,p_n$ alors le nombre d'éléments de l'ensemble $d_{k(p1,..,pn)}$ $(p(A(p_1,\ldots,p_n,q_1,..,q_r)))$ dont les éléments sont les éléments i de $p(A(p_1,\ldots,q_r))$ tels que k-i n'est pas divisible par $p_1,..,p_n$ est égal à $(q_1-1)\ldots.(q_r-1)(p_1-2)\ldots(p_n-2)$.
(Et donc la proportion des éléments i de $p(A(p_1,\ldots,q_r))$ tels que k-i n'est pas divisible par $p_1,..,p_n$ est la même que celle des éléments j de $p(A(p_1,\ldots,p_n))$ tels que k-j n'est pas divisible par $p_1,..,p_n$, d'après les Théorèmes 4B6Ba) et 4B6Bd).

Démonstration (Par récurrence) :

Soit k, naturel pair non divisible par $p_1,..,p_n$.
On suppose r=1.
Soit $p(A(p_1,\ldots,p_n))=\{h_{1,n},\ldots,h_{s,n}\}$.
L'ensemble des éléments de $A(p_1,..,p_n,q_1\}$ non divisibles par $p_1,..p_n$ est donc :
$B=\{h_{1,n},\ldots h_{s,n},p_1\ldots p_n+h_{1,n},..,p_1..p_n+h_{s,n},..,p_1..p_n(q_1-1)+h_{1,n},..,p_1..p_n(q_1-1)+h_{s,n}\}$
Parmi ceux-ci, d'après le Théorème 4B6Bd), il y a $q_1(p_1-2)..(p_n-1)$ éléments i tels que k-i n'est pas divisible par $p_1,..,p_n$.
Soit C l'ensemble de ces éléments.
L'ensemble $d_{k(p1,\ldots,pn)}$ $(p(A(p_1,\ldots,p_n,q_1)))$ est donc constitué des éléments i de C tels que :
a)i n'est pas divisible par q_1.
b)k-i n'est pas divisible par $p_1,..,p_n$.
La condition b) est vérifiée pour tous les éléments de C.
De plus, utilisant le Lemme 4B6Be), si D={i/ i appartient à C et $i=aq_1$ pour un naturel a}, on sait que l'ensemble des naturels de $A(p_1,..,p_n,q_1)$ congrus à q_1 modulo q_1 contient exactement un représentant de chaque élément de $\mathbf{N}/2p_1\ldots p_n\mathbf{N}$, et est constitué de ces représentants, et donc D est constitué de chaque représentant i appartenant à $p(A(p_1,..,p_n))$ et tel que k-i n'est pas divisible par $p_1,..,p_n$. D'après le Théorème 4B6Bd), ce nombre est égal à $(p_1-2)..(p_n-2)$.
On a donc :
$Card(d_{k(p1,..,pn)}(p(A(p_1,..,p_n,q_1)))=Card(C)-Card(D)=(q_1-1)(p_1-2)..(p_n-2)$.

Supposons qu'on ait montré le Théorème pour $d_{k(p1,..pn)}(p(A(p_1,..,p_n,q_1,..,q_{r-1})))$.
On procède alors exactement comme dans le cas r=1 :
Soit $p(A(p_1,\ldots,q_{r-1}))=\{h_{1,n,r-1},\ldots.,h_{s,n,r-1}\}$
L'ensemble des éléments de $A(p_1,\ldots,q_r)$ non divisibles par $p_1,..,q_{r-1}$ est donc :
$B=\{h_{1,n,r-1},\ldots h_{s,n,r-1},p_1\ldots p_n.q_1..q_{r-1}+h_{1,n,r-1},.,p_1..p_n\ldots q_{r-1}+h_{s,n,r-1},..,p_1..p_n..q_{r-1}(q_r-1)+h_{1,n,r-1},..,p_1..p_n..q_{r-1}(q_r-1)+h_{s,n,r-1}\}$

Parmi ceux-ci, d'après l'hypothèse de récurrence il y a $q_r(q_1-1)\ldots(q_{r-1}-1)(p_1-2)..(p_n-1)$ éléments i tels que k-i n'est pas divisible par $p_1,..,p_n$.
Soit C l'ensemble de ces éléments.
L'ensemble des éléments i de $p(A(p_1,..,q_r))$ tels que k-i n'est pas divisible par $p_1,..,p_n$ (Cest à dire les éléments de $d_{k(p1,..,pn)}$ $(p(A(p_1,..,p_n,\ldots,q_r)))$ est donc constitué des éléments i de C tels que :
a)i n'est pas de la forme aq_r.
b)k-i n'est pas divisible par $p_1,\ldots,p_n$.
Comme dans le cas r=1, la condition b) est toujours vérifiée.
Si on pose D={i appartenant à C, et $i=aq_r$}, on obtient exactement comme dans le cas r=1 utilisant le Lemme 4B6Be) que le nombre d'éléments de D est égal à, d'après l'hypothèse de récurrence :
$Card(D)=Card(d_{k(p1,..,pn)}(p(A(p_1,..,p_n,\ldots q_{r-1}))))= (q_1-1)\ldots(q_{r-1}-1)(p_1-2)..(p_n-1)$.
Finalement :
$Card(d_{k(p1,..,pn)}(p(A(p_1,..,p_n,\ldots q_r))))=Card(C)-Card(D)= (q_1-1)..(q_r-1)(p_1-2)..(p_n-2)$.
On a donc montré le Théorème.

D'après ce qui précède, on obtient facilement l'expression donnant un équivalent de E(Xr(k)) prédite par un modèle quelconque $MI(k)\pi(p_1,..,p_n)$, avec $I(k)=I_\pi(t_1,\ldots,t_r)$, c'est-à-dire $t_1,..,t_r$ sont les diviseurs premiers de k autres que 2. De même qu'on a vu que si k était divisible par 3 la prédiction de MI(k)π(3) était la même que celle de MI(k), on peut considérer que si k a $t_1, \ldots t_r$ pour facteurs premiers autres que 2, alors la prédiction de $MI(k)\pi(p_1,\ldots,p_n)$ est celle de $MI(k)\pi(q_1,\ldots,q_s)$, où $q_1,\ldots,q_s$ sont les éléments de $\{p_1,..,p_n\}$ différents de $t_1,\ldots,t_r$.
On obtient alors facilement la prédiction de $MI(k)\pi(p_1,\ldots,p_n)$, utilisant les résultats de la Remarque 4B6Bc), ceux de l'Exemple 4B6Bf) et le Théorème 4B6Bg) :

$$E(X_{I(k)\pi(p1,\ldots,pn)}r(k)) \approx C_{I(k)\pi(p1,..,pn)}(t_1,\ldots,t_r) \times \frac{k}{(Log(k))^2}$$, avec :

$$C_{I(k)\pi(p1,\ldots,pn)}(t_1,..,t_r) = \prod_{i=1}^{s}(1-\frac{1}{(q_i-1)^2}) \times \prod_{j=1}^{r}(\frac{t_j-1}{t_j-2}) \times (1-\frac{1}{(t_j-1)^2})$$

On voit donc que cette expression tend asymptotiquement vers la variante de la Conjecture de Hardy et Littlewood.

On obtient alors, procédant exactement comme dans l'Etude de la fonction r(k) par le modèle simple MI 4B6A) une proposition $P2_{I(k)\pi(p1,\ldots,pn)}$ (r(k)) analogue à la proposition $P2_{MI}(r(k))$ donnant une estimation de r(k) obtenue par le modèle $MI(k)\pi(p_1,\ldots,p_n)$. Dans cette proposition la fonction r(k) est définie sur le sous-ensemble $F(t_1,\ldots,t_r)$ de **N** contenant les multiples pairs de $t_1,\ldots,t_n$ supérieurs à $2N_A=1002$. Et on a dans cette proposition :

$E(X_{I(k)\pi(p1,...,pn)}\, r(k)) \approx C_{I(k)\pi(p1,...,pn)}\, (t_1,...,t_r)k/(Log(k))^2$.

Il faudrait vérifier si cette variante est bien en accord avec la Comète de Goldbach. Si tel n'était pas le cas, cela signifierait qu'il faut trouver des modèles plus précis que les modèles du type $MI(k)\pi(p_1,\ldots,p_n)$. Il est très vraisemblable qu'on ne puisse jamais démontrer, utilisant seulement la Théorie des Nombres classiques des propositions analogues à celles qu'on obtient par la TAN décrivant la Comète de Goldbach utilisant les modèles $MI(k)\pi(p_1,\ldots,p_n)$ et donc en particulier la variante de la Conjecture de Hardy et Littlewood, tout comme la Conjecture faible de Goldbach.

De la même façon que le modèle MI est analogue au modèle équiprobable $M_{eq}I$ exposé dans l'article [(5)], et qu'on a défini un modèle $M_{eq}I\pi(p_1,\ldots,p_n)$ analogue au modèle indépendant $MI\pi(p_1,\ldots,p_n)$, on peut définir un modèle équiprobable $M_{eq}I(k)\pi(p_1,\ldots,p_n)$ analogue au modèle indépendant $MI(k)\pi(p_1,\ldots,p_n)$. On obtient facilement en procédant comme pour le modèle $M_{eq}I$, que chaque modèle indépendant et son analogue équiprobable ont une espérance équivalente quand k tend vers l'infini.

En réalité, la variante de la Conjecture de Hardy et Littlewood ne représente qu'approximativement les propriétés de la Comète de Goldbach pour k dans [5000,100000]. En effet d'après cette variante, on devrait trouver sur la Comète des points se rapprochant tangentiellement une de la courbe $(k,r_{min}(k))$ avec $r_{min}(k)=0.66k/(Log(k))^2$ correspondant aux naturels ayant 2 pour seul diviseur premier ou 2 et quelques autres diviseurs premiers grands. Or sur la comète de Goldbach, la courbe minimale observée présente une ordonnée nettement plus élevée que la courbe $y(k)=0.66k/(Log(k))^2$ (environ 15% en plus). On pourrait en conclure que le modèle $MI(k)\pi(p_1,..p_n)$ n'est pas assez précis puisqu'il conduit à obtenir la variante de la Conjecture de Hardy et Littlewood qui n'est pas illustrée par la Comète de Goldbach. Cependant, on peut interpréter cette différence de 15% d'une autre façon:

Comme on l'a vu dans l'Etude d'une fonction par la TAN 4A7a), on peut considérer que les tests illustrent partiellement la proposition $P2_{I(k)\pi(p1,\ldots pn)}\,(r(k))$, prenant $E(X_{I(k)\pi(p1,..,pn)}\, r(k)) \approx C_{I(k)\pi(p1,..,pn)}\, k/(Log(k))^2$. Ainsi, on peut penser que les tests effectués ne déterminent pas r(k) pour k assez grand pour que soit illustrée la proposition $P2_{I(k)\pi(p1,\ldots,pn)}\,(r(k))$ bien que celle-ci soit vraie.

Ainsi, on remarque que pour k dans [10000,90000], 1/Log(k) est de l'ordre de 10%. De plus pour obtenir la variante de Hardy et Littlewood, on a obtenu un équivalent de $E(X_{I(k)\pi(p1,\ldots,pn)}r(k))$ en utilisant :

$$\sum_{i=500}^{k/2} \frac{1}{Log(k)Log(k-i)} \approx \frac{k/2}{(Log(k))^2}$$

Or pour obtenir cette équivalence, on utilise l'inégalité :

$$\sum_{i=500}^{k/2} \frac{1}{Log(k)Log(k-i)} \geq \frac{k/2-500}{(Log(k))^2}$$

Et donc il est possible qu'un équivalent plus précis de $E(X_{I\pi(p1,\ldots,pn)}r(k))$ soit, utilisant une meilleure approximation du terme de gauche de l'inégalité précédente :

$$E(X_I r(k)) \approx \frac{k}{(Log(k))^2} \times (1 + \frac{\alpha}{Log(k)} + \frac{\beta}{(Log(k))^2}).$$

α et β étant 2 réels.
(On rappelle que pour obtenir $p_{iA}=1/Log(i)$ on utilise que A est un ensemble estimé d'estimation $a(n)=\int_{[2,n]} (1/Log(t))dt$, qui est la meilleure estimation simple de P(n), nombre de nombres premiers inférieurs à n).

Il est clair que pour k tend vers l'infini, 1/Log(k) tend vers 0, et donc on obtient bien une expression très proche de la variante de Conjecture de Hardy et Littlewood.

D'après ce qui précède, on peut obtenir une meilleure estimation de $E(X_{I(k)\pi(p1,..,pn)}$ (r(k)) en remplaçant dans la proposition précédente $P2_{I(k)\pi(p1,\ldots,pn)}$ (r(k)) donnant un équivalent de $E(X_{I(k)\pi(p1,..,pn)}$ (r(k)) $k/(Log(k))^2$ par l'intégrale $2\int_{[3,k/2]} (1/(Log(x)Log(k-x))dx$. (Ceci se justifie simplement si on a considéré que l'ensemble A des nombres premiers avait une évaluation probabiliste $p_{iA}=1/Log(i)$ pour i supérieur à $N_A=3$ au lieu de $N_A=501$)

Pour évaluer cette intégrale, on calcule la dérivée :

$$\frac{d}{dx}(\frac{x}{Log(x)Log(k-x)})$$

, et on intègre ensuite les 2 termes de l'égalité obtenue.

EXEMPLE 4.B.7 :CONJECTURE FORTE DES NOMBRES PREMIERS JUMEAUX

Etudions la Conjecture des nombres premiers jumeaux. Soit G l'ensemble des nombres p premiers tels que (p,p+2) soit un couple de nombres premiers. A étant l'ensemble des nombres premiers, on a pour tout naturel i, $f_G(i)=f_A(i)f_A(i+2)$. On sait de plus que A est inclus dans I l'ensemble des naturels impairs, mais plus précisément A est inclus dans K1 l'ensemble des naturels dont le carré est congru à 1 modulo 24.

On définit donc les ensembles suivants, i représentant toujours un naturel:

$A=\{i \ / \ i \text{ premier}\}$
$H=\{i \ /i+2 \text{ premier}\}$
On a donc $G=A\cap H$.
K1 est l'ensemble des naturels i tels que i^2 est congru à 1 modulo 24. On a donc :
$K1=\{i \ / \ i^2$ congru à 1 modulo 24$\}$. K1 est donc l'ensemble des naturels congrus modulo 24 à un des éléments de B_{K1}, avec :
$B_{K1}=\{1,5,7,11,13,17,19,23\}$.
On a donc A inclus dans K1.
De même :
$K'1=\{i \ / \ (i+2)^2$ congru à 1 modulo 24$\}$. K'1 est donc l'ensemble des naturels congrus modulo 24 à un des éléments de $B_{K'1}$, avec :
$B_{K'1}=\{3,5,9,11,15,17,21,23\}$
On définit alors K2 :
$K2=\{i \ / \ i^2$ et $(i+1)^2$ sont congrus à 1 modulo 24$\}$. On a donc $K2=K1\cap K'1$. K2 est l'ensemble des naturels congrus modulo 24 à un des éléments de B_{K2}, avec :
$B_{K2}=\{5,11,17,23\}$.(Donc $B_{K2}=B_{K1}\cap B_{K'1}$).

Appliquant le pseudo-Axiome des ensembles estimés à A, comme dans l'exemple précédent, on obtient la modélisation :
Pour i supérieur à 501, $f_A(i)$ est modélisée par la variable aléatoire $Xf_A(i)$, avec $p(« Xf_A(i)=1 »)=p_{iA} =1/Log(i)(1+\varepsilon(i))$.
Il en résulte :
Pour i supérieur à 501, $f_H(i)$ est modélisée par la variable aléatoire $Xf_H(i)$, avec $p(« Xf_H(i)=1 »= p_{iH} =p_{i+2A}$.
On sait que si i n'appartient pas à K2, $f_G(i)=0$ car G est inclus dans $K2=K1\cap K'1$.
Si i appartient à K2, par définition de $f_{A/C}$, A et C étant 2 sous-ensembles de **N**, on a:
$f_{G/K2}(i)=f_{A\cap K2/K2}(i)f_{H\cap K2/K2}(i)$.

Utilisant le pseudo-Axiome de l'intersection des ensembles estimés appliqué à (A,K2,K1), puis le pseudo-Axiome de l'inclusion des ensembles estimés à $(A\cap K2,K2)$, on obtient :
Pour i supérieur à 501, $f_{A\cap K2/K2}(i)$ est modélisée par $X_{A\cap K2/K2}(i)$, avec :
$p(« X_{A\cap K2/K2}(i)=1 »)=p_{iA}/p_{iK1}=3p_{iA}$.
De même, en procédant de la même façon pour H et K'1 :
Pour i supérieur à 501, $f_{H\cap K2/K2}(i)$ est modélisée par $X_{H\cap K2/K2}(i)$, avec :
$p(« X_{H\cap K2/K2}(i)=1 »)=p_{iH}/p_{iK'1}=3p_{i+2A}$.
Appliquant alors le pseudo-Axiome des variables indépendantes au couple $(X_{A\cap K2/K2}(i), X_{H\cap K2/K2}(i))$, on obtient que ces variables aléatoires peuvent être

considérées comme définies sur le même espace et indépendantes, et appliquant la propriété de correspondance on obtient :
Pour i appartenant à K2, « $f_{G/K2}(i)=1$ » est modélisée par l'évènement « $Xf_{G/K2}(i)=1$ », de probabilité $p_{iG/K2}=9p_{iA}p_{i+2A}$.
(On aurait pu obtenir le même résultat en écrivant :
G=G∩K2=(A∩K2)∩(H∩K2), puis en appliquant le pseudo-Axiome de l'intersection des ensembles estimés 2[ième] forme à (A∩K2,H∩K2,K2), ce qui permet d'obtenir $p_{iG}=p_{iA\cap K2}p_{iH\cap K2}/p_{iK2}$ puis à (A,K2,K1), (H,K2,K'1), ce qui permet d'obtenir $p_{iA\cap K2}=p_{iA}\ p_{iK2}\ /p_{iK1}$ et $p_{iH\cap K2}=p_{iH}\ p_{iK2}\ /p_{iK'1}$ puis le pseudo-Axiome de l'inclusion des ensembles estimés à (G,K2)), ce qui permet d'obtenir $p_{iG/K2}=p_{iG}$ $/p_{iK2}$, et finalement $p_{iG/K2}=p_{iA}p_{iH}/(p_{iK1}p_{iK'1})$.

Il en résulte, écrivant $G(n)=\sum_{i=1}^{499} f_G(i)+\sum_{i=501,i\in K2}^{n} f_G(i)$ et utilisant une variante immédiate du Théorème 4.A.7, que la proposition:
P(α(3)) :« G est un ensemble estimé d'estimation :

$$g(n)=\sum_{i=501,i\in K2}^{n} 9p_{iA}p_{i+2A}\approx 9p_{iK2}\times\frac{k}{(Log(k))^2}=\alpha(3)\times\frac{k}{(Log(k))^2}\ ,$$

avec α(3)=3/2»

a une pseudo-preuve aléatoire. (On justifiera plus loin la notation P(α(3)).
Nous verrons qu'il existe des modèles beaucoup plus précis que celui qu'on a utilisé.
Or on a montré plus généralement (On est dans le cas 1 de l'Etude d'une fonction par la TAN 4A7a)) que la proposition:
Q(α(3)) : « Il existe β tel que G est un ensemble estimé d'estimation g(n), avec:

$$\frac{\lim}{n\to\infty}\left(\frac{g(n)}{\alpha(3)(n/(Log(n))^2}\right)=\beta\ »$$

a une pseudo-preuve aléatoire. Si cette proposition est illustrée par des tests, elle a une explication aléatoire intéressante car elle n'a jamais été démontrée classiquement. Comme on l'a vu dans l'Etude théorique 4.A7a), plus proche est la valeur observée β de 1, valeur prédite par le modèle supposé exact, meilleur est la qualité du modèle et plus intéressante est l'explication aléatoire. On remarque que Q(α(3)) entraîne la Conjecture faible des nombres premiers jumeaux (G est infini) tout en étant illustrée par des tests si elle est vraie, et donc si Q(α(3)) est illustrée par des tests (traçant $g(k)/(k/(Log(k))^2)$, la Conjecture faible des nombres premiers

jumeaux a une pseudo-preuve aléatoire intéressante, et aussi une explication aléatoire puisqu'elle n'a jamais été prouvée classiquement. On rappelle aussi qu'on peut définir une proposition Q(α(3),B1) plus précise que Q(α(3), en bornant le distance $|\beta\text{-}1|$ par B1).

On peut généraliser et améliorer le modèle présenté ici en l'améliorant en remarquant que K1 est l'ensemble des naturels congrus à 1 ou 5 modulo 6, c'est-à-dire l'ensemble $I_\pi(3)$ introduit dans l'Exemple 4.B.6 précédent. Ceci justifie la notation P(α(3)), avec α(3)=3/2. Il est évident qu'on peut obtenir une estimation de g(n) de façon analogue en remplaçant K1 par $I_\pi(p_1,\ldots,p_n)$ où $p_1,..,p_n$ sont les n nombres premiers consécutifs après 3. On obtient dans ce nouveau modèle une constante $\alpha(p_1,\ldots,p_n)$, telle que les propositions $P(\alpha(p_1,\ldots,p_n))$ et $P(\alpha(p_1,\ldots,p_n),\varepsilon)$ ont des pseudo-preuve aléatoires.
On rappelle que la Conjecture de Hardy et Litlewood concernant les nombres premiers jumeaux peut s'exprimer sous la forme $P(2C_2)$:
$P(2C_2)$: « G est un ensemble estimé d'estimation $g(n)=2C_2n/(Log(n))^2$ », C_2 étant la constante intervenant dans la Conjecture de Goldbach proposée par Hardy et Littlewood (voir Exemple 4.B6 précédent, $C_2\approx 0.66$). Il en résulte, si les tests illustrent la validité de cette Conjecture, que la modèle MIπ(3) est de très bonne qualité considérant sa simplicité puisque 1.5 est très proche de 1 .32. (On remarque que ceci est encore plus manifeste si on écrit :

$$\frac{3}{2} = 2\times(1-\frac{1}{(3-1)^2}) \cong 2C_2$$

On peut donc conjecturer que la constante $\alpha(p_1,\ldots,p_n)=\alpha_n$ définie plus haut tend vers la limite $2C_2$ (pour n tend vers l'infini). Si ceci est confirmé par des tests, ou est démontré utilisant la Théorie des Nombres classiques, il est clair que la Conjecture de Hardy et Littlewood pourra être approchée asymptotiquement par des propositions $P(\alpha_n)$ (C'est-à-dire α_n tend vers $2C_2$) ayant une pseudo-preuve aléatoire. On pourra obtenir explicitement la Conjecture elle-même en utilisant le pseudo-Axiome suivant :

PSEUDO-AXIOME 4.B.7a)(de la limite) :

Si on obtient des propositions $P(\alpha_i)$ ayant des pseudo-preuves aléatoires, $P(\alpha_i)$ dépendant seulement du réel α_i, et tel que la suite α_i tende vers la limite α_p, alors lorsque *le pseudo-Axiome de la limite* est valide pour la suite $(P(\alpha_i))$, alors $P(\alpha_p)$ est vrai.

Justification intuitive :

Ce pseudo-Axiome de la limite est évident intuitivement car d'après ses hypothèses on peut approcher d'aussi prés qu'on veut $P(\alpha_p)$ par des propositions ayant une pseudo-preuve aléatoire.
On utilisera ce pseudo-Axiome de la limite quand les modèles Mi permettant d'obtenir les propositions $P(\alpha_i)$ sont de plus en plus précis.

En utilisant ce pseudo-Axiome de la limite, on voit que pour obtenir que la Conjecture des nombres premiers jumeaux a une pseudo-preuve aléatoire, il suffit de montrer classiquement que $\alpha(p_1,\ldots,p_n)$ tend vers $2C_2$ quand n tend vers l'infini. Ceci se ramène à un problème classique de la Théorie des nombres concernant les ensembles **N**/p**N**.

Pour résoudre ce problème, on peut montrer que le modèle $MI_\pi(p_1,\ldots,p_n)$, obtenu en remplaçant K1 par $I_\pi(p_1,\ldots,p_n)$ conduit à obtenir $\alpha_n=\alpha(p_1,\ldots,p_n)$ tendant ver $2C_2$ de la façon suivante :
On pose maintenant :
$K1=I_\pi(p_1,\ldots,p_n)$.
K'1={i dans **N** tel que i+2 appartient à K1}
$K2=K1\cap K'1$
En procédant exactement comme dans l'Exemple précédent avec $K1=I_\pi(3)$, on obtient que le modèle $MI_\pi(p_1,\ldots,p_n)$ conduit à obtenir que la proposition:
$P(\alpha_n)$:« $g(n)\approx\alpha_n k/(Log(k))^2$, avec : $\alpha_n=\dfrac{p_{iK2}}{(p_{iK1})^2}=\dfrac{1}{p_{iK1}}\times\dfrac{p_{iK2}}{p_{iK1}}$ »
a une pseudo-preuve aléatoire.
On a déjà obtenu p_{iK1} dans le Corollaire 4B6Bb).
Pour calculer p_{iK2}, on doit calculer le nombre d'éléments i de $p(A(p_1,\ldots,p_n)$ (défini dans l'Exemple précédent) tel que i+1 appartienne aussi à $p(A(p_1,\ldots,p_n))$, identifiant $A(p_1,..,p_n)$ avec $\mathbf{N}/2p_1\ldots p_n\mathbf{N}$.
Montrons alors le Théorème suivant :

THEOREME 4B7b) :

$p_1,..,p_n$ étant n nombres premiers consécutifs après 2, le nombre d'éléments i de $p(A(p_1,\ldots,p_n))$ tel que i+2 appartient à $p(A(p_1,\ldots,p_n))$ est égal à $(p_1-2)\ldots(p_n-2)$.(Identifiant $A(p_1,\ldots,p_n)$ avec $\mathbf{N}/2p_1,..,p_n\mathbf{N}$)
On notera $j_1(p(A(p_1,..,p_n)))$={i appartenant à $p(A(p_1,..,p_n)$ tel que i+2 appartient à $p(A(p_1,..,p_n))$} et $j_2(p(A(p_1,\ldots,p_n)\}$= {i appartenant à $p(A(p_1,..,p_n))$ tel que i-2 appartient à $p(A(p_1,\ldots,p_n))$.

Démonstration (par récurrence) :

Dans le cas où n=1, on est dans l'Exemple précédent, où on a vu :
$Card(j_1(p(A(3)))=Card(\{5\})=1=3-2$.
Donc le Théorème est vrai pour n=1.

Supposons qu'on ait montré le Théorème pour $p(A(p_1,..,p_{n-1}))$.
On pose $j_1(p(A(p_1,\dots,p_{n-1})))=\{h_{1,n-1},\dots,h_{s,n-1}\}$
L'ensemble des éléments i de $A(p_1,\dots,p_n)$ tels que ni i ni i+2 ne sont divisibles par $p_1,..,p_{n-1}$ est donc :
$B=\{h_{1,n-1},\dots,h_{s,n-1},\dots,2p_1\dots p_{n-1}(p_n-1)+h_{1,n-1},..,2p_1\dots p_{n-1}(p_n-1)+h_{s,n-1}\}$
D'après l'hypothèse de récurrence :
$Card(B)=p_n(p_1-1)\dots(p_{n-1}-1)$.
$j_1(p(A(p_1,\dots,p_n)))$ est constitué des éléments i de B tels que ni i ni i+2 ne sont divisibles par p_n, c'est-à-dire les éléments i de B qui :

a) ne sont pas de la forme $i=ap_n$.(a dans $A(p_1,\dots,p_{n-1})$)
b) ne sont pas tels que $(i+2) = ap_n$.

Si on pose :
$C=\{$i appartenant à B tel que $i=ap_n$, a naturel$\}$
$D=\{$i appartenant à B tel que $(i+2)=ap_n\}$
On a donc : $j_1(p(A(p_1,\dots,p_n)))=B/(CUD)$.
De plus il est évident que C et D ont une intersection vide.
D'autre part C est l'ensemble des naturels i de $A(p_1,..,p_n)$ congrus à p_n modulo p_n, et tels que i n'est pas divisible par $p_1,\dots,p_{n-1}$ ni i+2.
Et on a vu dans le Lemme4B6Be) que l'ensemble des naturels congrus à p_n modulo p_n dans $A(p_1,\dots,p_n)$ contenait exactement un représentant de chaque élément de $\mathbf{N}/2p_1..p_{n-1}\mathbf{N}$ et était égal à l'ensemble de ces représentants. C correspond donc à l'ensemble des naturels ap_n dont le représentant appartient à $j_1(p(A(p_1,\dots,p_{n-1})))$.
On en déduit $Card(C)=Card(j_1(p(A(p_1,\dots,p_{n-1}))))=(p_1-2)..(p_{n-1}-2)$ d'après l'hypothèse de récurrence.
De même $Card(D)=Card(j_2(p(A(p_1,\dots,p_{n-1}))))=(p_1-2)..(p_{n-1}-2)$
On obtient bien :
$Card(j_1(p(A(p_1,..,p_n)))=Card(B)-Card(C)-Card(D)=(p_1-2)\dots(p_n-2)$.

On déduit du Théorème précédent, pour $K1=I_\pi(p_1,\dots,p_n)$:

$$p_{iK2} = \frac{(p_1-2)...(p_n-2)}{2p_1....p_n}$$

Et donc d'après le Corollaire 4B6Bb) donnant l'expression de p_{iK1} et celle donnée par la Remarque 4B6Bc) :

$$\alpha_n = \frac{p_{iK2}}{p_{iK1}} \times \frac{1}{p_{iK1}} = 2\prod_{i=1}^{n}(1 - \frac{1}{(p_i - 1)^2})$$

On obtient bien que α_n tend vers $2C_2$ pour n tend vers l'infini.

On voit donc qu'il est très possible que la Conjecture des nombres premiers jumeaux (forte et faible) ne puisse pas être prouvée de façon classique, mais seulement en utilisant la TAN comme pour la Conjecture de Goldbach.

REMARQUE 4.B.7c) :

On peut obtenir des résultats très intéressants en utilisant la Pseudo-Axiome 4.B.7a) de la limite :

Remarquant qu'on aurait pu dans la proposition P2(S(n)) de la Remarque 4.A.7b) remplacer 0.98 par n'importe quel réel p avec 0<p<1, on obtient en appliquant le pseudo-Axiome 4B7a) de la limite que la proposition suivante, c'est à dire P1(S(n)) a une pseudo-preuve aléatoire:

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{S(n)}{\sum_{i=NA}^{n} p_{iA}})=1$$

On obtient donc que le Théorème 4.A.7) sans uiliser la Loi Forte des Grands Nombres généralisée.

De même, on remarque que dans la proposition $P2_{MI}(r(k))$ (Etude de la fonction r(k) par le modèle simple indépendant MI), on aurait pu remplacer 0.98 par n'importe quel réel p tel que 0<p<1. D'après ce qui précède, on obtient donc que la proposition suivante $P2_{MIlim}(r(k))$ a une pseudo-preuve-aléatoire :

$P2_{MIlim}(r(k))$: « $\lim_{i\to\infty}(\frac{r(i)}{(i/(Log(i))^2}) = 1$ »

Appliquant le même raisonnement à la proposition $P2_{I(k)\pi(p1,\ldots,pn)}$ r(k)) (Etude de la fonction r(k) par le modèle indépendant $MI(k)\pi(p_1,\ldots,p_n)$) (On rappelle $p_1,\ldots,p_n$ sont les n premiers nombres premiers différents de 2), on obtient, i appartenant à l'ensemble $F(t_1,\ldots.,t_r)$ contenant les naturels pairs ayant pour autres diviseurs premiers que 2 $t_1,..,t_r$, que la proposition suivante a une pseudo-preuve aléatoire:

$P_{MI(k)\pi(p1,..,pn)lim}$ (r(k)) : «

$$\lim_{i\to\infty}\left(\frac{r(i)}{C_{I(k)\pi(p1,..,pn)}(t_1,..,t_r)(i/(Log(i))^2)}\right)=1$$ ».

Or on a vu :

$$\lim_{n\to\infty}(C_{I(k)\pi(p1,...,pn)}(t_1,...t_r))=C_2\prod_{j=1}^{r}\left(\frac{t_j-1}{t_j-2}\right)$$

On obtient donc, appliquant à nouveau le pseudo-Axiome 4.B7b) de la limite aux propositions $P_{MI(k)\pi(p1,..,pn)}$ pour n tend vers l'infini, que la proposition suivante $P_{H.L.G}$ a une pseudo-preuve aléatoire :

$P_{H.L.G}$: “$r(i)\approx C_2\prod_{j=1}^{r}\frac{t_j-1}{t_j-2}\times\frac{i}{(Log(i)^2)}$”

5)INTERPRETATION DE LA T.A.N PAR LA TMP.

Dans un article précédent on a exposé la Théorie Mathématique Platoniste (TMP) permettant d'interprèter l'ensemble des théories mathématiques classiques de façon Platoniste. On a vu en effet que les théories mathématiques classiques pouvaient être identifiées à des *théories mathématiques Platonistes* (écrites sans majuscules et sans l'article défini “la”).

La T.A.N peut être identifiée à une théorie mathématique Platoniste T_A sur un code Platoniste C_A, celle-ci étant appelée *Théorie mathématique Platoniste aléatoire des nombres*. Les hypothèses $H(C_A)$ de C_A contiennent la théorie des probabilités, elle-même identifiée à une théorie mathématique Platoniste sur un code Platoniste C_m, celle-ci étant appelée *Théorie mathématique Platoniste des probabilités*. C_m est le code Platoniste minimal, c'est à dire comme on l'a défini dans la TMP que $H(C_m)$ contient seulement les bases de la TMP.

Dans la théorie mathématique Platoniste aléatoire des nombres, on admet axiomatiquement que “est modélisée par” représente une unique relation non-floue qui peut exister entre une fonction d'un sous-ensemble F (fini ou infini) de **N** dans **N** (qui est un objet mathématique non-relationnel) et une séquence de variable aléatoire indexée sur F (qui est aussi un objet mathématique non-relationnel. (Si on avait défini “est modélisée par” comme une relation entre “une proposition ayant une signification Platoniste” et un évènement d'un espace probabilisable, alors “est modélisée par” n'aurait pu être identifiée à une relation non-floue puisque “une proposition ayant une signification Platoniste” n'est pas une objet mathématique non-relationnel).

Alors, considérons la proposition (appelée “une loi numérique aléatoire” dans la T.A.N) de la forme:

P:“f(k) est modélisée par X(k)”

Avec f fonction d’un sous-ensemble F de **N** dans **N** et $(X(i))_F$ une séquence indexée sur F de variables aléatoires (identifiée à un ensemble contenant des couples de la forme (i,X(i)), avec i naturel appartenant à F et X(i) variable aléatoire, et pour tout i dans F un et un seul couple de la forme (i,X(i))), alors la proposition P sera équivalente dans le code Platoniste C_A à la proposition élémentaire Platoniste: “est modélisée par(f,$(X(i))_F$)”.

Notons que réciproquement par définition *une loi numérique aléatoire élémentaire Platoniste* sera une proposition équivalente à une proposition élémentaire Platoniste du type précédent. Cependant, on écrira en général une loi numérique aléatoire sous la forme:

“f est modélisée par $(X_i)_F$”

Considérons dans une démonstration sur T_A une proposition G(P) de la forme:

G(P):“P est modélisée par Ev”.

Avec P une proposition équivalente à une proposition Platoniste stable et Ev évènement d’un espace probabilisable (Ω,B,p).

Alors on définit la fonction f_P, de F={1} dans {0,1} telle que “f_P=1” est équivalent à “P est vraie”, et on définit $X_P(1)$ comme une variable aléatoire sur (Ω,B,p) à valeurs dans{0,1} telle que “$X_P(1)$=1” est équivalent à “Ev”.

Les définitions précédentes sont équivalentes dans le code Platoniste C_A considéré à une proposition Platoniste stable. G(P) est alors équivalent à cette proposition Platoniste suivie de la proposition élémentaire Platoniste: Q_{el3}: est modélisée par (f_P,$(X_P(i))_F$).

Et donc si les propositions précédent G(P) sont toutes vraies, G(P) est équivalent à une proposition Platoniste stable (Dans la démonstation sur T_A qui la contient).

Par exemple on admettra l’Axiome suivant: Si E est un ensemble de séquences $(u_i)_H$ à valeurs dans **N**, (H sous-ensemble de **N** fini ou infini), et si F est une fonction E dans un sous-ensemble fini G de **N**, alors si on a une fonction f de H dans **N** et une séquence indexée sur H $(X_i)_H$ de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisable Ω, telle que f est modélisée par $(X_i)_H$ et que de plus pour tout x de G “F($(X_i)_H$)=x” est un évènement de Ω, alors si on définit la fonction g de 1 dans G telle que “g(1)=x” est équivalent à F(($f(i)_H$))=x et si on définit la

variable aléatoire Y(1) à valeurs dans G telle que $p(Y(1)=x)=p_{\Omega}(F((X_i)_H)=x$, alors on aura "g est modélisée par Y".

Tout pseudo-Axiome de la TAN sera interprété par (ou son interprétation sera incluse dans) un Axiome de la TAN Platoniste permettant d'obtenir des lois numériques aléatoires dans certains cas. Ceci à l'exception du pseudo-Axiome du modèle exact. En effet, celui-ci affirme que dans le cas où F={1} et qu'on a une fonction f de F dans {0,1} et une variable aléatoire X(1) à valeurs dans {0,1}, avec F est modélisée par $(X(i))_F$ alors si on a $p(X(1)=1)\approx 1$, dans certains cas ceci a comme conséquence F(1)=1. Ceci dans la TAN Platoniste ne sera pas obtenu par un Axiome: Il s'agira de l'interprétation de ce résultat par le mathématicien.

Les Axiomes de la T.A.N Platoniste complèteront la définition de la relation non-floue "est modélisée par".

On remarque qu'il est très certainement possible de n'utiliser aucun Axiome dans la T.A.N Platoniste. Pour celà on définit pour chaque pseudo-Axiome aléatoire des relations non-floues "est modélisée de façon A",., "est modélisée de façon X" pouvant exister entre des fonctions et des séquences de variables alatoires. On les définit par des définitions complètes qui sont déductions logiques relationnelles évidentes des propositions les précédant dans T_A et des hypothèses $H(C_A)$ de la T.A.N Platoniste comprenant on le rappelle la Théorie des probabilités qui elle-même n'utilse pas d'Axiomes autres que ceux des fondements de la T.M.P. Cependant le formalisme de la T.A.N Platoniste obtenue est alors beaucoup plus lourd. Il est cependant remarquable qu'on puisse interpréter la T.A.N par la TMP sans admettre de nouveaux Axiomes.

On pourra donc montrer formellement qu'une proposition stable ou une loi numérique aléatoire ont des pseudo-preuves aléatoires mais pas qu'une proposition stable a une *explication aléatoire*. P étant une proposition mathématique simple générale (C'est à dire n'employant pas de concepts particuliers non-flous pré-définis) , H(P):"P a une pseudo-preuve aléatoire" aura la signification de la proposition mathématique simple H'(P) avec:

H'(P): "Si f_P est tel que f_P est une application de F={1} dans {0,1}, avec ""$f_P(1)=1$" est équivalent à P", alors il existe X(1) telle que X(1) est une variable aléatoire, à valeur dans {0,1}, telle que f_P est modélisée par $(X(i))_F$ et $p(X(1)=1)>0,8$".

Si les propositions précédant H(P) dans le texte T considéré sont vraies, H(P) sera donc équivalent dans T sur C à une proposition stable Platoniste.

La définition des interprétations Platonistes des propositions de type G(P) ou H(P) précédentes sera contenue dans ls hypothèses $H(C_A)$ de C_A.

Cependant le fait qu'une proposition P ait une explication aléatoire est une interprétation subjective de la communauté des mathématiciens du fait que la

pseudo-preuve aléatoire de P (Si elle existe) constitue une justification théorique possible et intéressante de P. Ceci signifie que ni P ni NonP n'ont été montré classiquement, que P concerne une infinité de nombres et que P est illustrée par de nombreux tests.

6.CONCLUSION

Ainsi on a montré comment la TAN permettait de montrer que des propositions concernant les décimales d'irrationnels ou des sous-ensembles de **N** avaient des explications aléatoires, c'est-à-dire des explications rationnelles basées sur le hasard, sans avoir été démontrées classiquement ni leur négation.

Il semble certain que bien que souvent ces explications aléatoires soient très simples, ces propositions n'aient pas de démonstration classique. Par exemple si on considère la proposition « Si I est l'ensemble des naturels i inférieurs à n tels que la $i^{ème}$ décimale de Log(3),$\sqrt{5}$,π coïncide, alors I est infini », il semble impossible de prouver cette proposition en utilisant les Axiomes classiques de la Théorie des nombres, alors que cette proposition peut être obtenue très simplement par la TAN, qui permet d'obtenir aussi l'estimation i(n) de I.

Comme dans l'étude de la Conjecture faible de Goldbach [(5)], on a vu que la TAN permettait non seulement de prévoir que certains ensembles étaient finis, infinis ,vides ou non vides, mais aussi de prévoir certaines de leurs caractéristiques, par exemple leur estimation. Il semble impossible d'obtenir ces caractéristiques si particulières sans utiliser les modèles statistiques obtenus par la TAN.

Il reste à réaliser des tests, afin de vérifier l'importance et la validité de la TAN concernant les décimales d'irrationnels et les ensembles estimés. En particulier, il faudrait vérifier en effectuant des tests la validité de la variante de la Conjecture forte de Goldbach de Hardy et Littlewood, et celle concernant les nombres premiers jumeaux dont on a donné une pseudo-preuve aléatoire dans cet article. Si tel n'était pas le cas, il faudrait trouver des modèles plus précis que ceux présentés dans cet article.

Il reste aussi à démontrer la Loi Forte des Grands Nombres généralisée qu'on a conjecturée, mais ceci est un problème classique de probabilité. Il faudrait aussi comme on l'a vu étudier les prédictions des modèles $MI(k)\pi(p_1,\ldots,p_n)$, et $M_{eq}I(k)\pi(p_1,..,p_n)$ pour les faibles valeurs de k (k dans [1000,100000]) et vérifier si elles permettent de justifier l'aspect de la Comète de Goldbach pour ces faibles valeurs.

Un résultat extrêmement intéressant obtenu dans cet article est d'avoir donné une explication aléatoire à des propositions comme la variante de la

Conjecture de Hardy et Littlewood concernant la Conjecture forte de Goldbach et la Conjecture forte des nombres premiers jumeaux.

Références :

1.E.J Borowski, J.M Borwein,Mathematics,*Collins Dictionnary* (GB 1984)
2.J.P Delahaye, *Merveilleux nombres premiers,* Belin (Paris 2000)
3.M.R Spiegel,J.S Schiller,R.Srinivasan,*Probability and statistics*,McGraw Hill (2000)
4.P.Roger,*Probabilités statistiques et processus stochastiques*,Pearson(France 2004)
5.T.Delort, *Théorie Aléatoire des Nombres-Partie I :Conjecture faible de Goldbach.* , Extrait du livre Théories d'or 8e édition, Editions Books on Demand, Paris (2015)
6.O.Rioul, *Théorie des probabilités*, Lavoisier (2008),Paris.
7.Hardy and Littlewood, *On the expression of a number as a sum of primes*, Acta mathematica,(1923).

Les éventuels compléments de ce livre seront mis sur les sites d'archives ouvertes Vixra, (www.vixra.org), HAL ou Internet archive (www.archive.org).

NOTES

NOTES